Compléments

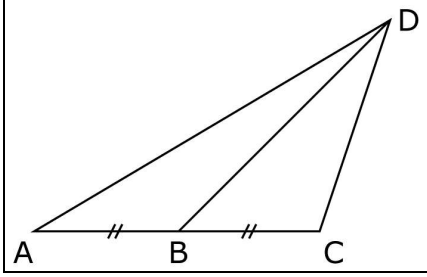
Les 2e et 3e lois de Kepler expliquées par Feynman

Source : *Le Mouvement des planètes autour du Soleil* (cours de Feynman repris par David et Judith Goodstein). Diderot Editeur, Arts et sciences. 1997.

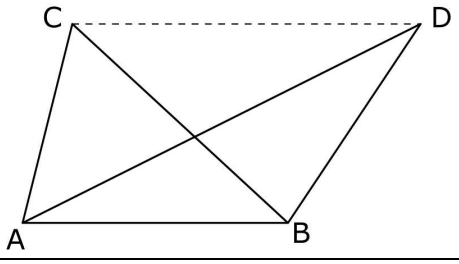
A. La loi des aires (2e loi)

1. Comparer l'aire des triangles suivants

a. ABD et BCD avec AB=BC

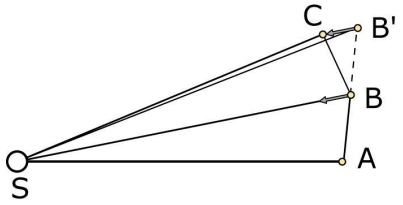


b. ABC et ABD avec (AB)//(CD)



Les aires sont égales. L'aire d'un triangle s'obtient avec la formule (b×h)/2. Dans le premier cas les bases AB et BC sont égales et la hauteur est commune, dans le second cas, la base AB est commune et les hauteurs sont égales.

2. S est le Soleil. Une planète se déplace de A en B pendant une durée Δt.
En l'absence de force, elle continuerait en ligne droite à vitesse constante et se retrouverait en B' après un temps Δt, avec AB = BB'.
Mais en B, la planète est attirée par le Soleil (flèche) et, au lieu d'aller en B', elle se retrouve en C.
On veut comparer les aires des triangles ABS et BCS.
Aire(ABS) = Aire(BB'S) d'après 1a
Aire(BB'S) = Aire(SBC) d'après 1b
donc Aire(ABS) = Aire(SBC)

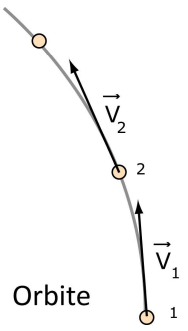


Remarques
La loi des aires vient uniquement du principe d'inertie (AB = BB') et du fait que la force est centripète.
La démonstration de Feynman est calquée sur celle de Newton.

B. La 3e loi de Kepler induit une force en 1/R²

1. Diagramme des vitesses

Feynman utilise à plusieurs reprises un diagramme des vitesses. Pour cela, il trace à partir d'un même point une série de vecteurs vitesses.
$\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont deux vecteurs vitesses, que l'on notera $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$. On a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ ou $\vec{V}_1 + \overrightarrow{AB} = \vec{V}_2$. $\overrightarrow{AB}$ est donc la variation de vitesse, ou $\Delta\vec{V}$ entre les positions 1 et 2 (ou encore l'accélération en divisant par Δt si on passe à la limite).



Orbite

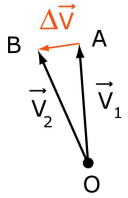


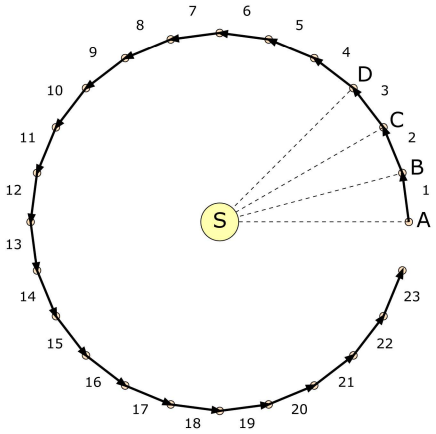
Diagramme des vitesses

2. Force en $1/R^2$

(démonstration pour des orbites circulaires)

On considère une orbite circulaire. La planète est représentée à des intervalles de temps égaux.
SA = SB = SC... donc les changements de vitesse qui dépendent de la distance sont les mêmes donc les vitesses sont égales donc AB = BC...
Dans le diagramme des vitesses, on représente la vitesse en A, B, C... à partir d'un même point.

Sur ce schéma, la planète est représentée toutes les unités de temps. Ainsi, le vecteur défini par deux positions successives de la planète représente le vecteur vitesse (si on n'utilisait pas l'unité de temps, il faudrait changer l'échelle du diagramme des vitesses).



Orbite de la planète

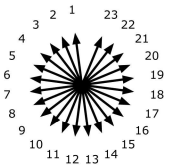


Diagramme des vitesses

R = rayon de l'orbite et T = période

Rayon du diagramme des vitesses R' = AB = BC... = $2\pi R/T$

Circonférence du diagramme des vitesses = $2\pi \times 2\pi R/T = 4\pi^2 R/T$

Accélération = Δv = Circonférence du diagramme des vitesses/T = $4\pi^2 R/T^2$

La 3e loi de Kepler dit que R^3/T^2 = constante donc $T^2 = kR^3$

Accélération = $4\pi^2 R/T^2 = 4\pi^2 R/kR^3 = 4\pi^2/kR^2$

L'accélération donc la force est bien en $1/R^2$