Cartes du ciel, cartes de la Terre

Michel Bobin, Pierre Causeret

Il existe de très nombreuses manières de représenter la sphère céleste ou la surface du globe terrestre. Cet article en plusieurs parties se propose d'étudier les principales projections utilisées ainsi que leurs propriétés.

Une projection cartographique permet de représenter une sphère $\mathfrak{S}$ (d'un espace à 3 dimensions) dans un plan $\mathscr{P}$ (à 2 dimensions). Pour les mathématiciens, c'est une application injective[1] de $\mathfrak{S}$ dans $\mathscr{P}$. À titre exceptionnel, un (voire plusieurs) point de $\mathfrak{S}$ peut n'avoir aucune image dans $\mathscr{P}$ (du coup, l'application dégénère en fonction[2]). Au lieu de projection cartographique, on dira plus simplement « projection », mais ces projections n'ont a priori rien à voir avec ce que, en maths, on appelle usuellement projection.

Les coordonnées

Un point M d'une sphère $\mathfrak{S}$ est classiquement repéré par sa longitude L mesurée par rapport à un méridien origine (sauf aux pôles Nord et Sud qui n'ont pas de longitude) et sa latitude φ (figure 1).

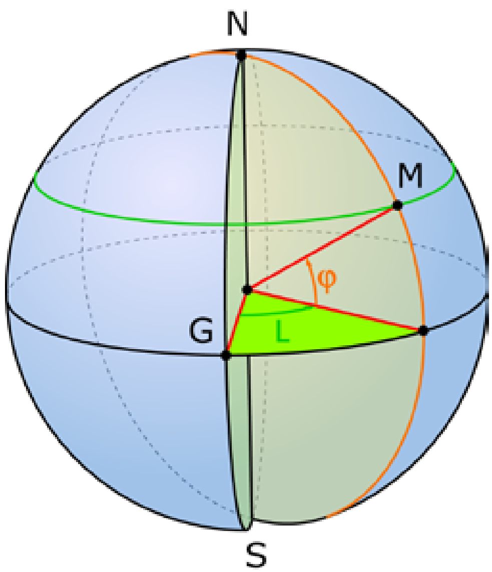


Fig.1. *Coordonnées sphériques.*
La longitude varie de 0 à 360° (ou de -180° à 180°) ou en radians de 0 à 2π (ou de -π à π).
La latitude varie de -90° à 90° ou de -π/2 à π/2.

1 Chaque point M de possède une image unique dans et deux points distincts ne peuvent pas avoir la même image. «Application» se traduit justement en anglais par «map» (carte).
2 Chaque point possède au plus une image.

Coordonnées terrestres et coordonnées célestes

Sur Terre, le plan de l'équateur est le plan de référence pour la latitude qui est comptée de –90° (sud) à +90°(nord). La longitude est mesurée à partir du méridien de Greenwich de –180° à +180° (– à l'ouest, + à l'est, donc dans le sens direct vu du nord).

Dans le ciel, on utilise principalement les coordonnées équatoriales. Le plan de l'équateur céleste sert d'origine pour la latitude qui s'appelle alors déclinaison, mesurée de -90° à +90°. La longitude devient ascension droite et est mesurée de 0 à 24 h (1 h pour 15°) dans le sens direct vu du nord. Greenwich est remplacé par le point vernal situé à l'intersection des plans de l'équateur et de l'écliptique (direction du Soleil à l'équinoxe de printemps).

Dans le Système solaire, on utilise aussi les coordonnées écliptiques. Le plan de l'écliptique remplace alors le plan de l'équateur et l'on parle de longitude et latitude écliptiques. Le point vernal reste l'origine des longitudes.

Quant aux points du plan $\mathscr{P}$, on les repère :

- soit en coordonnées cartésiennes (x, y), abscisse et ordonnée (figure 2a) ;

- soit en coordonnées polaires (ρ, γ), distance et angle polaires sauf pour l'origine qui n'a pas d'angle polaire (figure 2b).

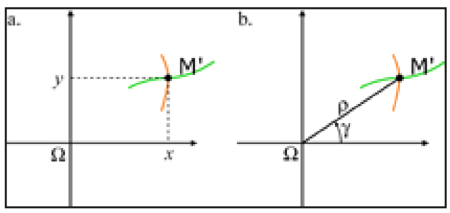


Fig.2. *Coordonnées cartésiennes(a) et polaires (b).*

Dans la suite, on se propose d'étudier les images par différentes projections de la sphère céleste et de la Terre considérée comme sphérique.
Habituellement, on utilise les notations (λ, φ) pour les coordonnées terrestres et (α, δ) pour les coordonnées équatoriales. On utilisera ici la notation (L, φ) pour les deux comme sur la figure 1.

Autre précision, on regarde la Terre de l'extérieur et la sphère céleste de l'intérieur. De ce fait, si on place le nord en haut, les longitudes sont croissantes de gauche à droite sur la Terre mais les ascensions droites sont croissantes de droite à gauche dans le ciel. Pour les cartes célestes, il faudra ajouter un signe – dans les formules donnant l'abscisse.

Premières projections

La plus simple projection qui soit est définie par :

$x = L$ ***et*** $y = \varphi$

C'est la projection quadratique ou projection des cartes carrées. Les pôles Nord et Sud n'ont pas d'image ici.

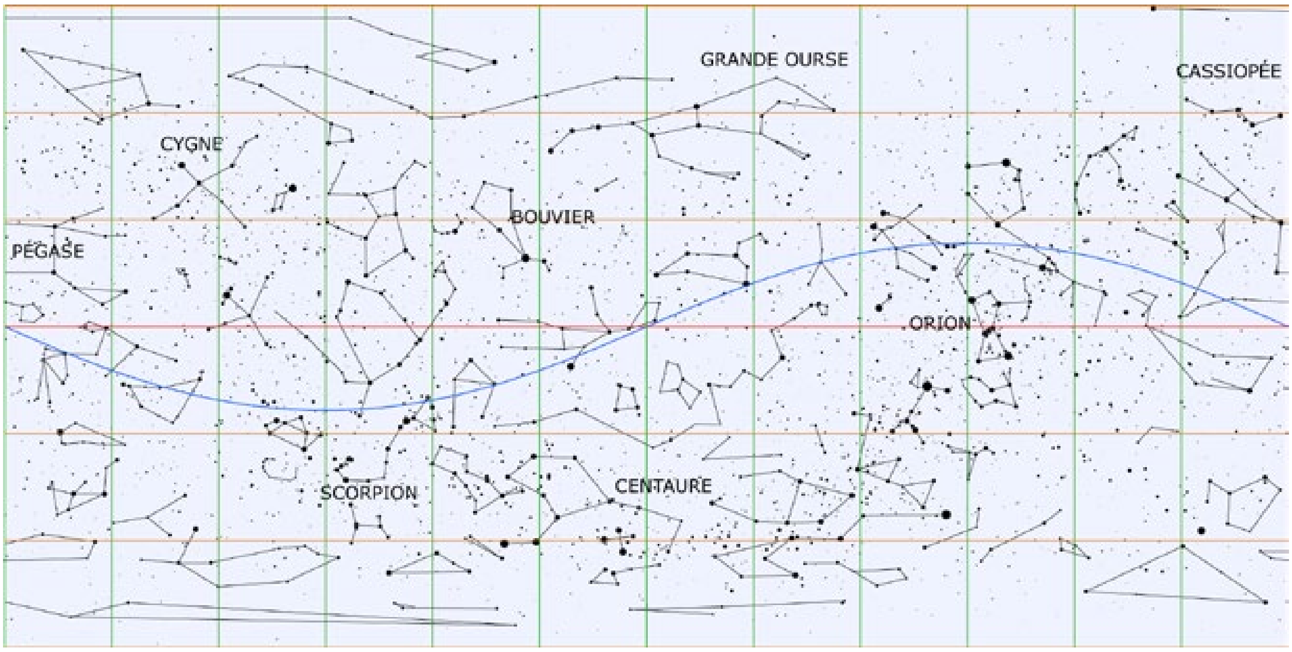


Fig.3. *Carte du ciel en projection quadratique. La carte est centrée ici sur le méridien 180° (ou 12 h). L'abscisse est l'opposé de l'ascension droite, de 0° (ou 0 h) à droite à 360° (ou 24 h) à gauche. L'ordonnée est la déclinaison de l'étoile, de –90° en bas à 90° en haut. L'équateur céleste est représenté en rouge et l'écliptique en bleu.*

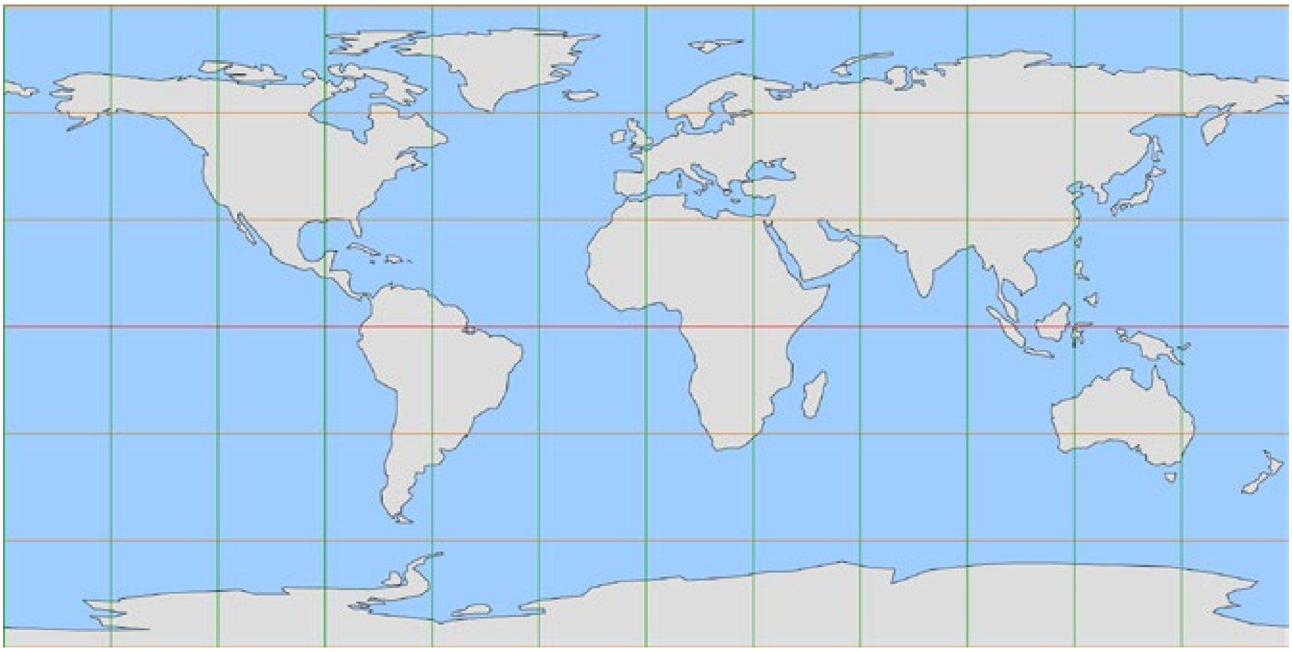


Fig.4. *Carte de la Terre en projection quadratique. L'abscisse est la longitude, de –180° à gauche à +180° à droite. L'ordonnée est la latitude, de –90° en bas à +90° en haut.*

Dans cette projection quadratique, chaque pôle n'est plus un point mais tout un segment et les déformations sont importantes à haute latitude. Pour y remédier, on peut tenter une projection trapézoïdale, en remplaçant chacun des pôles par un point et chaque méridien par deux segments (figure 5).

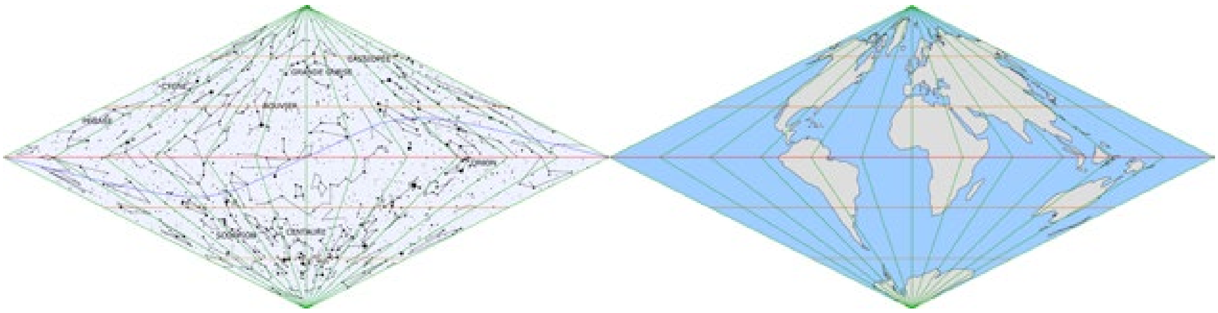


Fig.5. Ciel et Terre en projection trapézoïdale. Les méridiens sont des segments reliant le pôle à des points de l'équateur régulièrement espacés. Le résultat n'est pas probant et les déformations sont encore importantes.

Il semble plus logique de décider que la distance le long d'un parallèle entre deux points de même latitude doit être conservée sur la carte.

À la latitude φ, le rayon d'un parallèle vaut R×cos φ et sa longueur 2π×R×cos φ au lieu de 2π×R à l'équateur. R est ici le rayon de la sphère (figure 6).

On va donc remplacer dans les formules précédentes x = L par x = L×cos φ.

On obtient une projection appelée sinusoïdale car les méridiens sont des arcs de sinusoïde. On parle aussi de projection de Flamsteed. Les parallèles, eux, restent des segments.

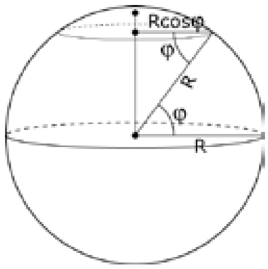


***Fig.6.** Rayon d'un parallèle de latitude φ.*

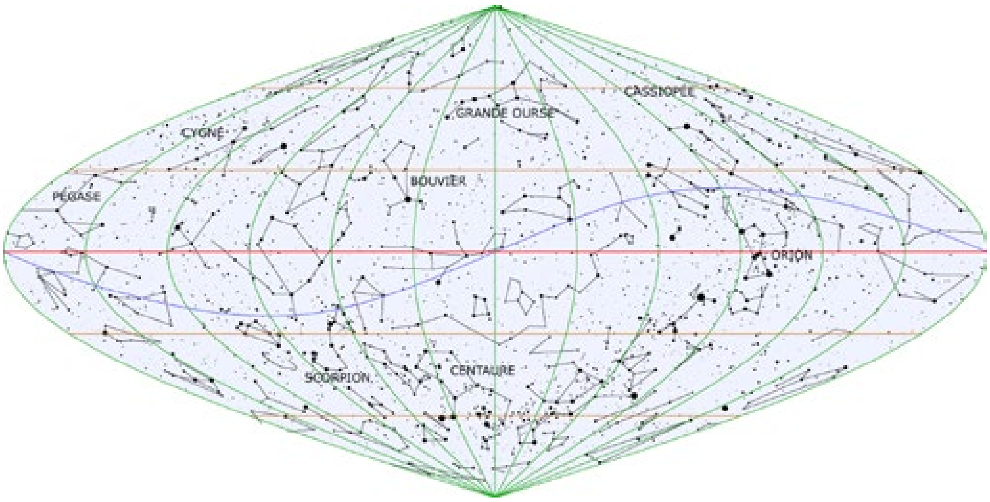


***Fig.7.** Carte du ciel en projection sinusoïdale. Les constellations sont peu déformées autour du méridien central. Dans son atlas, Flamsteed a représenté le ciel en plusieurs cartes et non en une seule comme ici. Du coup, il a pu changer de méridien central au fur et à mesure des régions représentées. Pour cela, il suffit de remplacer dans les formules x = L×cos φ par x = $(L-L_0)$×cos φ où L_0 est l'ascension droite du méridien origine.*

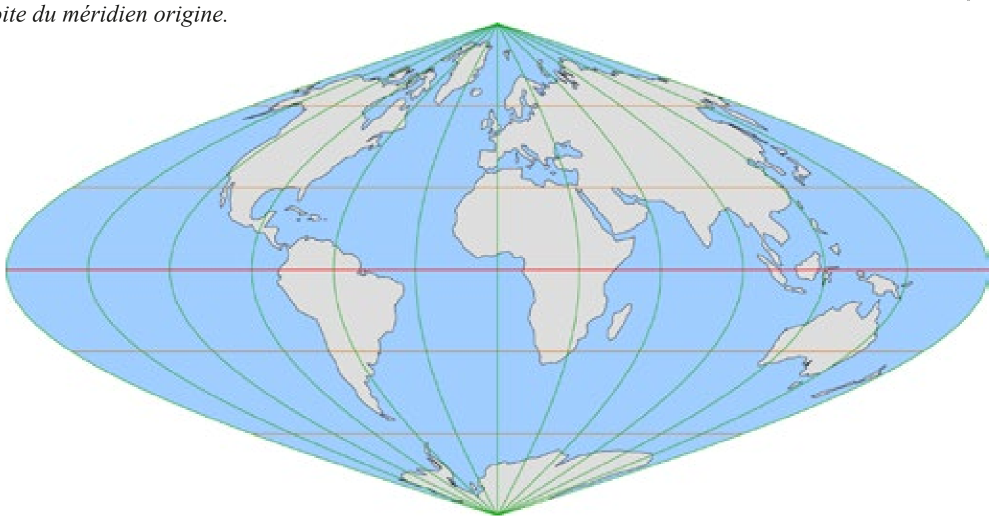


***Fig.8.** Carte terrestre en projection sinusoïdale. On a placé le méridien de Greenwich au centre.*

Propriétés des projections

<u>Une projection équidistante</u> conserve les longueurs, du moins sur une famille de lignes.

Par exemple, la projection quadratique (figures 3 et 4) est équidistante sur les méridiens : cela signifie que deux points situés sur un même méridien et espacés d'une certaine distance seront toujours représentés sur la carte par une même distance.

Sur la figure 4 par exemple, 1 mm sur un méridien représente toujours 235 km. Par contre la projection quadratique n'est pas équidistante sur les parallèles : 1 mm représente 235 km à l'équateur mais seulement 204 km à 30° de latitude ou 117 km à 60° de latitude.

La projection de Flamsteed est équidistante sur les parallèles, elle a été construite pour cela, mais elle ne l'est plus sur les méridiens.

<u>Une projection équivalente</u> conserve les aires : deux surfaces de même aire sur la sphère doivent être représentées par deux surfaces de même aire sur la carte. La projection quadratique n'est pas équivalente : l'Antarctique sur la figure 4 est nettement surdimensionné par rapport à l'Europe par exemple. Par contre, la projection sinusoïdale est équivalente.

<u>Une projection conforme</u> conserve les angles, les formes doivent donc elles aussi être conservées. Il suffit d'observer les cartes obtenues en projections quadratique et sinusoïdale pour voir que celles-ci ne sont pas conformes.

	Projection quadratique	Projection de Flamsteed
Images des parallèles	segments parallèles	segments parallèles
Images des méridiens	segments parallèles	arcs de sinusoïde
Longueurs sur un parallèle	non conservées	conservées
Longueurs sur un méridien	conservées	non conservées
Angles	non conservés	non conservés
Aires	non conservées	conservées

Propriétés des projections quadratique et sinusoïdale (ou de Flamsteed).

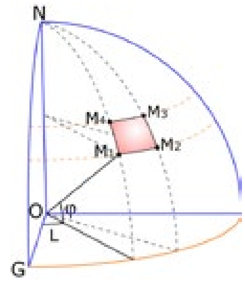
Nous aborderons dans un prochain article d'autres projections, cylindriques, coniques ou azimutales.

Conditions pour une projection équivalente

(avec quelques calculs mathématiques)

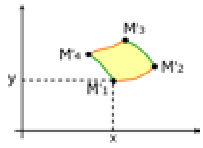
M_1 est un point de la sphère de rayon unité.

$M_1\,(L, \varphi)$
$M_2\,(L+\Delta L, \varphi)$
$M_3\,(L, \varphi+\Delta\varphi)$
$M_4\,(L+\Delta L, \varphi+\Delta\varphi)$
$M_1M_2M_3M_4$ est un « rectangle » élémentaire.



Le rayon du parallèle de M_1 est $\cos\varphi$
Longueur de l'arc $\widehat{M_1M_2} = \Delta L \times \cos\varphi$
Longueur de l'arc $\widehat{M_1M_4} = \Delta\varphi$
Aire de l'élément $M_1M_2M_3M_4$: $\cos\varphi \times \Delta L \times \Delta\varphi$

Comment est transformé cet élément d'aire sur la carte ?
Les arcs de la carte image seront assimilés à des segments deux à deux parallèles. $M'_1M'_2M'_3M'_4$ est donc assimilé à un parallélogramme.



De plus, pour les accroissements, on se restreint au premier ordre : accroissement de la fonction = dérivée×accroissement de la variable.

x et y, les coordonnées de M'_1 sont des fonctions de L et de φ.

Coordonnées des points M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 :

$$M'_1 : (x, y) \text{ et } M'_2 : \left(x + \frac{dx}{dL}\Delta L, y + \frac{dy}{dL}\Delta L\right) \text{ donc } \overrightarrow{M'_1M'_2} : \Delta L\left(\frac{dx}{dL}, \frac{dy}{dL}\right)$$

$$M'_1 : (x, y) \text{ et } M'_4 : \left(x + \frac{dx}{d\varphi}\Delta\varphi, y + \frac{dy}{d\varphi}\Delta\varphi\right) \text{ donc } \overrightarrow{M'_1M'_4} : \Delta\varphi\left(\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi}\right)$$

On peut montrer que l'aire (orientée) d'un parallélogramme ABCD avec $\overrightarrow{AB}$ (a, b) et $\overrightarrow{AD}$ (c, d) est égale à ad − bc, le déterminant de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

L'aire de $M'_1M'_2M'_3M'_4$ est donc égale à :

$$\Delta L \times \Delta\varphi \times \left(\frac{dx}{dL} \times \frac{dy}{d\varphi} - \frac{dx}{d\varphi} \times \frac{dy}{dL}\right)$$

On compare ce résultat à l'aire de $M_1M_2M_3M_4$ qui valait $\cos\varphi \times \Delta L \times \Delta\varphi$.

Une projection est donc équivalente si et seulement si :

$$\frac{1}{\cos\varphi} \times \left(\frac{dx}{dL} \times \frac{dy}{d\varphi} - \frac{dx}{d\varphi} \times \frac{dy}{dL}\right) \text{ est constant.}$$

Nous disposons donc d'un critère pour vérifier si une projection définie en coordonnées cartésienne est équivalente. Si la projection est définie en coordonnées polaires (ρ, γ), cette condition s'écrira :

$$\frac{\rho}{\cos\varphi} \times \left(\frac{d\rho}{dL} \times \frac{d\gamma}{d\varphi} - \frac{d\rho}{d\varphi} \times \frac{d\gamma}{dL}\right) \text{ est constant.}$$

Vous pourrez chercher vous-même la démonstration.

<u>Application à la projection de Flamsteed</u>

$$x = L \times \cos\varphi \text{ et } y = \varphi$$

$$\frac{dx}{dL} \times \frac{dy}{d\varphi} - \frac{dx}{d\varphi} \times \frac{dy}{dL} = \cos\varphi \times 1 + L \sin\varphi \times 0 = \cos\varphi$$

La projection de Flamsteed est donc équivalente.

■