Sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune

Au 3e siècle avant notre ère, le Grec Aristarque de Samos avait calculé le diamètre du Soleil, celui de la Lune ainsi que la distance du Soleil et celle de la Lune, tout cela en fonction du diamètre de la Terre. Comme il était parti de mesures peu précises, ses résultats ne sont pas très bons.
Une partie des exercices qui suivent reprennent les principes d'Aristarque en partant de mesures plus précises et avec des méthodes de calcul plus modernes comme la trigonométrie que ne connaissaient pas les Grecs de cette époque[1].
Aristarque savait déjà que la Terre, la Lune et le Soleil sont des sphères. Aristote par exemple (4e siècle avant notre ère), énumère plusieurs preuves de la forme de la Terre.
Peu de temps après les écrits d'Aristarque, Ératosthène mesurait le diamètre de la Terre.

1. Aristote et la forme de la Terre

Commenter ces trois arguments, extraits du *Traité du Ciel, Forme et grandeur de la Terre,* d'Aristote.
Aristote est un philosophe grec du 4e siècle avant notre ère.

A1. « si la Terre n'était pas sphérique, les éclipses de Lune n'auraient pas ces sortes de sections : (...) au cours des éclipses la ligne qui limite la Lune est toujours convexe, de sorte que, puisqu'il y a éclipse du fait de l'interposition de la Terre, c'est la circonférence de la Terre qui, étant sphérique, est cause de cette figure.

La Lune en partie éclipsée

A2. « certains astres visibles en Égypte et dans la région de Chypre ne sont pas visibles dans les régions du Nord, et ceux des astres qui sont constamment apparents dans les régions du Nord se couchent dans les régions nommées plus haut. De sorte que non seulement cela montre que la forme de la Terre est circulaire, mais aussi que c'est celle d'une sphère qui n'est pas énorme. S'il n'en était pas ainsi, en effet, les effets d'un déplacement aussi court ne seraient pas évidents aussi rapidement ».

A3. « ceux qui supposent que la région des colonnes d'Hercule[1] touche à celle de l'Inde, et que de cette manière il n'y a qu'une seule mer, ne semblent pas faire une supposition trop incroyable. Comme preuve ils invoquent aussi les éléphants dont l'espèce se trouve dans ces deux lieux extrêmes, en considérant que c'est du fait que les extrémités se touchent qu'elles partagent cette caractéristique. »

Note 1. Il s'agit du détroit de Gibraltar.

« De toutes ces preuves on tire non seulement que la masse de la Terre est nécessairement sphérique, mais aussi que sa grandeur n'est pas importante comparée à celle des autres astres. »

2. Galilée et la forme de la Lune

« La Lune a même forme que la Terre, c'est certain, indubitablement elle est sphérique ; cette conclusion s'impose quand on voit son disque parfaitement circulaire et la façon dont elle reçoit la lumière du Soleil : si sa surface était plane, on la verrait en un instant toute couverte de cette lumière et en un instant toute dépouillée de lumière ; on ne verrait pas, comme c'est le cas, la lumière couvrir d'abord les parties qui regardent vers le soleil puis les parties suivantes : c'est au moment de l'opposition, et pas avant, que la totalité du disque apparent est éclairé ; tout l'opposé arriverait si sa surface visible était concave : l'éclairement commencerait alors par les parties opposées au Soleil. »

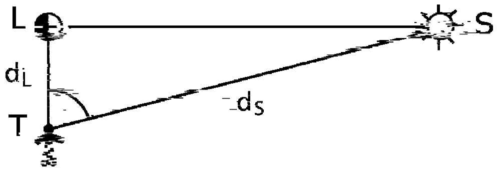
Galilée, *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*. Première journée. Seuil p 94 (traduction corrigée).

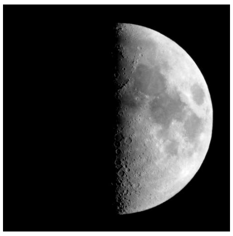
La Lune photographiée au cours d'une même lunaison tous les 3 ou 4 jours.

[1] La trigonométrie a été inventée par les mathématiciens arabes aux alentours du 9e siècle de notre ère.

3. Comparaison des distances de la Lune et du Soleil

Lorsque la Lune est au premier quartier, on voit exactement la moitié de la Lune éclairée. Cela signifie que l'angle $\widehat{TLS}$ est droit.





La Lune en premier quartier est visible l'après-midi et en première partie de nuit. L'après-midi, on peut donc mesurer l'angle que fait la direction de la Lune avec la direction du Soleil, l'angle $\widehat{LTS}$ de la figure.

a. Aristarque avait trouvé 87° pour l'angle $\widehat{LTS}$. Pour trouver combien de fois le Soleil est plus éloigné que la Lune, calculer le rapport TS/TL.

b. En réalité, cet angle est beaucoup plus proche de l'angle droit, il est compris entre 89,8° et 89,9°. Que peut-on dire de la distance du Soleil d_S, comparée à la distance de la Lune d_L?

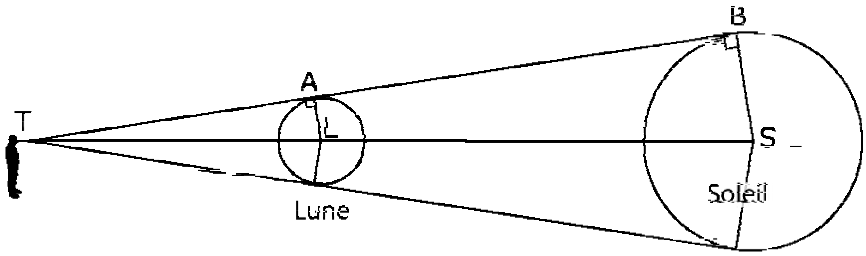
Les calculs d'Aristarque

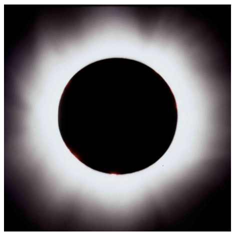
L'angle $\widehat{LTS}$ est difficile à mesurer. Aristarque avait trouvé 87°. Ce qu'il exprimait ainsi :
« Lorsque la Lune nous paraît dikhotome, sa distance au Soleil est moindre du quart de la circonférence, de la trentième partie de ce quart ».
Dikhotome signifie coupée en deux donc au premier ou au dernier quartier.
La distance au Soleil est ici l'angle entre la direction de la Lune et la direction du Soleil.
Le quart de la circonférence, c'est 360°/4 soit 90°.
La trentième partie de ce quart, c'est 90°/30 = 3°.
L'angle donné est donc égal à 90° – 3° soit 87°.
Avec cette valeur et sans trigonométrie, Aristarque arrivait à cette conclusion :
« La distance à laquelle le Soleil se trouve de la Terre est plus grande de 18 fois, mais moindre de 20 fois que celle à laquelle la Lune se trouve de la Terre. »
Dire que le Soleil est 18 à 20 fois plus loin que la Lune, c'est beaucoup trop peu, mais Aristarque montrait néanmoins que le Soleil était beaucoup plus éloigné que la Lune.

Des mesures plus précises donnent environ 400 pour le rapport d_S/d_L.
<u>C'est la valeur que l'on prendra pour la suite.</u>

4. Comparaison du rayon du Soleil et du rayon de la Lune *(compléments annexe 4)*

Lors d'une éclipse totale de Soleil, la Lune cache exactement le Soleil.
En déduire le rapport du rayon du Soleil r_S à celui de la Lune r_L.

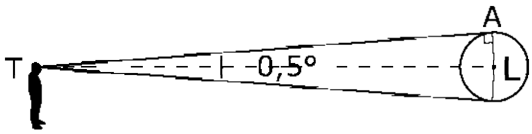




L'éclipse totale de Soleil de 1999. Photo AJ

5. Comparaison de la distance de la Lune et de son rayon *(compléments annexe 5)*

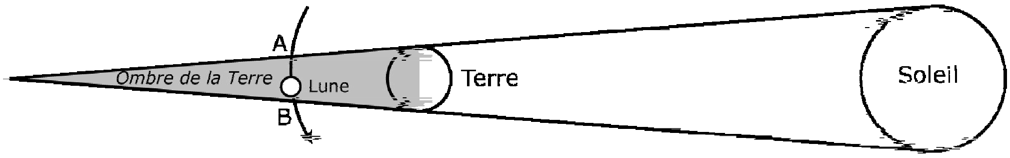
On appelle diamètre apparent de la Lune, l'angle sous lequel on voit la Lune depuis la Terre (figure). Il mesure 0,5°.
En déduire la distance de la Lune d_L, en fonction de son rayon r_L.



6. Comparaison du rayon de la Terre et du rayon de la Lune

a. Comparaison du diamètre de l'ombre de la Terre et du diamètre de la Lune

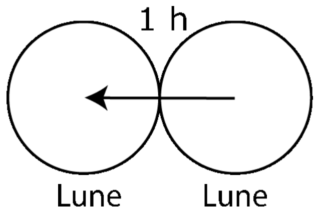
Une éclipse de Lune se produit lorsque la Lune traverse l'ombre de la Terre. On cherche le diamètre AB de l'ombre de la Terre à la distance de la Lune.



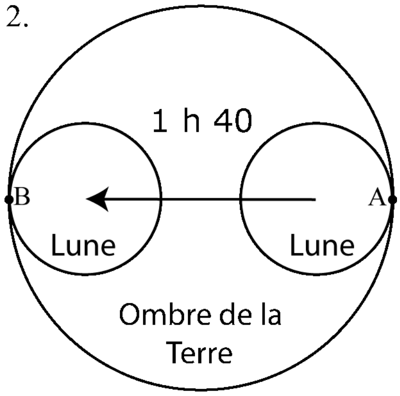
1. On sait que la Lune se déplace de son diamètre apparent en 1 heure par rapport aux étoiles (figure 1).
2. La durée maximale d'une éclipse de Lune est de 1 h 40 min (figure 2).

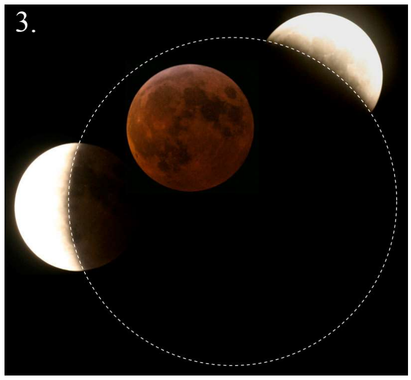
En déduire le diamètre de l'ombre de la Terre, D_O, en fonction du diamètre de la Lune D_L.

1.



2.





Montage photo montrant 3 étapes d'une éclipse de Lune.
L'ombre de la Terre est en pointillés.

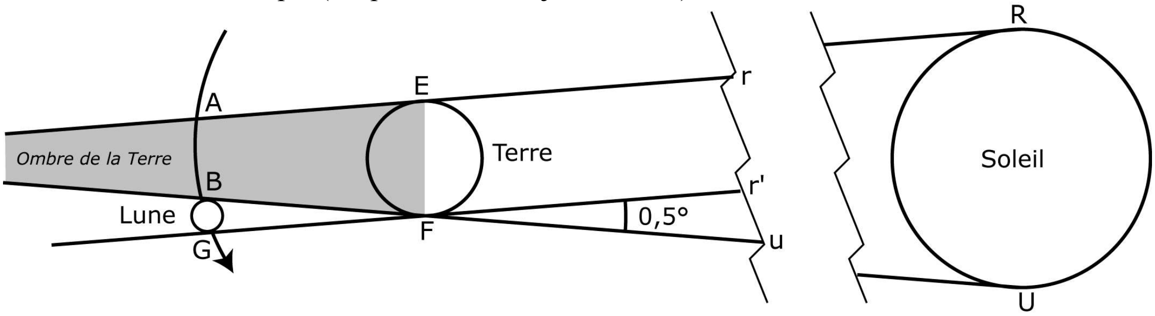
b. Comparaison du rayon de la Terre r_T et du rayon de la Lune r_L

Première méthode

On considère que l'ombre de la Terre est cylindrique. On a alors AB = EF = $2 \times r_T$. C'est une approximation peu précise.

Deuxième méthode

L'ombre de la Terre est conique (ce que savaient déjà les Grecs).



[Fu) est dirigé vers le bord "inférieur" U du Soleil alors que [Er) et [Fr') sont dirigés vers le bord "supérieur" R. On peut considérer que (Er) et (Fr') sont parallèles, étant donné la grande distance du Soleil. En effet, la distance Terre Soleil vaut 400 fois la distance Terre Lune.

L'angle $\widehat{BFG}$ a la même mesure que $\widehat{UFr'}$, soit 0,5°, ce qui correspond à un diamètre lunaire à la distance de la Lune : BG = diamètre de la Lune D_L.

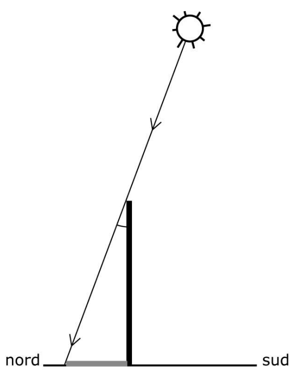
1. Montrer que le diamètre de la Terre $D_T \approx D_O + D_L$
2. En utilisant le résultat trouvé à la question 6a, calculer D_T en fonction de D_L puis r_T en fonction de r_L.

7. Calcul du rayon de la Terre

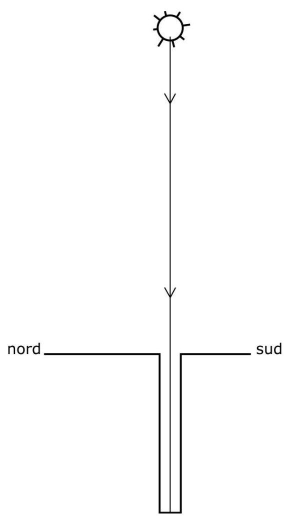
Aux alentours de 230 avant notre ère, l'astronome grec Ératosthène eut l'idée de mesurer la Terre à partir de deux observations simples réalisée le jour du solstice d'été à midi, heure solaire :
- à Alexandrie, un bâton vertical faisait une certaine ombre, les rayons du Soleil faisant un angle de 1/50 tour (7,2°) avec la verticale (figure 1) ;
- à Syène, plus au sud, le Soleil éclairait le fond d'un puits (figure 2).

Les deux villes sont distantes de 5 000 stades, correspondant à environ 800 de nos kilomètres.

Ératosthène savait que la Terre était sphérique et que le Soleil était très éloigné. Il a donc supposé les rayons du Soleil parallèles. En déduire le rayon de la Terre figure 3).

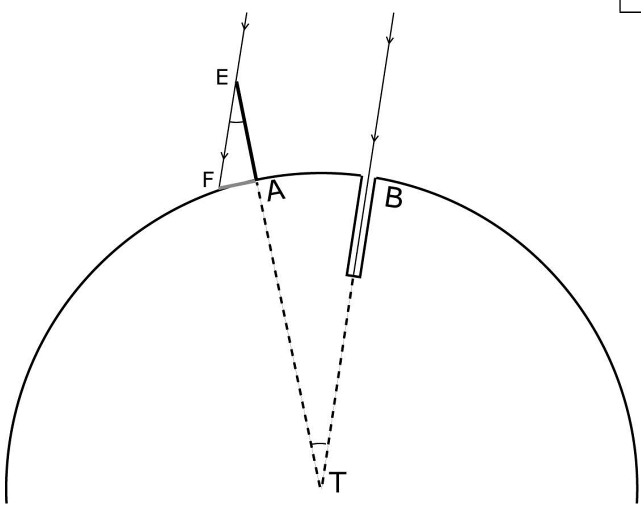


1. En mesurant l'ombre d'un bâton vertical à Alexandrie, on montre que les rayons en provenance du Soleil forment un angle de 1/50 tour avec la verticale.



2. À Syène, plus au sud, le soleil éclaire le fond d'un puits, il est donc à la verticale.

3.



8. Conclusion *(compléments annexe 8)*

En déduire le rayon de la Lune, la distance de la Lune, le rayon du Soleil et la distance du Soleil.

Solutions

3. a. cos $\widehat{LTS}$ = TL/TS donc TS/TL = 1/cos $\widehat{LTS}$. Pour 87°, on obtient 19 environ. Le Soleil est donc 19 fois plus loin que la Lune.
b. Avec 89,8°, on obtient 286 pour TS/TL. Pour 89,9°, on trouve 573. On peut donc conclure que le Soleil est 286 à 573 fois plus éloigné de nous que la Lune.
Cette méthode ne permet pas d'obtenir un résultat précis, en particulier parce que le moment du premier quartier est difficile à déterminer visuellement.
D'autres méthodes de mesure montrent que le Soleil est environ 400 fois plus éloigné de nous que la Lune.
L'angle $\widehat{LTS}$ au moment du premier quartier vaut plutôt 89,853°.

4. On utilise le théorème de Thalès : BS/AL = TS/TL ou $r_S/r_L = d_S/d_L = 400$ donc $r_S = 400 \times r_L$
Le Soleil est 400 fois gros que la Lune.

5. sin 0,25° = AL/TL donc TL = AL / sin 0,25° ≈ 230 AL ou TL ≈ 230 r_L.

6. a. En 1 h → D_L
En 40 min → 2/3 $D_L \approx 0{,}7\ D_L$
La figure montre que $D_O \approx 2\ D_L + 0{,}7\ D_L = 2{,}7\ D_L$
b. $D_T \approx 2{,}7\ D_L + D_L = 3{,}7\ D_L$ donc $r_T \approx 3{,}7\ r_L$

7. Les angles ATB et AFE sont alternes internes donc ATB mesure aussi 1/50 tour.
L'arc AB mesure 800 km donc la circonférence complète vaut 800×50 = 40 000 km.
Rayon de la Terre = 40 000/(2π) ≈ 6 400 km.

8. D'après la question 6, $r_T \approx 3{,}7\ r_L$ donc $r_L \approx 6\,400/3{,}7$; $r_L \approx 1730$ km
D'après la question 5, TL ≈ 230 r_L donc TL ≈ 400 000 km.
D'après la question 4, $r_S = 400 \times r_L$ donc , $r_S \approx 700\,000$ km.
D'après la question 3, TS = 400×TL ≈ 160 000 000 km.