Démonstration de la méthode « 11 sur impair »

La méthode « 11 sur impair » permet de calculer très rapidement l'écart entre le clavedi ou jour de semaine caractéristique d'une année quelconque et celui de l'année de siècle immédiatement inférieure. On peut ainsi, connaissant l'année de base du siècle, calculer le clavedi de n'importe quelle année dans le siècle.

Soit A la partie infraséculaire d'une année ($0 \leq A < 100$) et E l'écart de clavedi. On sait que, modulo 7, l'écart de clavedi augmente de 1 chaque année, et d'une unité supplémentaire chaque année bissextile :

$$E = (A + A\ div\ 4)\ mod\ 7$$

La méthode « 11 sur impair » consiste à rechercher A' puis A'' de la manière indiquée infra, et postule que E est congru à $-A''$ modulo 7, c'est-à-dire que $A + A\ div\ 4 + A''$ est multiple de 7. C'est ce que nous allons démontrer.

Commençons par décomposer A partiellement en base 4, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &A = 4f + 2g + h \\ &\text{avec } 0 \leq f < 25, 0 \leq g < 2, 0 \leq h < 2 \end{aligned}$$

Observons ce que représente f et h :

$$f = A\ div\ 4$$

$$h = A\ mod\ 2$$

Les valeurs A' et A'' de la méthode « 11 sur impair » peuvent être exprimées en fonction de f, g, h. Exprimons d'abord A' :

$$\begin{aligned} A' &= (A + 11 \times A\ mod\ 2)\ div\ 2 \\ &= (4f + 2g + (1 + 11)h)\ div\ 2 \\ &= 2f + g + 6h \end{aligned}$$

Observons ici que

$$g = A'\ mod\ 2$$

Calculons A'' :

$$\begin{aligned} A'' &= A' + 11 \times A' mod\ 2 \\ &= 2f + (1 + 11)g + 6h \\ &= 2f + 12g + 6h \end{aligned}$$

Calculons enfin $A + A\ div\ 4 + A''$:

$$\begin{aligned} &= 4f + 2g + h + f + 2f + 12g + 6h \\ &= 7f + 14g + 7h = 7(f + 2g + h) \end{aligned}$$

Cette expression est bien un multiple de 7, CQFD.

La démonstration originale de l'article de Fong et Walters procède par l'étude des différents cas de congruité de A modulo 4, ce qui n'est pas nécessaire.