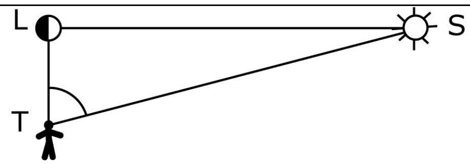
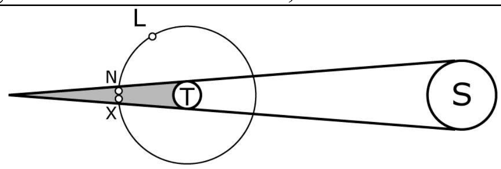
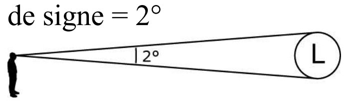
Traité d'Aristarque de Samos
sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune

d'après une traduction de M. le Comte de Fortia d'Urban, 1823

Les extraits de la traduction sont en italique. Le texte d'Aristarque est accompagné de figures qui ne sont pas reproduites ici, d'autres figures les remplaçant.
Le texte est disponible sur Gallica (https://gallica.bnf.fr) en tapant fortia d'urban aristarque dans la fenêtre de recherche. Les figures sont regroupées dans les trois dernières pages.

Les six hypothèses d'Aristarque

Hypothèses d'Aristarque	Commentaires
1. La Lune reçoit sa lumière du Soleil.	Avec, comme sous-entendu qui apparaît ici et dans la suite du texte, la Lune est sphérique.
2. La Terre peut être considérée comme un point et comme le centre de l'orbite de la Lune.	On considère une orbite circulaire.
3. Lorsque la Lune nous paraît dikhotome (coupée en deux portions égales), elle offre à nos regards son grand cercle, qui détermine la partie éclairée et la partie obscure de cet astre.	 Au premier quartier (ou au dernier), la limite jour-nuit sur la Lune est un grand cercle dont le plan passe par l'observateur.
4. Lorsque la Lune nous paraît dikhotome, sa distance au Soleil est moindre du quart de la circonférence, de la trentième partie de ce quart.	 Angle LTS = angle droit – angle droit/30 = 90° - 3° = 87°. Cet angle est difficile à mesurer, il vaut en réalité 89,85°.
5. La largeur de l'ombre est de deux lunes.	 NX = 2 D_L Valeur trouvée par l'observation d'éclipses totales de Lune. Ce diamètre est sous estimé puisqu'il vaut en moyenne 2,6 D_L
6. L'arc soutendu dans le ciel par la Lune est la quinzième partie d'un signe.	Un signe = 360°/12 = 30° Un quinzième de signe = 2°  Ce diamètre apparent est nettement surestimé puisqu'il vaut en réalité 0,5°.

À partir de ces hypothèses, Aristarque va calculer le diamètre de la Lune et celui du Soleil ainsi que les distances de la Lune et du Soleil, le tout en fonction du diamètre de la Terre.
Sur ces six hypothèses, trois sont fortement entachées d'erreur de mesure mais ces données vont néanmoins permettre déjà de montrer que le Soleil est très éloigné et ensuite de classer les diamètres de la Lune, de la Terre et du Soleil.
Autre hypothèse non formulée ici mais qui apparaît dans le texte, le Soleil, la Terre et la Lune sont des corps sphériques.

Les propositions démontrées

En gras sont notées les propositions concernant les distances et les diamètres

Proposition I
Deux sphères égales peuvent toujours être comprises par un cylindre.
Si deux sphères ont même rayon, il existe un cylindre tangents aux deux sphères.

Proposition II
Deux sphères inégales sont comprises dans un cône qui aura son sommet du côté de la plus petite sphère.
Aristarque utilise cette propriété dans la suite pour représenter l'ombre de la Terre. La grande sphère, c'est le Soleil, la petite, la Terre.

Proposition III
Si une sphère est éclairée par une sphère plus grande, sa partie éclairée sera plus grande que sa moitié.
C'est une réalité que l'on néglige souvent mais effectivement la partie éclairée de la Lune comme celle de la Terre sont légèrement plus grande que la moitié de la sphère.

Proposition IV
Dans la Lune, le plus petit cercle possible sépare la partie obscure se la partie éclairée lorsque le cône qui comprend le Soleil et la Lune a son sommet à notre vue.
Aristarque explique que la limite jour nuit sur la Lune est un cercle un peu plus petit lorsque la Lune est plus proche du Soleil donc autour de la nouvelle Lune. La variation est infime et l'intérêt de cette proposition n'apparaît pas vraiment dans la suite.

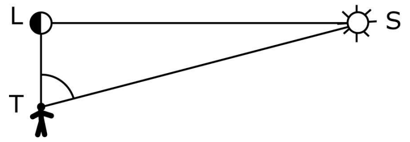
Proposition V
Le cercle qui détermine dans la Lune la partie obscure et la partie éclairée ne diffère pas d'un grand cercle de la Lune quant à l'apparence.
On pourra donc considérer qu'une moitié de la Lune est éclairée. Les propositions III et IV peuvent donc être négligées.

Proposition VI
Lorsque la Lune nous paraît éclairée à moitié ou dikhotome, le grand cercle qui est posé contre celui qui détermine la partie éclairée et la partie obscure est touné vers notre oeil ; c'est-à-dire que le grand cercle posé contre celui qui distingue la partie éclairée de la partie obscure et notre oeil sont dans le même plan.
C'est quasiment l'hypothèse 3, en distinguant la limite jour-nuit et le grand cercle qui en est proche, « posé contre ».

Proposition VII
Lorsque la Lune est dikhotome, sa distance du Soleil est moindre d'un quart de cercle.
Voir la figure de l'hypothèse 4, au début : l'angle LTS est inférieur à l'angle droit.

Proposition VIII
La distance à laquelle le Soleil se trouve de la Terre est plus grande 18 fois, mais moindre de 20 fois que celle à laquelle la Lune se trouve de la Terre.

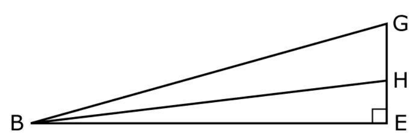
Avec de la trigonométrie, le calcul est simple, à partir de l'hypothèse 4 :
$\cos \widehat{LTS} = LT/ST$ d'où $ST/TL = 1/\cos 87° \approx 19{,}1$



$\widehat{LTS} = 87°$

Avec la valeur correcte moyenne de 89,85°, on trouve un rapport de 390 fois qu'on arrondi souvent à 400. Le Soleil est donc approximativement 400 fois plus éloigné de nous que la Lune.

Ne connaissant pas les tables trigonométriques, Aristarque se livre à un long développement à partir de l'hypothèse 4 pour trouver cet encadrement. Pour arriver à calculer des mesures sans trigonométrie, il utilise principalement cette propriété : $EG/EH > E\hat{B}G / E\hat{B}H$



Voici le début de sa démonstration :
A = Soleil ; B = Terre ; C = Lune
(BG) bissectrice de l'angle EBF

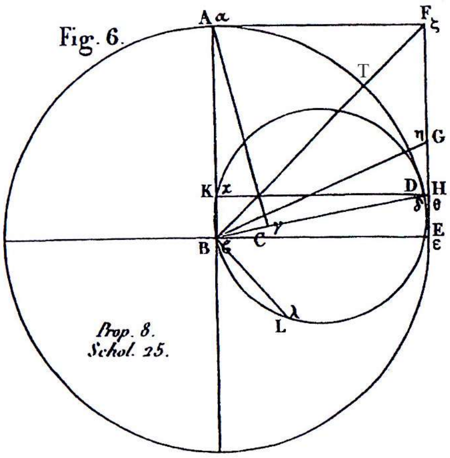
1. $\frac{EG}{EH} > \frac{E\hat{B}G}{E\hat{B}H}$; $\frac{EG}{EH} > \frac{22{,}5°}{3°}$; $\frac{EG}{EH} > \frac{15}{2}$

2. $\frac{FG^2}{EG^2} = \frac{FG^2}{GT^2} = 2$; $\frac{FG^2}{EG^2} > \frac{49}{25}$; $\frac{FG}{EG} > \frac{7}{5}$; $\frac{EF}{EG} > \frac{12}{5}$; $\frac{EF}{EG} > \frac{36}{15}$

3. $\frac{EG}{EH} > \frac{15}{2}$ et $\frac{EF}{EG} > \frac{36}{15}$ donc $\frac{EF}{EH} > \frac{36}{2}$; $\frac{EF}{EH} > 18$

4. $\frac{EF}{EH} = \frac{EB}{EH}$; $\frac{BH}{EH} > \frac{BE}{EH} > 18$; or $\frac{BH}{EH} = \frac{AB}{BC}$; donc $\frac{AB}{BC} > 18$

Fig. 6.



Aristarque montre ensuite que le rapport AB/BC est inférieur à 20.

Proposition IX
Lorsque le Soleil est entièrement éclipsé, un même cône, ayant son sommet à notre oeil, comprend le Soleil et la Lune.
Lors des éclipses totales de Soleil, la Lune cache exactement le Soleil. Ce qui revient à dire que les deux astres ont le même diamètre apparent. En réalité, dans certaines éclipses dites annulaires, la Lune n'arrive pas tout à fait à cacher le Soleil, c'est lorsqu'elle est plus éloigné de la Terre (son orbite n'est pas tout à fait circulaire). Pour d'autres, le diamètre apparent de la Lune est légèrement plus grand que celui du Soleil.

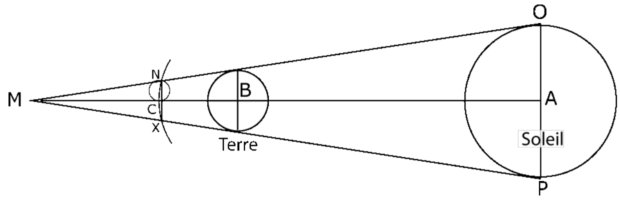
Proposition X
Le diamètre du Soleil est plus de 18 fois et moins de 20 fois plus grand que celui de la Lune.
C'est une conséquence directe des deux propositions précédentes en utilisant le théorème de Thalès.
Avec la trigonométrie et les valeurs d'Aristarque, on arrive à D_S / $D_L \approx 19{,}1$.

Proposition XI
Le Soleil est à la Lune en plus grande proposrtion que 5832 à 1 et en moindre que 8000 à 1.
Aristarque compare ici les volumes. Les deux nombres cités ici sont les cubes de 18 et de 20 de la proposition précédente. Il a donc bien conscience que Soleil et Terre ne sont pas des disques.

Proposition XII
Le diamètre de la Lune contient moins de 2/45 parties de la distance du centre de la Lune à notre oeil et il est plus grand que la trentième partie de cette distance.
Là encore, Aristarque développe une longue démonstration avec des considérations géométriques. Il utilise sa 6e hypothèse, le diamètre apparent de la Lune mesure 2°. C'est beaucoup plus court avec la trigonométrie.
sin 1° = HL/TL d'où HL = TL × sin 1° ≈ 0,0175 TL et $D_L \approx 0{,}035$ TL .
Aristarque trouve entre 0,044 (2/45) et 0,033 (1/30) fois TL.
Avec le bon diamètre apparent (0,5°), on trouve environ 1/115.

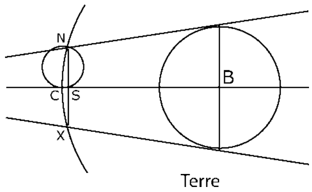
Proposition XIII
Le diamètre du cercle qui distingue dans la Lune la partie obscure de la partie éclairée est plus petite que le diamètre de la Lune et a cependant avec lui un rapport plus grand que celui du nombre 89 au nombre 90.
C'est la suite des propositions 3-4-5 que l'on peut montrer avec la trigonométrie.
Le rapport cherché vaut cos 1° soit 0,9994 qui est bien compris entre 89/90 et 1.

Proposition XIV
Une ligne droite qui est contenue dans l'ombre de la Terre, soutendant l'arc d'un cercle dans lequel se meuvent les extrémités du diamètre qui distingue dans la Lune la partie obscure et la partie éclairée est moindre que le double du diamètre de la Lune et a un plus grand rapport avec ce diamètre que 88 à 45.
Les calculs qui suivent cet énoncé et la figure permettent de comprendre ce qu'Aristarque a voulu dire mais c'est un peu compliqué et de peu d'importance. C'est la suite de la proposition 5. Il compare le diamètre de l'ombre de la Terre au diamètre de l'ombre observé. Voici la figure pour ceux qui veulent essayer de suivre.
Les calculs montrent ensuite que NX est compris entre 88/45 D_L et 2 D_L.



Proposition XV

Si l'on tire une ligne droite du centre de la Terre au centre de la Lune, cette ligne sera avec la ligne droite prise sur l'axe, entre celle qui soutend l'arc du cercle contenu dans l'ombre de la Terre et le centre de la Lune en plus grande proportion que 675 à 1.

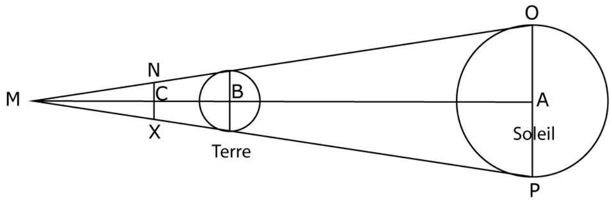


Encore une phrase complexe pour un résultat d'un intérêt limité vu la précision des mesures. Aristarque montre que BC/CS > 675.

Proposition XVI

Le diamètre du Soleil est au diamètre de la Terre en plus grande proportion que 19 à 3 et en moindre que 43 à 6.

Pour arriver à cette conclusion, Aristarque utilise les propositions VIII, X, XIV et de longs calculs.
On cherche D_S/D_T soit AM/BM. Pour cela, il détermine AM/AB en calculant auparavant AM/AC puis AC/AB tout cela avec des encadrements et sans trigonométrie. Nous allons le faire avec des valeurs approchées et avec nos résultats utilisant la trigonométrie.



Sur cette figure, on a fait plusieurs approximations.
La droite OM qui joint deux extrémités de diamètres du Soleil et de la Terre est confondue avec la tangente qui limite l'ombre de la Terre.
La trajectoire de la Lune pendant l'éclipse est confondue avec le segment NX. Mais Aristarque ne fait pas ses approximations, ce qui complique les calculs...

* MA/MC = OP / NX = D_S / $2D_L \approx 19{,}1/2 = 9{,}55$ (cf proposition X). Donc MA = 9,55 MC et AC = 8,55 MC. On a donc AM/AC = 9,55 / 8,55
* Le Soleil est 19,1 fois plus loin que la Lune donc AB / BC = 19,1 d'où AB = 19,1 BC et AC = 20,1 BC. On a donc AC/AB = 20,1 / 19,1.
* AM/AB = AM/AC × AC/AB = 9,55 / 8,55 × 20,1/19,1 = 1,175 d'où AM = 1,175 AB donc BM = 0,175 AB
*Conclusion D_S/D_T = AM / BM = 1,175 / 0,175 ≈ 6,7.
Comparaison avec l'encadrement d'Aristarque 19/3 ≈ 6,3 et 43/6 ≈ 7,2

Proposition XVII

Le Soleil est à la Terre en proportion plus grande que celle de 6859 à 27 et moindre que celle de 79507 à 216.

Il s'agit du rapport des volumes donc des cubes des rapports précédents.

Proposition XVIII

Le diamètre de la Terre est au diamètre de la Lune en plus grand rapport que celui de 108 à 43, moindre que celui de 60 à 19.

La proposition X donne D_S / D_L et la XVI donne D_S/D_T. On en déduit facilement D_T / D_L
Avec les hypothèses d'Aristarque et nos calculs, on a trouvé : $D_S / D_L \approx 19{,}1$ et $D_S/D_T \approx 6{,}7$.
$D_T / D_L = (D_S/D_L)/(D_S/D_T) \approx 19{,}1 / 6{,}7 \approx 2{,}8$
À comparer avec la valeur actuelle de 3,7.

Proposition XIX

La Terre est à la Lune en proportion plus grande que celle de 1259712 à 79507 ; et moindre que celle de 216000 à 6859.

Il s'agit toujours des rapports de volume obtenus en prenant le cube des rapports précédents.