

LA LONGUEUR DE MON OMBRE

Pierre Causeret, Esbarres

Quelle est la longueur de mon ombre ? Elle varie en fonction de l'heure, de la saison et aussi de la latitude. Voici quelques activités pour réfléchir à la question.

Au cours de la journée

À partir de l'école primaire

Pour débiter une recherche sur le sujet, on peut commencer par s'intéresser à l'ombre d'une figurine type Lego® ou Duplo® sur une surface horizontale, formée par une source lumineuse comme une lampe de poche. On remarquera facilement que la longueur de l'ombre dépend de la hauteur de la source lumineuse et que sa direction est à l'opposé de la source. On peut prolonger l'expérience à l'extérieur par une journée ensoleillée en observant l'ombre d'une personne. On s'aperçoit que cette ombre change de direction et de longueur en la dessinant à la craie toutes les heures par exemple.

Première remarque,

**l'ombre est plus courte
quand elle est dirigée vers le nord¹.**

Mais pourquoi ? La maquette qui suit permet de répondre à la question en faisant appel à la rotation de la Terre sur elle-même. Il suffit d'une lampe (le Soleil), d'un globe terrestre et d'un personnage assez petit fixé sur un carré représentant son horizon (figures 1 et 2).

La lampe étant allumée, on demande à un élève de faire tourner la Terre pour que l'ombre soit la plus courte possible, en s'aidant des cercles tracés. La meilleure solution est de placer l'ombre au nord, le Soleil est donc au sud.



Fig.1. La maquette avec lampe, globe et horizon. Ici, le globe terrestre a son axe vertical mais on peut également utiliser un globe classique avec un axe incliné.

¹ Les explications données ici sont valables au nord du tropique du Cancer. Pour les autres latitudes, il faudra adapter le discours.



Fig.2. Horizon (6 cm de côté) et personnage (2 cm de haut). Sur cet horizon, on a tracé des cercles concentriques, les axes nord-sud et est-ouest et noté les points cardinaux. L'horizon est fixé sur le globe, le nord dirigé vers le pôle Nord.

Lors des observations à l'extérieur, on a pu remarquer que l'ombre est du côté *ouest* le matin (Soleil à l'*est*) et côté *est* le soir (Soleil à l'*ouest*). Avec la maquette, on peut demander de placer le personnage le matin (ombre à l'ouest), puis le midi (ombre au nord) et enfin le soir (ombre à l'est). On trouve ainsi le sens de rotation de la Terre (sens direct ou inverse des aiguilles d'une montre vu du nord).

On vérifie également que l'ombre la plus courte se trouve au milieu de la journée (midi solaire).

Au lycée

On peut proposer de représenter la fonction qui, à l'heure, fait correspondre la longueur de l'ombre un jour donné. Pour que le calcul ne soit pas trop compliqué, on se place le jour de l'équinoxe, quand le Soleil se trouve dans le plan de l'équateur terrestre. On cherche la longueur L de l'ombre d'un bâton vertical de 1 m sur un sol horizontal. Ce type de bâton est souvent appelé gnomon.

On note ϕ la latitude de l'observateur, h la hauteur du Soleil et H l'heure, ou plus précisément l'angle horaire : on prend le midi solaire comme origine du temps et on fait varier H de -12 à 12 en heure, ou de $-\pi$ à π en radians (angle rouge de la figure 4).

On a alors :

$$L = 1 / \tan h \text{ et } \sin h = \cos \phi \times \cos H$$

(démonstration dans l'encadré page suivante).

Avec un tableur ou un petit programme, on peut calculer L pour les heures choisies ou tracer la courbe représentative en effectuant les calculs de minute en minute par exemple (figures 5 et 6).

Et si vous ne mesurez pas 1 m, vous aurez la longueur de votre ombre en multipliant votre taille en m par la longueur de l'ombre du bâton de 1 m (tableau 1).

Encadré 1 Les calculs

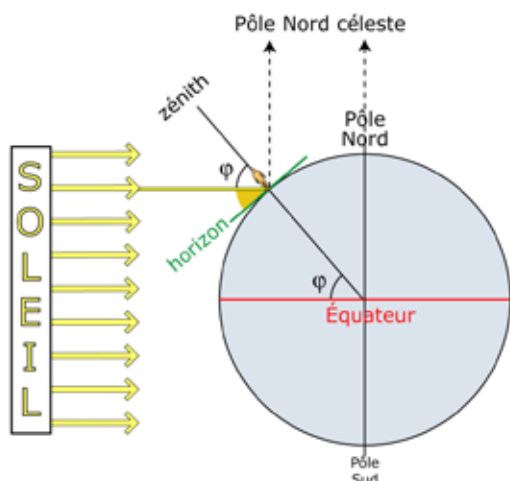


Fig.3. Pour l'observateur, la hauteur du Soleil à midi le jour de l'équinoxe (angle orange) est le complémentaire de la latitude.

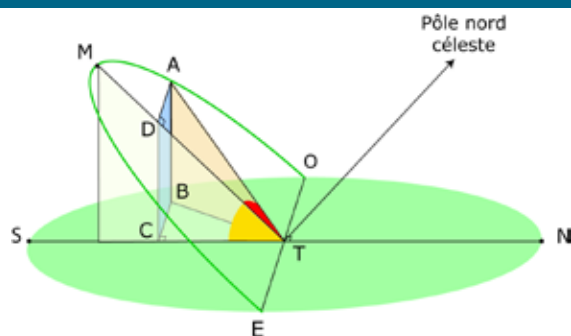


Fig.4. Le disque vert est l'horizon. M est la position du Soleil à midi et A, celle du Soleil à l'heure considérée.

On pose $TO = TA = TM = 1$.

L'angle orange (hauteur du Soleil à midi) est le complémentaire de la latitude φ .

L'angle rouge est l'angle horaire du Soleil H .

On peut calculer en fonction de φ et de H :

a. TD. b. DC. c. AB. d. Le sinus de l'angle h (BTA)

On trouve :

a. $TD = \cos H$; b. $\sin CTD = DC/TD$

d'où $DC = TD \sin CDT = TD \cos \varphi = \cos H \cos \varphi$.

c. $\sin h = AB = DC = \cos H \cos \varphi$.

Heure solaire	7 h	10 h	12 h	14 h	17 h
H (en h)	-5	-2	0	2	5
L (bâton de 1 m)	5,80	1,45	1,15	1,45	5,80
L (personne de 1,80 m)	10,4	2,61	2,07	2,61	10,4

Tab.1. Longueur de l'ombre d'un gnomon de 1 m et d'une personne de 1,80 m à l'équinoxe à la latitude de 49° N.

Si on veut représenter la longueur de l'ombre à une autre date, il faut connaître la déclinaison δ du Soleil (l'angle

entre le plan de l'équateur et la direction du Soleil). La formule donnant la hauteur h est un peu plus compliquée :

$$\sin h = \sin \varphi \times \sin \delta + \cos \varphi \times \cos \delta \times \cos H$$

On peut alors représenter la longueur de l'ombre à n'importe quelle heure pour n'importe quel jour (figure 7).

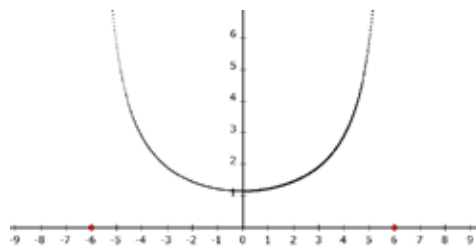


Fig.5. Longueur de l'ombre d'un gnomon de 1 m à la latitude de 49° N le jour de l'équinoxe (un point par minute). Les points rouges sur l'axe des abscisses indiquent les heures de lever et de coucher du Soleil ; on y observe deux asymptotes verticales, la longueur de l'ombre tendant vers l'infini.

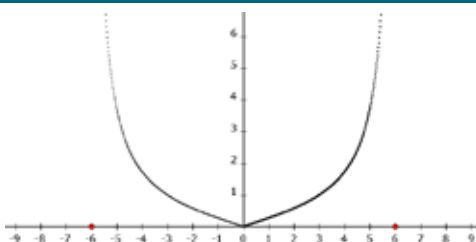


Fig.6. Longueur de l'ombre à l'équateur le jour de l'équinoxe. Le Soleil passe au zénith à midi, la longueur de l'ombre est nulle pour $H = 0$.

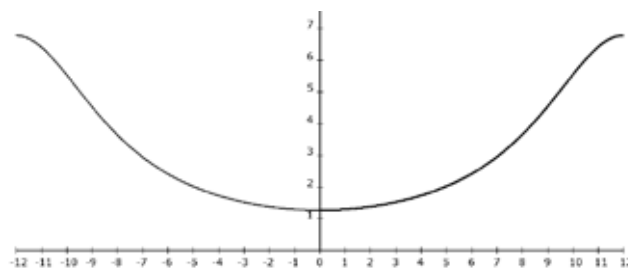


Fig.7. Longueur de l'ombre à la latitude de 75° N le jour du solstice d'été. Le Soleil ne se couche pas, on est au nord du cercle polaire arctique.

Courbe décrite par l'extrémité de l'ombre

On peut s'intéresser à la forme de la courbe décrite par l'extrémité de l'ombre du gnomon. Au cours de la journée, on voit le Soleil se déplacer le long d'un parallèle de la voûte céleste – d'un grand cercle le jour de l'équinoxe (figure 8). Si on appelle O l'extrémité du gnomon et S le Soleil, la droite (OS) décrit un cône – réduit à un plan le jour de l'équinoxe.

Ce dernier cas, l'équinoxe, est le plus simple, l'intersection de deux plans étant une droite, l'extrémité de l'ombre suit toujours une droite ce jour-là.

En dehors de ces deux jours par an, elle suit l'intersection d'un cône et d'un plan : c'est ce qu'on appelle une conique, donc une ellipse, une parabole ou une hyperbole. Au nord du cercle polaire arctique ou au sud du cercle polaire antarctique, les jours où le Soleil ne se couche pas, on obtient une ellipse.

Sinon, ce sera un arc d'hyperbole (avec le cas limite de la parabole quand le Soleil se trouve à l'horizon à minuit).

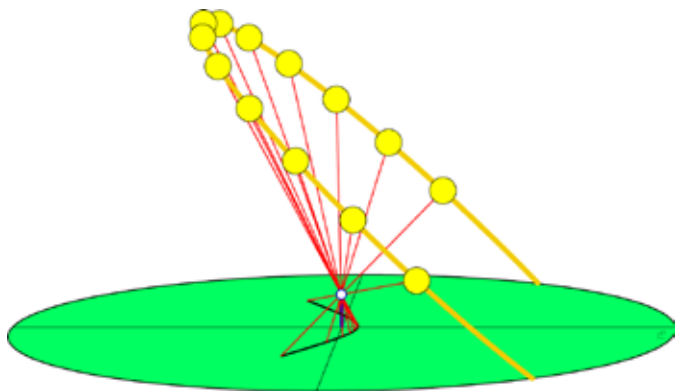


Fig.8. L'extrémité de l'ombre du gnomon décrit ici un arc d'hyperbole.

Au cours de l'année à midi

De l'école primaire au collège

Il est intéressant de suivre les variations de la longueur de l'ombre d'une personne ou d'un bâton à midi solaire tout au long de l'année. Le matériel le plus simple pour cela est une méridienne horizontale (figure 9).



Fig.9. Méridienne horizontale constituée d'une planchette et d'un gnomon. Elle doit être orientée nord sud. On peut y noter la position de l'extrémité de l'ombre toutes les semaines ou tous les mois aux alentours du midi solaire (voir encadré), il suffit qu'il fasse beau. En réalité, il n'est pas nécessaire d'être très précis sur l'heure du midi solaire, la hauteur du Soleil varie peu au milieu de la journée.

Comment trouver l'heure légale du midi solaire sans calcul ?

On peut obtenir cette heure sur le site ssp.imcce.fr, onglet visibilité des astres, en indiquant son lieu d'observation et la date. C'est l'heure de passage du Soleil au méridien qui est donnée en temps universel. Il faut ajouter 1 h en heure d'été ou 2 h en heure d'hiver pour avoir l'heure de la montre.

Si on commence en début d'année scolaire, on voit l'ombre s'allonger jusqu'au solstice d'hiver fin décembre pour raccourcir ensuite.

Pour comprendre la relation entre la hauteur du Soleil et la température, on pourra faire l'expérience du chocolat décrite dans le numéro 161 des Cahiers Clairaut (disponible en ligne).

Si l'on veut connaître la hauteur du Soleil, on peut matérialiser un rayon solaire en tendant une ficelle du sommet du gnomon à l'extrémité de l'ombre et utiliser un rapporteur. Sinon, l'angle se calcule par sa tangente avec simplement deux mesures.

Au collège

Pour comprendre pourquoi la hauteur du Soleil à midi varie tout au long de l'année, on pourra utiliser une maquette montrant la révolution de la Terre autour du Soleil avec son axe incliné par rapport au plan de son orbite (figure 10).



Fig.10. Maquette décrite dans le hors-série n° 12 des Cahiers Clairaut Astronomie à l'école.

Nous allons nous intéresser ici à deux positions particulières, les solstices d'hiver (21 décembre, parfois le 22) et d'été (21 juin, parfois le 20). Un simple schéma montre que l'ombre d'un gnomon à midi au solstice d'hiver est beaucoup plus longue qu'au solstice d'été (figure 11).

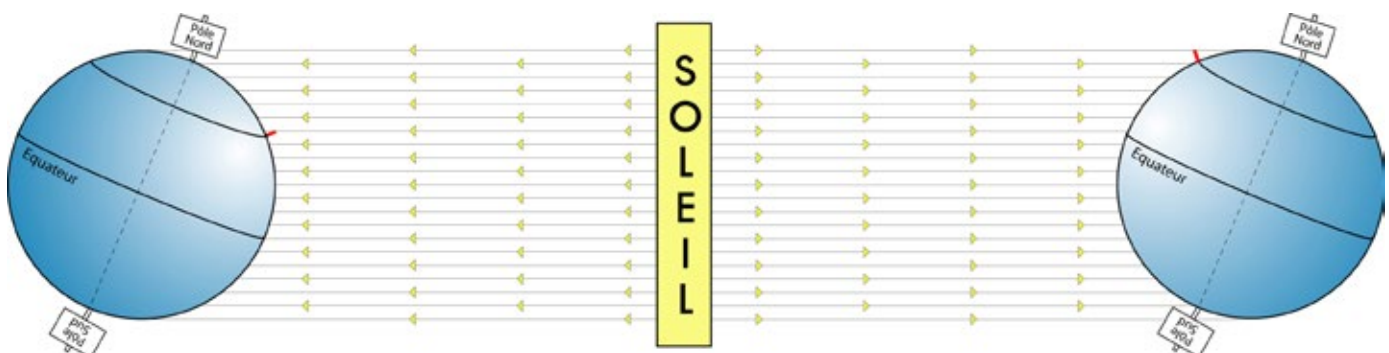


Fig.11. La Terre représentée aux solstices. On peut mesurer sur la figure la longueur de l'ombre du bâton rouge à midi à gauche au solstice d'été et à droite au solstice d'hiver. On trouve environ 3 mm à gauche et près de 2 cm à droite (bien que la rotondité de la Terre fausse un peu le résultat), pour une latitude de 47° N (latitude moyenne en France métropolitaine).

On obtiendra un résultat plus précis par le calcul. À la latitude de 47° N, l'ombre d'un bâton de 1 m mesure 44 cm au solstice d'été et 2,81 m au solstice d'hiver (voir encadré n° 2). Pour une personne de 1,80 m, on obtient 79 cm et 5,05 m.

En France métropolitaine, notre ombre est au moins 6 fois plus longue à midi au solstice d'hiver qu'au solstice d'été !

Au lycée

Comme dans le premier cas, il est possible de représenter graphiquement la hauteur du Soleil à midi en fonction de la date. Nous avons vu qu'à l'équinoxe, cette hauteur est égale au complémentaire de la latitude soit $\pi/2 - \varphi$ (figure 3).

À une autre date, il suffit d'ajouter la déclinaison du Soleil (notée δ), positive quand il est au nord du plan de l'équateur, négative au sud.

On peut trouver cette déclinaison sur le site imcce.ssp.fr (onglet éphémérides de position) ou la calculer avec une formule approchée. La figure 12 donne la hauteur h du Soleil à midi solaire en fonction du nombre de jours écoulés depuis l'équinoxe d'automne. Elle a été réalisée avec ces trois formules :

1. $L = 1 / \tan h$

2. $h = \pi/2 - \varphi + \delta$

avec φ = latitude et δ = déclinaison du Soleil

3. $\sin \delta = \sin \varepsilon \times \sin (2\pi J / 365,25)$

avec ε = obliquité de la Terre = $23,45 \times \pi/180$

et J = nombre de jours écoulés depuis l'équinoxe de printemps. Cette dernière formule est approximative car elle ne tient pas compte de l'excentricité de l'orbite terrestre.

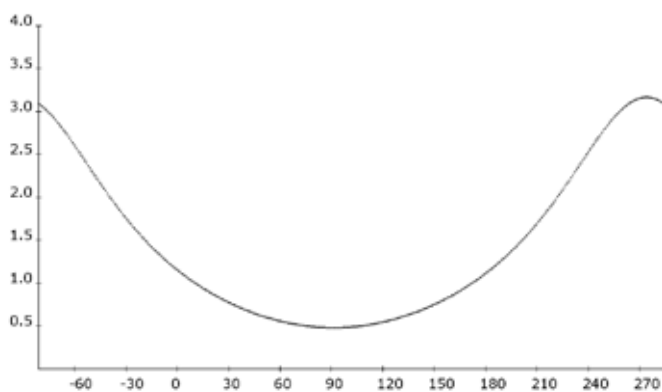
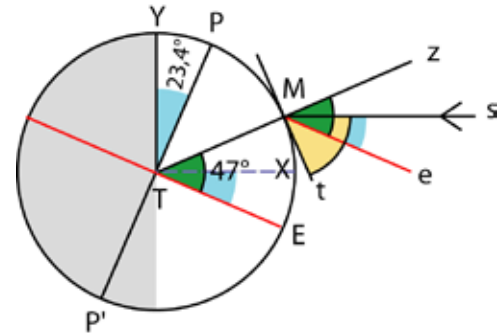


Fig.12. Évolution de la longueur de l'ombre à midi solaire d'un gnomon de 1 m tout au long de l'année à la latitude de 49° N.

Encadré 2

Les calculs

Au solstice d'été à midi



P représente le pôle Nord, T, le centre de la Terre et M est l'observateur à midi.

L'axe de la Terre PP' est incliné de $23,4^\circ$ par rapport à la perpendiculaire au plan de son orbite (TY).

(Ms) représente un rayon lumineux en provenance du Soleil.

[Mz) est la verticale et [Mt) indique l'horizon sud. On cherche la hauteur du Soleil tMs .

PTX est le complémentaire de $PTY = 90^\circ - 23,4^\circ = 66,6^\circ$

ETX est le complémentaire de $PTX = 90^\circ - 66,6^\circ = 23,4^\circ$

NB : PTY et ETX ont des côtés perpendiculaires. On a trouvé qu'ils avaient même mesure.

$$eMs = ETX = 23,4^\circ$$

$$eMz = ETM = 47^\circ$$

$$tMe = 90^\circ - eMz = 90^\circ - 47^\circ = 43^\circ$$

$$tMs = tMe + eMs = 43^\circ + 23,4^\circ = 66,4^\circ$$

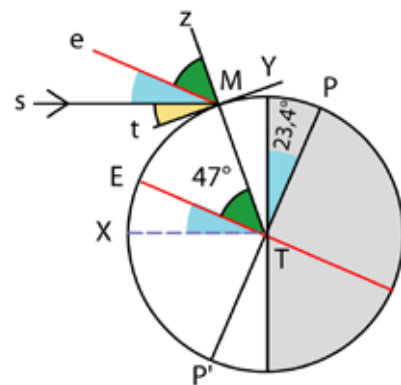
$$L = 1 / \tan(66,4^\circ) = 0,44.$$

On trouve une longueur de 44 cm.

La formule générale pour une latitude φ est :

$$tMs = 90^\circ - \varphi + 23,4^\circ = 113,4^\circ - \varphi$$

Au solstice d'hiver à midi



Les calculs sont identiques pour eMs , eMz et tMe

$$tMs = tMe - eMs = 43^\circ - 23,4^\circ = 19,6^\circ$$

$$L = 1 / \tan(19,6^\circ) = 2,81.$$

La formule générale pour une latitude φ est :

$$tMs = 90^\circ - \varphi - 23,4^\circ = 66,6^\circ - \varphi$$

(d'après le hors-série n° 10 des Cahiers Clairaut, Maths et astronomie).