Détermination de la distance d'un satellite artificiel par la mesure de sa vitesse angulaire apparente

Pascal Descamps – IMCCE – Observatoire de Paris

Résolution du problème simplifié pour des observations proches du zénith

Imaginons que pendant un intervalle de temps ΔT nous puissions mesurer l'angle apparent parcouru sur le ciel, soit θ_O. Désignons par θ_C l'angle apparent parcouru pendant le même intervalle de temps mais vu depuis le centre de la Terre (figure 1). Nous obtenons alors les vitesses angulaires apparentes suivantes :

$$\omega_O = \frac{\theta_O}{\Delta T}$$
$$\omega_C = \frac{\theta_C}{\Delta T} \qquad (1.1)$$

Soit d la distance du satellite à l'observateur, c'est la quantité que l'on cherche à déterminer par la mesure. Soit R_T le rayon moyen de la Terre et r la distance du satellite au centre de la Terre. L'équation fondamentale qui va nous permettre de résoudre le problème provient de la troisième loi de Kepler qui régit le mouvement des corps célestes. Elle s'écrit de la façon suivante dans le cas où l'on néglige la masse du satellite artificiel devant celle de la Terre M_T :

$$\omega_C^2 r^3 = GM_T \qquad (1.2)$$

Où G est la constante de la gravitation universelle.

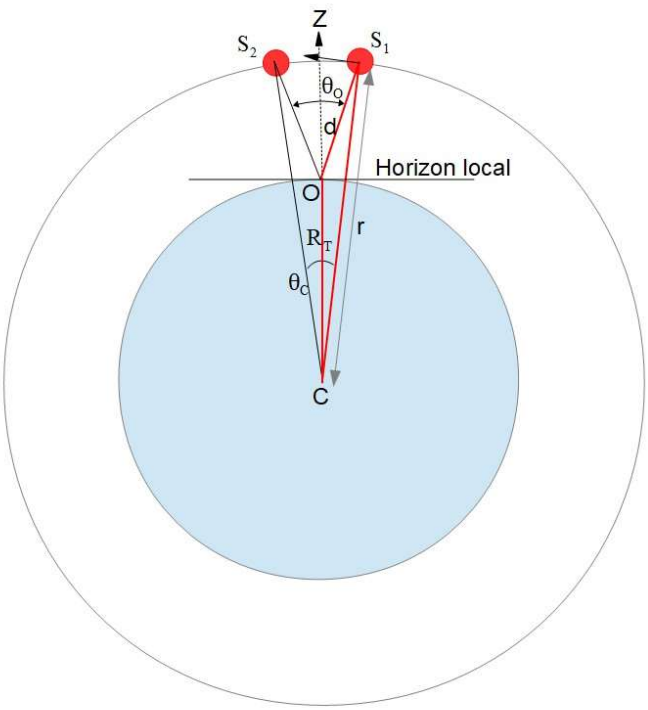

Fig.1 : Géométrie simplifiée du déplacement d'un satellite artificiel entre deux positions S_1 et S_2.

Considérons tout d'abord le triangle OCS_1. Dans ce triangle nous pouvons écrire la règle des sinus :

$$\frac{\sin \theta_C/2}{d} = \frac{\sin \theta_O/2}{r} \qquad (1.3)$$

Nous supposerons maintenant que les angles parcourus durant l'intervalle de temps ΔT sont petits, de sorte que l'on ait θ_C et θ_O très petits devant 1. L'équation (1.3) peut alors s'écrire :

$$\frac{\theta_C}{d} \approx \frac{\theta_O}{r} \qquad (1.4)$$

À partir des relations (1.1) et (1.4), nous pouvons écrire la vitesse longitudinale v du satellite le long de son orbite :

$$v = r\omega_C = r\frac{\theta_C}{\Delta T} \approx d\frac{\theta_O}{\Delta T} = d\omega_O \qquad (1.5)$$

Injectons cette relation dans l'équation de Kepler (1.2) de façon à faire apparaître la distance d que l'on cherche à déterminer, on obtient ainsi :

$$\omega_O^2 d^2 r = GM_T \qquad (1.6)$$

Si l'on observe le mouvement du satellite au voisinage du zénith, on a l'approximation $r \approx R_T + d$. L'équation (1.6) devient alors :

$$\left(R_T + d\right) d^2 \omega_O^2 = GM_T \qquad (1.7)$$

Qui est l'équation fondamentale en d qu'il nous faut résoudre à partir de la connaissance de la vitesse angulaire ω_O obtenue par l'observation. Pour sa résolution, nous allons faire l'hypothèse supplémentaire que r est très petit devant R_T, ce qui est généralement le cas pour les satellites artificiels de la Terre qui sont situés tout au plus à 1 000 km d'altitude pour un rayon terrestre R_T = 6 371 km. L'équation (1.7) peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$R_T d^2 \omega_O^2 = \frac{GM_T}{\left(1 + \dfrac{d}{R_T}\right)} \approx GM_T\left(1 - \frac{d}{R_T}\right) \qquad (1.8)$$

Appelons V la quantité suivante qui est équivalente à une vitesse : $V = \sqrt{\dfrac{GM_T}{R_T}}$

Avec G = 6,674 08 10^{-11} $m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$, M_T = 5,973 42 10^{24} kg, on obtient V = 7,910 5 km/s. L'équation (1.8) peut alors s'écrire sous la forme d'une équation du second degré :

$$d^2 + \frac{V^2}{R_T \omega_O^2} d - \frac{V^2}{\omega_O^2} = 0 \qquad (1.9)$$

Dont le déterminant vaut $\Delta = \dfrac{4V^2}{\omega_O^2}\left[1 + \dfrac{V^2}{4R_T^2\omega_O^2}\right]$

Le second terme de l'expression entre crochets est lui-même petit devant 1. La seule solution acceptable de cette équation est :

$$d = -\frac{V^2}{2R_T\omega_O^2} + \frac{V}{\omega_O}\sqrt{1+\frac{V^2}{4R_T^2\omega_O^2}} \approx -\frac{V^2}{2R_T\omega_O^2} + \frac{V}{\omega_O}\left(1+\frac{V^2}{8R_T^2\omega_O^2}\right) \quad (1.10)$$

D'où l'on tire l'expression approchée de la solution finale pour la distance d :

$$d \approx \frac{V}{\omega_O} - \frac{V^2}{2R_T\omega_O^2} + \frac{V^3}{8R_T^2\omega_O^3} \quad (1.11)$$

Compte-tenu des approximations faites et de la précision de la mesure sur la vitesse angulaire, on peut se restreindre aux deux premiers termes, de sorte que la valeur de la distance s'exprime très simplement au moyen du formulaire suivant :

$$d \approx \frac{V}{\omega_O} - \frac{V^2}{2R_T\omega_O^2} = \frac{7.9105}{\omega_O} - \frac{0.00491}{\omega_O^2} \quad (1.12)$$

Expression dans laquelle ω_O est exprimé en radians par seconde. La valeur de d est alors obtenue directement en kilomètres. On retrouve le fait qu'au premier ordre la distance d est inversement proportionnelle à la distance angulaire apparente ω_O. Rappelons les deux conditions ou hypothèses pour lesquelles cette expression de d est valable :

- Observation de la vitesse angulaire autour du zénith ;
- Distance du satellite artificiel petite devant le rayon terrestre.