

Calculer la distance focale d'un système optique

Dominique Boust, Président et le fondateur du Groupe Astronomique de Querqueville (Banlieue de Cherbourg)

Une série de manipulations simples avec les instruments courants dans les clubs astronomiques : appareils photos numériques ou caméras CCD. L'article décrit des méthodes permettant de mesurer la distance focale d'une lunette à partir de la distance entre deux étoiles ou à partir d'images planétaires.

Dans cet article, nous nous proposons de présenter quelques méthodes pour calculer l'échelle des images réalisées avec des capteurs numériques (APN, caméras CCD) associés à des objectifs photographiques ou des télescopes ou lunettes astronomiques. L'échelle de l'image est la grandeur qui relie un angle mesuré sur le ciel (exprimé en degrés, minutes ou secondes, par exemple) à son équivalent linéaire sur le capteur (exprimé en mm ou μm , par exemple) ; l'échelle de l'image s'exprime en $^{\circ}/\text{mm}$, par exemple. Cela revient donc à déterminer avec quelle focale une image a été réalisée.

Paramètres descriptifs des systèmes optiques utilisés en astronomie

Les instruments ou les montages optiques mis en œuvre pour observer les objets célestes peuvent être caractérisés simplement par deux grandeurs :

- **le diamètre (D)** : c'est-à-dire le diamètre de la pièce optique qui regarde vers le ciel (lentille simple ou système complexe dans le cas d'une lunette ou d'un téléobjectif ; miroir concave dans le cas d'un télescope ou de certains téléobjectifs). Le diamètre d'un instrument détermine son pouvoir collecteur (sa capacité à faire parvenir une certaine quantité de lumière vers l'œil de l'observateur ou vers le capteur) et son pouvoir séparateur (sa capacité à permettre de distinguer des détails). En photographie,

on peut limiter la quantité de lumière parvenant jusqu'au capteur en réduisant le diamètre utile par un diaphragme ;

- **la focale (F)** : c'est la distance qui sépare le centre du système optique de son foyer, c'est-à-dire du lieu où se forme l'image d'un objet situé à l'infini ; la taille de l'image produite par le système optique ne dépend que de sa focale. La connaissance de la focale permet de relier la dimension apparente d'un objet sur le ciel à sa taille linéaire sur le capteur. La focale nominale d'un montage optique peut être modulée par différents systèmes réducteurs ou amplificateurs ou le tirage (télescopes Schmidt-Cassegrain). Elle peut alors être appelée *focale résultante*.

On appelle rapport d'ouverture, le rapport F/D ; en photographie, il est communément et improprement appelé *diaphragme*.

Quelques rappels d'optique géométrique

Dans un système optique simple, la focale F est donnée par la formule ci-dessous où x est la taille de l'image produite au foyer et α l'angle sous-tendu sur le ciel :

$$F = x / \tan \alpha \quad (1)$$

Le schéma ci-dessous (figure 1) permet de comprendre pourquoi.

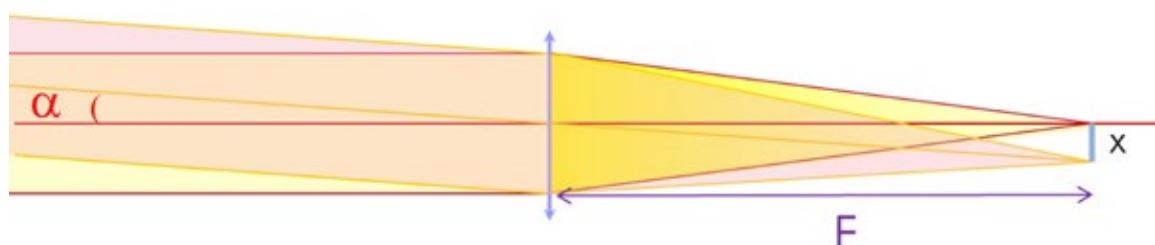


Fig.1. Production d'une image de taille x d'un objet situé à l'infini, sous-tendant un arc α sur le ciel, par une lentille simple de focale F . Rappelons que les rayons lumineux passant par le centre de la lentille ne sont pas déviés.

On pourrait penser que la focale d'un objectif, d'une lunette et d'un télescope est une valeur connue avec précision ; en fait, il n'en est rien. En voici quelques exemples :

- la focale réelle d'un objectif photographique n'est pas forcément celle affichée ;
- la focale d'un zoom photographique est variable de sorte qu'il n'est pas aisément connue la valeur précise pour une prise de vue spécifique ;
- la focale réelle d'une lunette ou d'un télescope n'est pas nécessairement celle affichée sur le tube ;
- la focale réelle d'une lunette ou d'un télescope peut être modifiée par l'utilisation de systèmes optiques qui l'augmentent (lentille de Barlow) ou la réduisent (réducteur de focale) ;
- la focale réelle d'un télescope de type Schmidt-Cassegrain ou Ritchey-Chrétien dépend de la distance entre les miroirs primaire et secondaire. Dans la plupart des télescopes du commerce, la mise au point se fait par déplacement du miroir primaire, ce qui se traduit donc par une variation de la distance focale. Dans ces télescopes, une image nette peut être obtenue pour des tirages très différents, donc avec des focales résultantes différentes (cf. annexe).

La formule (1) montre que pour connaître la focale, il faut être capable de :

1. déterminer la taille x (en mm, par exemple) d'un objet (Lune, écart entre deux étoiles) sur une image numérique ;
2. calculer α (en degrés décimaux, par exemple) d'après des données connues. Ces étapes font l'objet des deux sections suivantes.

Déterminer la taille d'un objet sur une image numérique

Une image numérique est composée de pixels rangés en lignes et colonnes (matrice) ; chaque pixel est caractérisé par ses coordonnées dans la matrice et sa valeur qui dépend de la quantité de lumière qu'il a reçue. De nombreux logiciels permettent d'avoir accès aux coordonnées des pixels d'une image. La taille x d'un objet sur l'image est donc donnée par la formule suivante :

$$x = p \times N$$

où p est la taille d'un pixel (c'est une donnée constructeur par exemple $3,7 \mu\text{m}$) et N , le nombre de pixels entre deux points : diamètre lunaire, écart entre deux étoiles...

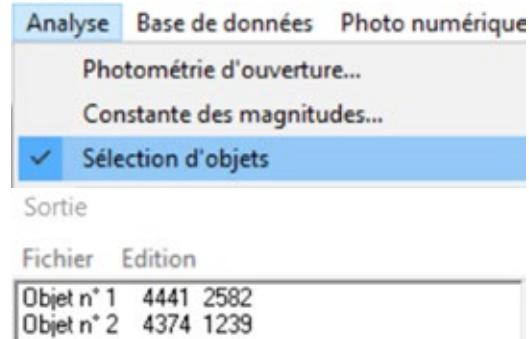
Pour mesurer N , on peut faire la différence entre les coordonnées x_1 et x_2 de deux points situés sur une même horizontale, ou entre les coordonnées y_1 et y_2

de deux points situés sur une même verticale. Dans le cas le plus général, le nombre de pixels N recherché sera donné par la formule suivante :

$$N = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Pour les images à grand champ, on préférera faire la mesure près du centre de l'image pour éviter les problèmes de distorsion qui ne sont pas traités ici. Tout dépend de la précision recherchée.

Sous Iris, on peut facilement mesurer les coordonnées d'un point en utilisant l'onglet Analyse, puis en cochant Sélection d'objets ; en cliquant sur les points à mesurer, Iris génère un fichier de Sortie qu'on peut enregistrer (Onglet Fichier) qui contient les coordonnées x et y des objets pointés sur l'image.



Cas particulier : déterminer le diamètre de la Lune en pixels

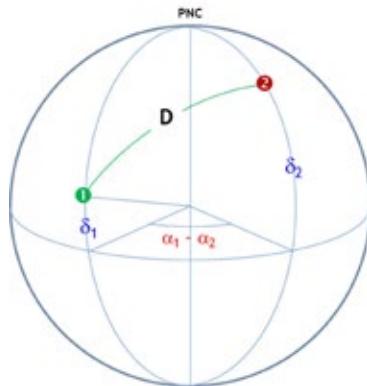
La commande CIRCLE [SEUIL] d'Iris permet de générer un cercle dont le programme renvoie les coordonnées du centre et le rayon. La valeur [SEUIL] est affinée jusqu'à ce que le cercle calculé passe au mieux par les contours de l'objet, comme sur l'image ci-dessous. La valeur du rayon conduit à un diamètre de 505 pixels ; la taille du pixel étant de $3,7 \mu\text{m}$, on obtient la taille de la Lune sur le capteur, soit $1,868 \text{ mm}$. Cette méthode vaut aussi pour les disques planétaires.



Commande	
>circle 100	
>	
Sortie	
Fichier	Edition
X = 3008.62	Y = 1935.54
R = 252.46	

Calculer l'angle sous-tendu sur le ciel

Dans le cas le plus général, il s'agit de déterminer l'angle D qui sépare deux étoiles connaissant leurs coordonnées équatoriales : l'ascension droite α (équivalent à la longitude sur Terre) et la déclinaison δ (correspondant à la latitude sur Terre). Le schéma ci-dessous définit les éléments utiles au calcul dans un système de coordonnées célestes équatoriales : les étoiles 1 et 2, séparées par l'angle D , ont pour coordonnées respectives (α_1, δ_1) et (α_2, δ_2) . PNC est le pôle Nord céleste.



L'angle D recherché est donné par la formule suivante :

$$D = \arccos(\sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2))$$

Il faut bien sûr mettre toutes les valeurs dans la même unité, typiquement en degrés décimaux (format DD.ddd). Les ascensions droites sont habituellement données en heures, minutes, secondes ; il convient donc de les convertir (format HH.hhh puis DD.ddd).

Attention, sous Excel, les formules trigonométriques fonctionnent avec des radians (format RR.rrr). Voici un exemple numérique réalisé sous Excel.

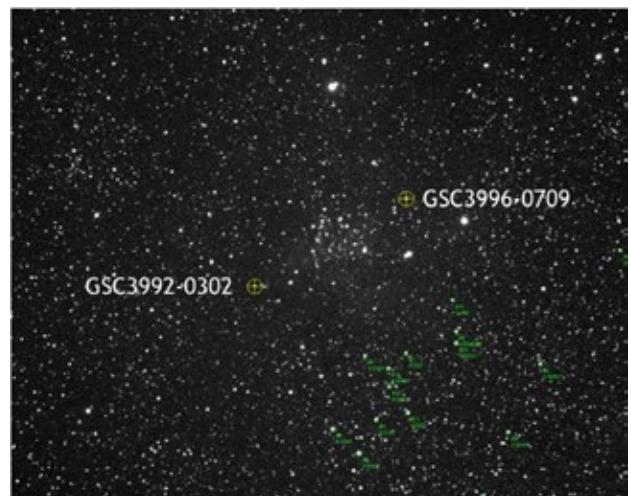
Ascension droite					
	h	m	s	HH.hhh	DD.ddd
Etoile 1	5	26	18	5,438	81,6
Etoile 2	4	56	60	4,950	74,2
Déclinaison					
	°	'	"	DD.ddd	RR.rrr
Etoile 1	28	36	27	28,608	0,499
Etoile 2	33	9	58	33,166	0,579

Distance Etoile 1 - Etoile 2

7,761 ou 7° 45' 40"

Calcul de la distance focale d'une lunette à partir de la distance de deux étoiles

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer la distance focale de l'instrument avec lequel a été réalisée une image numérique. Voici une image de l'amas NGC7380 dans la constellation de Céphée ; elle a été réalisée avec une lunette de 80 mm de diamètre et de 480 mm de focale, équipée d'une caméra ATIK460ex en binning 2×2. La taille des pixels de cette caméra est de 4,54 μm.



On y a repéré deux étoiles dont on a récupéré les coordonnées sur un logiciel de cartographie céleste qui ont été reportées dans le tableau ci-dessous.

	AD				DEC			
	hh	mm	ss	°	dd	mm	ss	°
GSC3996-0709	22	46	6,21	341,526	58	12	23,62	58,207
GSC3992-0302	22	48	55,6	342,232	58	0	27,97	58,008

Ces valeurs conduisent à une distance entre les deux étoiles de $0,423^\circ$ ou $1521''$. Cette donnée peut aussi être obtenue à partir d'un logiciel de carte du ciel, bien sûr. Connaissant la taille du pixel (qu'il faut multiplier par 2 puisque l'image a été faite en binning 2×2), on peut obtenir la distance entre les deux étoiles qui est de 3,534 mm. Avec ces valeurs, on peut calculer une distance focale de 479 mm, ce qui est vraiment conforme avec la valeur annoncée par le constructeur. L'échelle de l'image est de $3,91''/\text{pixel}$; c'est aussi l'échantillonnage de l'image. D'autres mesures faites sur la même image conduisent à estimer l'incertitude à environ ± 1 mm. Dans le cas des images planétaires (Soleil, Lune, planètes), on peut suivre une démarche analogue illustrée dans les exemples qui suivent.

On peut aussi signaler le site nova.astrometry.net qui donne l'échantillonnage à partir de l'ensemble d'une image.

Calcul de la distance focale à partir d'images planétaires

Image du disque lunaire

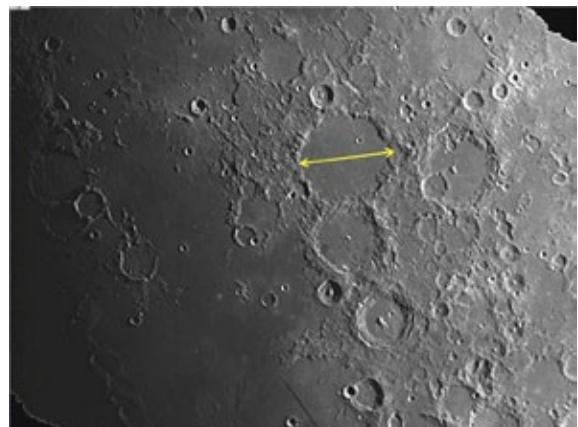


L'image ci-dessus a été réalisée avec un télescope de 200 mm de focale, le 18/10/2020 à 16 h 28 TU. Le diamètre apparent de Lune était alors de $2002,3''$. Le diamètre de la Lune, déterminé comme précédemment exposé (nombre de pixels \times taille du pixel) y est de 1,87 mm. Ces données conduisent à une focale de 192,5 mm. D'autres mesures ont confirmé cette valeur sensiblement différente de celle attendue.

Image d'un cratère lunaire

L'image de la Lune qui suit a été réalisée avec une caméra DMK31 (pixels de $4,65 \mu\text{m}$) à la focale d'un télescope Schmidt-Cassegrain de 203 mm de diamètre, équipé d'un porte-oculaire JCD, le 01/05/2020 à 19 h 26 TU. La taille du cratère Ptolémée (double flèche sur l'image) sur le capteur,

déterminée comme précédemment exposé est de 178,5 pixels, soit $830 \mu\text{m}$. La distance de la Lune (calculée en coordonnées topocentriques pour Paris¹) est de 367 058 km. Dans la mesure où le cratère utilisé est proche du centre du disque lunaire, on pourra se contenter de retrancher de la distance Terre-Lune, le rayon de la Lune pour déterminer la distance réelle du cratère. Comme le cratère Ptolémée fait 153 km de diamètre, on peut en déduire son diamètre apparent, soit $86,4''$. Ces données conduisent à une focale de 1 982 mm. Si l'on n'avait pas retranché le rayon lunaire de la distance Terre-Lune (cas d'un cratère mesuré sur le limbe), on aurait trouvé une focale de 1 991 mm.



Autres mesures sur des cratères lunaires

D'autres mesures réalisées avec un télescope de Schmidt-Cassegrain et différentes combinaisons conduisent à des focales sensiblement différentes de celles attendues (1 639 mm au lieu de 1 200 mm avec un réducteur $\times 0,6$; 4 404 mm au lieu de 4 000 mm avec une Barlow $\times 2$) comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

Combinaison optique	Focale résultante
Meade 203 mm + porte-oculaire JCD + réducteur $\times 0,6$ + DMK31	1 639 mm
Meade 203 mm + porte-oculaire JCD + Barlow $\times 2$ + DMK31	4 404 mm

Attention, si l'on veut retrouver la même focale d'une fois à l'autre, il ne faut absolument pas manipuler la molette de mise au point du télescope Schmidt-Cassegrain.

Conclusion

Nous avons vu que la distance focale (ou la distance focale résultante) d'un système optique, aussi

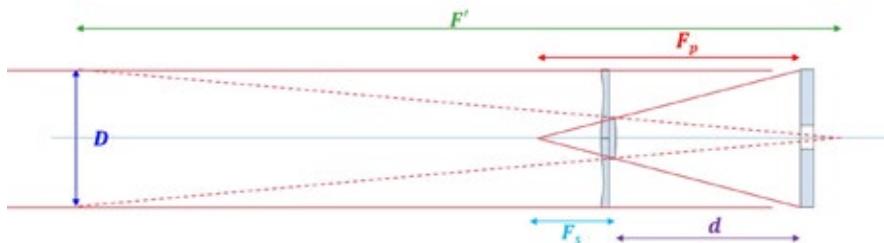
¹ <http://vo.imcce.fr/webservices/miriade/?for ms>

complexe soit-il (objectifs photographiques, lunettes, télescopes et leurs combinaisons optiques associées), produisant une image réelle d'un objet donné situé à l'infini, est le seul paramètre instrumental qui détermine la taille de l'image ainsi produite au foyer dudit système optique. La détermination de

la focale permet bien sûr de connaître l'échelle de l'image et donc d'y opérer toutes sortes de mesures astrométriques. Elle permet aussi de connaître le champ apparent couvert par un capteur donné : appareil photographique numérique ou caméra...

Annexe. Calcul de la focale résultante d'un télescope Schmidt-Cassegrain

Le schéma optique ci-dessous fournit les caractéristiques des éléments constitutifs d'un télescope Schmidt-Cassegrain et les valeurs utiles au calcul.



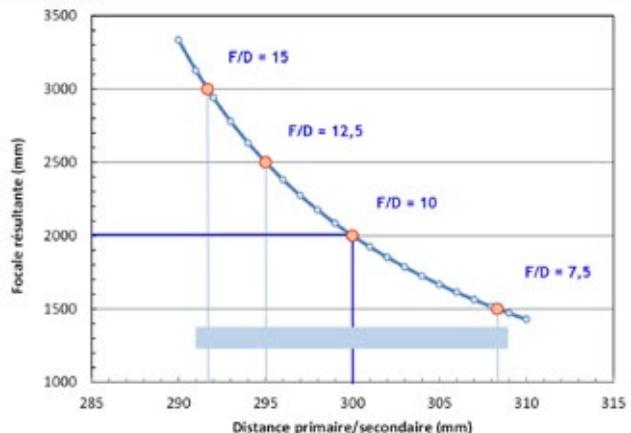
F_p et D : focale et diamètre du miroir primaire ;
 F_s : focale du miroir secondaire (valeur négative car ce miroir est divergent) ;
 d : distance entre le miroir primaire et le miroir secondaire ;
 F' : focale résultante du système.

Par exemple, pour un Schmidt-Cassegrain de diamètre 200 mm, en prenant les valeurs suivantes :

$F_p = 400$ mm ; $d = 300$ mm ; $F_s = -125$ mm, on obtient une focale résultante $F' = 2\ 000$ mm ($F'/D = 10$; valeur annoncée par le constructeur), en appliquant cette formule :

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{F_p} + \frac{1}{F_s} - \frac{d}{F_p \cdot F_s}$$

Elle permet d'explorer la gamme des focales résultantes qui peuvent être obtenues en faisant varier la distance entre les miroirs primaire et secondaire. Sur le graphe ci-dessous, on a représenté la focale résultante, F' en fonction de la distance primaire secondaire, d . Y figurent également les rapports d'ouverture obtenus avec les focales résultantes 1 500, 2 000, 2 500, 3 000 mm. Les segments bleus matérialisent la configuration nominale ($D = 200$ mm et $F' = 2\ 000$ mm). La barre bleu ciel représente la gamme des valeurs de d accessibles. On voit que la focale résultante varie de 1 500 à 3 000 mm pour des variations de la distance primaire secondaire relativement modestes, soit entre 308,6 et 291,7 mm. Les accessoires ajoutés derrière le télescope (porte-oculaire Crayford motorisé, roue à filtres, réducteur de focale, système d'autoguidage hors axe) conduisent nécessairement à augmenter le tirage et donc la focale résultante.



On pourra voir à ce sujet l'excellent article de Michel Vampouille sur la mise au point du télescope de Schmidt-Cassegrain sur le site de la Société d'astronomie populaire de Limoges².

² <https://saplimoges.fr/variation-de-la-focale-d-un-schmidt-cassegrain-avec-la-mise-au-point/>