Applications de l'équation de Kepler

Daniel Descout

Complément à l'article du n° 179 page 32

Application de l'équation de Kepler à la sonde Giotto

L'étude qui suit présente les éléments de calcul d'une orbite de transfert de la sonde, elliptique, et proche de l'orbite réelle. Elle se situe dans le plan de l'écliptique, entre la Terre et le nœud descendant de la comète. On suppose, pour simplifier, que Giotto n'y est soumise qu'à l'attraction gravitationnelle du Soleil.

Le but de l'étude est de retrouver la durée du voyage de la sonde Giotto entre la Terre et le point de rencontre avec la comète de Halley.[1]

Données complémentaires sur la comète de Halley, et données sur la sonde Giotto

Le plan orbital de la comète est incliné de 18° environ sur le plan de l'écliptique.

Les nœuds de l'orbite de la comète sont distants du Soleil de 1,805 1 UA (nœud ascendant, N_a, latitude β croissante, atteint le 09 novembre 1985) et de 0,849 2 UA (nœud descendant, N_d, latitude β décroissante, atteint le 10 mars 1986) (https://ssp.imcce.fr/forms/ephemeris).

En alignement avec le Soleil, ils forment la « ligne des nœuds ». Leurs longitudes respectives sont, à une minute d'angle près : λ_a= 58° 39' (N_a) et λ_d = 238° 40' (N_d).

Lors de son plus récent passage « près » du Soleil en 1986, six sondes interplanétaires ont été lancées en direction de la comète de Halley. La sonde européenne (ESA), nommée Giotto, lancée le 03 juillet 1985, a réussi (le 13 mars 1986 après un voyage de 253 jours) à photographier le noyau de la comète, en passant à environ 600 km de distance (avec une vitesse de croisement de l'ordre de 68 km/s). La trajectoire de transfert de la sonde Giotto a été calculée pour optimiser sa consommation de propergols, en particulier en profitant de la vitesse orbitale de la Terre. L'orbite de la sonde a été choisie très proche du plan de l'écliptique, et le croisement avec la comète s'est produit peu après le passage de cette dernière à son nœud descendant, en un point de latitude écliptique compris entre – 1° et – 2°.

La sonde Giotto n'était pas destinée à être détruite au passage à proximité du noyau de la comète de Halley, et une seconde mission lui a été assignée après une hibernation entre 1986 et 1990, pour s'approcher d'une autre comète : P/Grigg-Skjellerup. Une correction de trajectoire par assistance gravitationnelle a été prévue à cet effet, en faisant passer la sonde à proximité de la Terre en juillet 1990.

La longitude écliptique initiale de la sonde est celle de la Terre, prise le 03/07/1985 à 20 h (TU) : $\boldsymbol{\lambda_0 = 281{,}82°}$.
(https://ssp.imcce.fr/forms/ephemeris).
Sa distance initiale au Soleil est notée r_0 (la longueur du rayon SG_0) et vaut : $\boldsymbol{r_0 = 1{,}016\ 7}$ ***UA***.
La longitude écliptique finale de la sonde Giotto est celle du nœud N_d de la comète de Halley : $\boldsymbol{\lambda_1 = 238{,}66°}$.
Sa distance au Soleil lors du croisement est notée r_1 (la longueur du rayon SG_1) et vaut : $\boldsymbol{r_1 = 0{,}849\ 2}$ ***UA***.

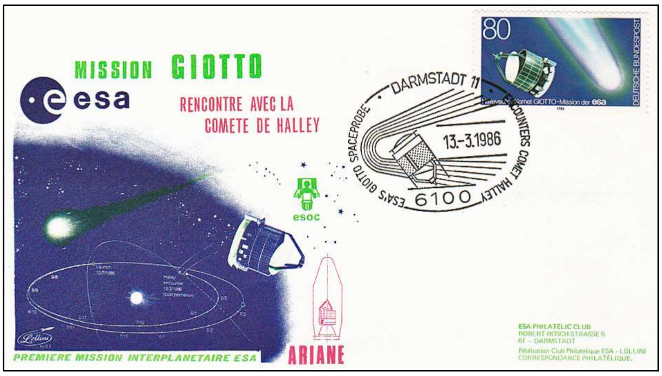

Figure 3

L'étude se déroule en deux étapes. La démarche adoptée est purement géométrique.

La première étape de l'étude consiste à déterminer les éléments de l'orbite elliptique, connaissant l'un de ses foyers (S) et les positions de deux points sur l'ellipse (G_0 et G_1). Cette problématique s'apparente au « problème de Lambert »[2] (1760), mais nous ignorons volontairement la connaissance a priori des dates de début et de fin du voyage. On calculera, dans l'ordre :
- la longueur du demi-grand-axe (a_G) et la position du second foyer (noté F) de l'ellipse ;
- l'excentricité (e_G) de l'ellipse et l'orientation de son grand-axe (SF).

La seconde étape de l'étude conduit à déterminer l'inconnue, la durée du voyage de G_0 et G_1 (notée τ), par application de l'équation de Kepler. Pour cela, nous calculerons successivement :
- les angles polaires (s_0 et s_1) et les anomalies excentriques (E_0 et E_1) des points G_0 et G_1 ;
- les instants de passage de la sonde en ces points, avec origine des temps au passage par le périhélie.

1 On trouve une représentation de la trajectoire de la sonde Giotto, ainsi que de nombreuses données sur sa mission, sur le site : http://www.capcomespace.net/dossiers/espace_europeen/ariane/1984-87/1986_giotto.htm

2 https://fr.wikipedia.org/wiki/Orbitographie

Détermination du lieu des seconds foyers de l'ellipse

Sur la figure 4, l'axe des équinoxes (Sγ) est tel que l'angle ($G_0S\gamma$) vaut $2\pi - \lambda_0$.

Détermination de la longueur $d = G_0G_1$ et des angles en G_0 et G_1 du triangle SG_0G_1

Dans ce triangle nous connaissons la longueur des côtés : $SG_0 = r_0$, et $SG_1 = r_1$, ainsi que l'angle au sommet S. L'angle (G_0SG_1) vaut : $\boldsymbol{\lambda_0 - \lambda_1 = 43{,}16°}$ (noté s). Le triangle est donc parfaitement déterminé. Par le théorème d'al Kashi, nous en déduisons la longueur du troisième côté :

$d^2 = r_0^2 + r_1^2 - 2.r_0.r_1.\cos(s)$;

donc : $G_0G_1 = \boldsymbol{d = 0{,}703\ 7\ UA}$.

En appliquant une autre fois le même théorème, nous calculons l'angle au sommet G_0 du triangle : soit ***angle*** $\boldsymbol{(SG_0G_1) = 55{,}63°}$ (noté α_0). Puis l'***angle*** $\boldsymbol{(SG_1G_0)}$: $\boldsymbol{\alpha_1 = 81{,}21°}$ (puisque $\alpha_1 = 180° - s - \alpha_0$).

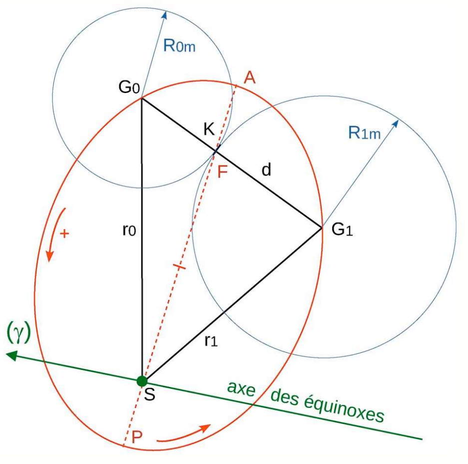

Figure 4

Recherche du second foyer de l'ellipse trajectoire de Giotto

L'ellipse est l'ensemble des points du plan tels que la somme de leurs distances aux foyers est constante. Cette constante est la longueur du grand-axe de l'ellipse (soit $2.a_G$).

Pour le point G_0 : $SG_0 + FG_0 = 2.a_G$;

ou $G_0F = 2.a_G - r_0$;

donc le point F est situé sur le cercle de centre G_0 et de rayon $R_0 = 2.a_G - r_0$.

Pour le point G_1 : $SG_1 + FG_1 = 2.a_G$;

ou $G_1F = 2.a_G - r_1$;

donc le point F est situé sur le cercle de centre G_1 et de rayon $R_1 = 2.a_G - r_1$.

Le point F est donc à l'intersection des deux cercles définis ci-dessus.

Si $R_0 + R_1 = d$, les cercles sont tangents (figure 4). Ils le sont au point K du segment G_0G_1, point tel que

$KG_0 = R_{0m} = (d - r_0 + r_1)/2 = 0{,}268\ 1$ UA, et

$KG_1 = R_{1m} = (d + r_0 - r_1)/2 = 0{,}435\ 6$ UA.

La différence $R_1 - R_0$ est une constante (qui vaut $r_0 - r_1 = 0{,}167\ 5$ UA) indépendante de a_G.

Donc, ***pour l'ensemble des valeurs possibles de a_G, les deux seconds foyers possibles (F ou F') se situent sur la branche d'hyperbole (notée ⫲ , figure 5, « lieu des seconds foyers ») de foyers G_0 et G_1 et de sommet K.***

La figure 4 représente l'ellipse (tracé rouge) de foyers S et K, et passant par les points G_0 et G_1.

La sonde Giotto est repassée à proximité de la Terre le 2 juillet 1990, soit 5 ans après son lancement (à un jour près). L'hypothèse d'une orbite de la sonde en résonance 5/6 avec celle de la Terre est confirmée par la donnée de sa période orbitale (304,6 jours [3]).

La sonde a ainsi parcouru 6 orbites pendant que la Terre en a bouclé 5. La période orbitale de Giotto que nous retenons est : $\boldsymbol{T_G = 304{,}375}$ ***jours*** (365,25 × 5/6).

Première étape

Avec la troisième loi de Kepler, nous déterminons le demi-grand-axe a_G de l'ellipse :

$a_G^3/T_G^2 = 1$ avec $T_G = 0{,}833\ 33$ an

d'où $\boldsymbol{a_G = 0{,}885\ 55\ UA}$.

<u>*Détermination du second foyer (F) de l'ellipse recherchée (méthode géométrique)*</u>

Le point F est situé sur le cercle de centre G_0 et de rayon $R_0 = 2.a_G - r_0$.

Numériquement, $R_0 = 0{,}754\ 4$ UA.

Le point F est situé sur le cercle de centre G_1 et de rayon $R_1 = 2.a_G - r_1$.

Numériquement, $R_1 = 0{,}921\ 9$ UA.

Le point F est donc à l'intersection des deux cercles définis ci-dessus. Comme $R_1 - R_0 < d < R_1 + R_0$, les deux cercles ont deux points communs (notés F et F') tels que G_0G_1 est la médiatrice de [FF']. Soit F le foyer situé dans le demi-plan de bord la droite (G_0G_1) et contenant S, et F' le foyer situé dans l'autre demi-plan. Il est possible de montrer que l'ellipse de foyers S et F', si elle était choisie comme orbite de transfert de la sonde Giotto, serait très coûteuse en ergols. Nous ne retenons donc que F comme second foyer.

<u>*Détermination de l'excentricité de l'ellipse recherchée*</u>

La figure 5 donne la position du second foyer F de l'ellipse trajectoire de Giotto. Il est situé à l'une des intersections des cercles de centres G_0 et G_1 et de rayons respectifs R_0 et R_1 . F est aussi situé sur la branche d'hyperbole (⫲) définie dans l'encadré 4 (« lieu des seconds foyers », en bleu sur la figure 5).

L'orbite de Giotto est en rouge et celle de la Terre en violet.

Pour calculer la distance focale de l'ellipse (soit $SF = 2.c_G$), nous appliquons les relations métriques dans le quadrilatère G_0G_1SF, dont les longueurs des diagonales et de 3 côtés sont connues. Dans le triangle FG_0G_1, nous déterminons l'angle au sommet G_0, noté φ.

3 https://fr.wikipedia.org/wiki/Giotto_(sonde_spatiale)

$\cos\varphi = (R_0^2 + d^2 - R_1^2)/(2.d.R_0) = 0{,}201\ 9$;
et $\varphi = 78{,}35°$.
On en déduit l'angle au sommet G_0 (noté γ) dans le triangle SG_0F :
$\gamma = \varphi - \alpha_0 = 22{,}72°$. Et on en déduit la longueur du segment [SF] :
$SF^2 = R_0^2 + r_0^2 - 2.R_0.r_0.\cos\gamma$.
Donc $SF = 2.c_G = 0{,}433\ 4$ UA.
Et finalement l'excentricité de l'ellipse :
$c_G/a_G = \boldsymbol{e_G = 0{,}244\ 7}$.
On calcule aussi les valeurs extrêmes de la distance de la sonde (G) au foyer S.
Au périhélie : $SP = r_{min} = a_G - c_G = 0{,}668\ 8$ UA ;
et à l'aphélie : $SA = r_{max} = a_G + c_G = 1{,}102\ 3$ UA .

Détermination de l'orientation de l'axe des apsides de l'ellipse

Dans le triangle FSG_0, on détermine l'angle au sommet S (noté ξ) :
$\cos\xi = ((2.c_G)^2 + r_0^2 - R_0^2)/(4.c_G.r_0) = 0{,}740\ 2$.
Donc : $\boldsymbol{\xi = 42{,}25°}$.

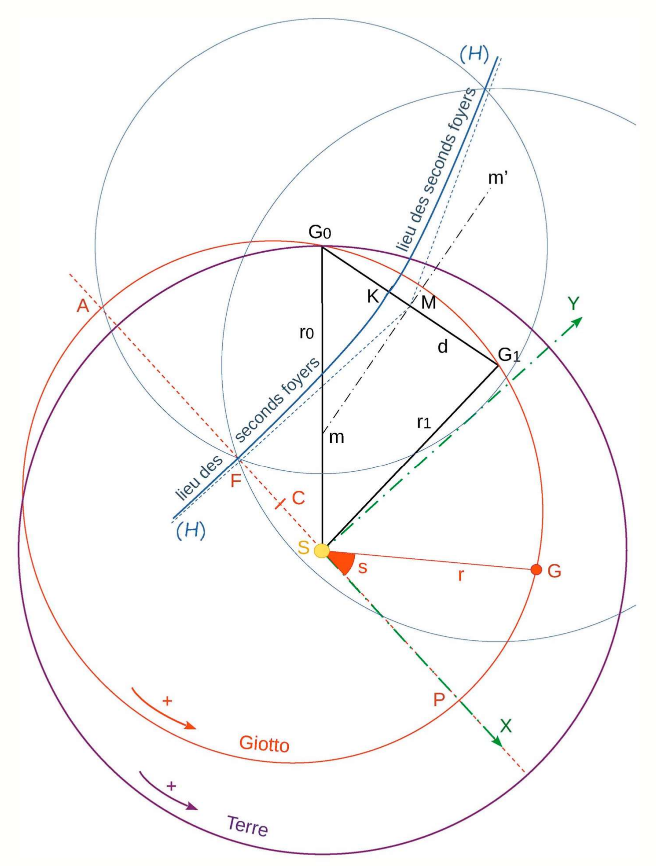

Figure 5

Seconde étape

L'axe des apsides AFSP (noté SX) de l'ellipse est choisi comme axe des coordonnées polaires du plan, avec origine en S (figure 5). Les points G_0 et G_1 ont pour coordonnées (r_0, s_0) et (r_1, s_1) respectivement.
Le calcul de s_0 et s_1 donne :
$\boldsymbol{s_0 = 180° - \xi = 137{,}75°\ ;\ s_1 = s_0 - s = 94{,}59°}$

Détermination des anomalies excentriques (E_0 et E_1) des points G_0 et G_1

On utilise la relation entre E et s (voir les rappels dans l'encadré 1 de l'article du n° 179 page 32) :
$\tan(E/2) = (1/\varepsilon_G).\tan(s/2)$,
avec $\varepsilon_G = \sqrt{(1 + e_G)/(1 - e_G)} = 1{,}283\ 8$.
Donc : $\boldsymbol{E_0 = 127{,}24°}$ et $\boldsymbol{E_1 = 80{,}33°}$.

Application de l'équation de Kepler et calcul de la durée du voyage

$E - e_G.\sin(E) = M(t) = 2\pi.t/T_G$, avec $t = 0$ pour le passage de la sonde Giotto au périhélie P.
La durée du trajet PG_0 (sens direct) est notée t_0 $(0 < t_0 < T_G/2)$ telle que : $E_0 - e_G.\sin(E_0) = 2\pi.t_0/T_G$.
Avec la valeur calculée précédemment pour E_0, on trouve : $t_0 = 98{,}14$ jours.
De la même manière, pour la durée t_1 du trajet PG_1 , on obtient $t_1 = 56{,}23$ jours.
La durée (notée τ) du trajet de G_0 à G_1 en passant par A et P (sens direct) est égale à une période orbitale (T_G) diminuée de la durée du trajet direct de G_1 à G_0.
Donc : $\boldsymbol{\tau = T_G - (t_0 - t_1) = 262{,}47}$ ***jours***
(à comparer aux 250 jours qui séparent le 03/07/1985 du 10/03/1986).

Critique de l'étude

En début de voyage, la sonde reste sous la double influence gravitationnelle de la Terre et du Soleil (problème à trois corps). L'évaluation de la modification de la durée du voyage induite par la traversée de la zone d'influence de la Terre (assimilable à sa sphère de Hill, de rayon proche de 0,01 UA) sort du cadre de cet article.

Le prochain passage au périhélie de la comète de Halley est annoncé pour l'année 2061. Une évaluation plus précise de la date de son retour nécessite la prise en compte des attractions gravitationnelles des planètes majeures du Système solaire (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune), qui perturbent la trajectoire de la comète. Ce très long travail avait été fait en 1757 et 1758 par Alexis Clairaut, Jérôme de Lalande et Nicole-Reine Lepaute (à une époque où les planètes Uranus et Neptune n'étaient pas encore connues). Ce qui leur avait permis d'annoncer avec une précision d'un mois le retour de la comète pour avril 1759, retour prédit par Edmond Halley en 1705.

■