AVEC NOS ÉLÈVES

Mesures de distances et de diamètres

avec les méthodes des premiers scientifiques

Élodie Prieur, lycée Pierre Bourdieu, Fronton

En utilisant les méthodes des premiers scientifiques, des élèves de 1ère S refont, dans le cadre des TPE, des expériences permettant de mesurer les distances ainsi que les diamètres des objets astronomiques proches.

Je présente ici quelques activités scientifiques que j'ai effectuées au cours de l'année scolaire 2015-2016 sur le thème de l'astronomie, alors que j'étais en classe de première S, option SVT, dans le lycée Pierre Bourdieu de Fronton (Haute-Garonne). Pour ces activités, j'ai pu bénéficier de l'aide de J.L. Prieur, astronome à l'Observatoire Midi-Pyrénées et animateur du Club d'Astronomie de Villemur[1]. Le but recherché était la détermination de distances et de diamètres d'objets astronomiques, en utilisant les méthodes des premiers scientifiques.

Avec trois autres étudiants du lycée, pour les Travaux Personnels Encadrés, nous avions choisi le thème « Microscopique Macroscopique ». Ce thème nous a permis d'aborder plusieurs sujets différents, dont une partie consacrée à l'observation au microscope de petits objets et une autre partie à la construction d'un instrument optique permettant d'observer à la fois des objets lointains ou proches. Je présente ici la partie dont je me suis occupée et qui concerne l'astronomie.

Détermination du diamètre de la Terre (méthode d'Ératosthène)

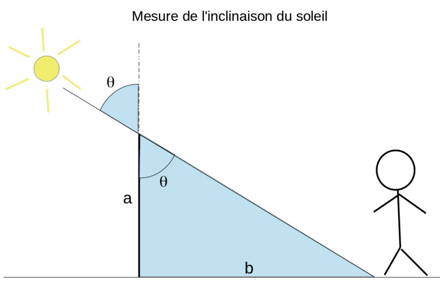

Fig.1. Mesure de l'angle θ, distance zénithale du Soleil au solstice d'hiver, lors de son passage au méridien à partir de l'ombre d'un piquet vertical.
a. Principe de la mesure.
b. Cliché d'une des installations utilisées le 26/12/2015 à Villariès.

1 http://www.astrosurf.com/cav-villemur

Nous avons effectué une mesure de l'angle zénithal du Soleil à Villariès le 26/12/2015, lors du passage au méridien. Nous supposerons ici que cette mesure correspond au solstice d'hiver, car cette date est suffisamment proche du solstice d'hiver, qui était précisément le 22/12/2015 (cet angle varie peu au voisinage du solstice). Le principe consiste à mesurer la longueur de l'ombre d'un piquet vertical (figure 1). La valeur de l'ombre la plus courte est observée au moment du passage du Soleil au méridien :

$$\tan(\theta) = b_{mini}/a$$

Pour obtenir une estimation des erreurs, nous avons utilisé deux piquets, de hauteur 1,035 m et 1,685 m. Les mesures sont reportées dans le tableau 1.

Heure	Valeurs de b (en m)	
(T.L.)	pour a = 1,035 m	pour a = 1,685 m
12 h 55	2,38	3,90
12 h 58	2,38	3,89
13 h 01	2,37	3,87
13 h 04	2,38	3,89

Tableau 1. *Mesure de la longueur de l'ombre b, lors du passage du Soleil au méridien, le 26/12/2015 à Villariès, pour chacun des deux piquets utilisés (cf. figure 1).*

L'ombre la plus courte correspond dans les deux cas aux mesures effectuées à 13 h 01.

Nous en déduisons deux mesures de la tangente de cet angle :

- pour le petit piquet, $\tan(\theta) = 2,37/1,035 = 2,2898$
- pour le grand piquet, $\tan(\theta) = 3,87/1,685 = 2,2969$

La moyenne de ces deux valeurs est donc

$\tan(\theta) = 2,293 \pm 0,003$ d'où $\theta = 1,159 \pm 0,001$ rad

La figure 2a (page suivante) montre que la longueur L_θ de l'arc MC vaut : $L_\theta = \theta_{rad} \times R_T$
où θ_{rad} est la valeur de θ en radians et où R_T est le rayon de la Terre.

On en déduit la valeur du diamètre de la Terre :

$$D_T = 2\, L_\theta / \theta_{rad}$$

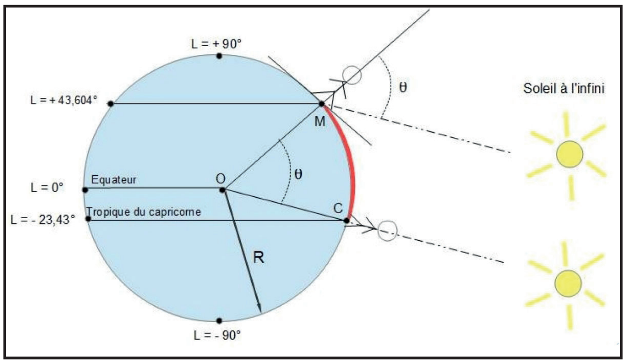

Fig. 2a. *Mesure du diamètre de la Terre avec la méthode d'Ératosthène, dans le cas particulier du solstice d'hiver.*

Fig 2b. *Distance entre Toulouse et le Tropique du Capricorne sur le même méridien.*

On rappelle qu'au solstice d'hiver, le Soleil est à la verticale du tropique du Capricorne.

En utilisant Internet (figure 2b), nous avons obtenu la valeur de L_θ, distance à la surface du globe entre Villaries (latitude 43,75 N ; longitude 1,490 E) et le point B de coordonnées (23,43 S ; 1,490 E), situé à la fois sur le même méridien et sur le tropique du Capricorne (dont la latitude est de 23,44° S) :

$$L_\theta = 7\,456 \pm\ 30 \text{ km.}$$

En utilisant notre mesure à Villariès (θ = 1,159 rad) lors du passage du Soleil au méridien au voisinage du solstice d'hiver, nous en déduisons :

$D_T = 2 \times 7\,456 / 1{,}159$, soit finalement :

$$D_T = 12\,860 \pm\ 110 \text{ km}$$

La valeur connue est de 12 742 km. Nous avons donc fait une erreur absolue de 118 km, soit 1 % en valeur relative, seulement !

Mesure du diamètre apparent de la Lune et du Soleil

Vus depuis la Terre, la Lune et le Soleil présentent un angle apparent Φ_L et Φ_S dont la tangente est le rapport de leur diamètre sur la distance à la Terre :

$$\tan(\Phi_L) = D_L/d_{TL} \text{ et } \tan(\Phi_S) = D_S/d_{ST}$$

En remplaçant pas les valeurs actuelles, D_L = 3 475 km, d_{TL} = 384 400 km, D_S = 1 393 000 km, d_{TL} = 149 600 000 km, on obtient :

$$\Phi_L = 0{,}518° \text{ et } \Phi_S = 0{,}533°$$ [2]

2 Il s'agit ici de valeurs moyennes. La distance de la Lune variant de 356 000 à 407 000 km, son diamètre apparent varie de 0,49° à 0,56°. Quant à celui du Soleil, il varie de 0,52 à 0,54°.

Pour mesurer nous-mêmes ces angles, nous avons pris des photographies avec un appareil compact Sony DSC-HX50 (figure 3). Cet appareil est équipé d'un capteur CMOS Exmor R de format 1/2.3" avec 3 648 × 2 726 pixels, et des pixels carrés de e = 1,55 µm de côté. La focale de l'objectif annoncée par le constructeur est de 4,3 à 129 mm. (ou 24 à 720 mm en « équivalent 24×36 mm »). Nous avons pris ces clichés en mode « grossissement maximal », qui ajoute un grossissement numérique de 2,5 fois, et la focale équivalente devient donc f = 129 × 2,5 = 323 mm.

Fig. 3. *Photographies de la Lune (a) et du Soleil (b) prises par l'auteur avec un compact Sony DSCHX50.*

Sur le cliché de la Lune de la figure 3a, dont le format fait 3 648 × 2 726 pixels, nous avons mesuré un diamètre d de 1 862 pixels, ce qui correspond à un diamètre angulaire Φ_L tel que :

$$\tan(\Phi_L) = \frac{\text{diamètre sur le capteur}}{\text{focale}} = \frac{1862 \times 0{,}00155}{323}$$

On en déduit donc :

$$\Phi_L = 0{,}512° \pm 0{,}03°$$

La valeur attendue étant 0,518°, notre erreur est donc de 0,006°, soit 1,2 %.

Pour le Soleil, nous avons mesuré un diamètre d de 1 960 ± 2 pixels sur le cliché de la figure 3b, dont le format fait 3 648 × 2 726 pixels. On a donc :

$\tan(\Phi_S) = 1\,960 \times 0{,}001\,55 / 323$, donc :

$$\Phi_S = 0{,}539° \pm 0{,}03°$$

La valeur attendue étant 0,535°, notre erreur est donc de 0,004°, soit 0,7 %.

Détermination de la distance Terre Lune (avec la parallaxe)

L'éclipse de Soleil du 3/10/2005 était annulaire à Alger et partielle à Villariès. On peut donc employer la méthode décrite dans la figure 4, en utilisant les photographies prises simultanément à Alger et à Villariès (figure 5). Au moment du maximum de l'éclipse, le Soleil était aligné avec la Lune à Alger : l'observation faite à Villariès fournit donc directement l'angle α.

On a : $LB = AB/\tan(\alpha)$

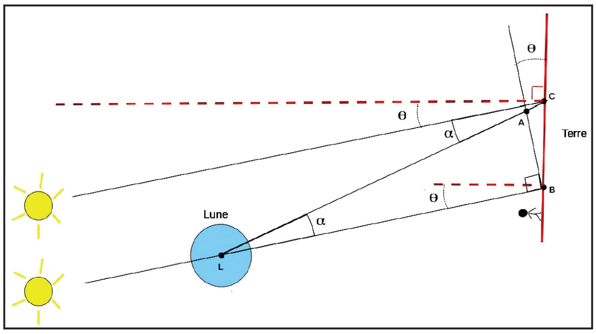

***Fig. 4.** Détermination de la distance Terre Lune à partir d'observations à Villariès (point C) de l'éclipse du 03/10/2005, qui était annulaire à Alger (point B). Pour simplifier, on considère la Terre plate entre Villariès et Alger.*

***Fig. 5.** Éclipse du Soleil du 03/10/2005 observée au moment du maximum (à 9 h 06 T.U.) à Villariès (a), et à Alger (b).*

Alger et Villariès sont à peu près situés sur le même méridien. Le maximum de l'éclipse à Villariès a lieu vers 9 h (T.U.) et l'éclipse totale à Alger se produit à 9 h 06 (T.U.). Le Soleil est alors environ deux heures avant le passage au méridien, et sa distance zénithale est $\theta \approx 50°$. Puisque α est un angle très petit devant θ, on a :

$$AB \approx BC \cos(\theta)$$

BC, la distance Alger Villariès est d'environ 789 km, donc : $AB \approx 789 \times \cos(50°) \approx 507$ km.

Sur la figure 5, on mesure une largeur de croissant de 70 pixels pour un diamètre de 410 pixels, soit 17 % du diamètre solaire. Le diamètre apparent du Soleil étant $\Phi_S = 0{,}53°$ (voir paragraphe précédent), on en déduit que $\alpha = 0{,}17$ et $\Phi_S \approx 0{,}090°$ ainsi que $LB \approx 507/\tan(0{,}09°) = 323\ 000$ km. À cette valeur, il convient d'ajouter le rayon terrestre, soit 6300 km, pour obtenir d_{TL}, la distance Terre Lune :

$$\boxed{d_{TL} = 329\ 000 \text{ km}}$$

D'après les éphémérides, la distance de la Lune était de 357 000 km ce jour-là. Nous avons donc une erreur de 8 %, ce qui était prévisible étant donné la faible distance entre Alger et Villariès et les approximations faites. Pour obtenir une erreur plus faible, on aurait intérêt à utiliser une plus grande distance entre les points d'observation sur Terre, en choisissant une autre éclipse et en tenant compte de la rotondité de la Terre.

Détermination du diamètre de la Lune (méthode d'Aristarque)

Aristarque de Samos (III[e] siècle av. J.-C.) a déterminé les tailles relatives de la Lune et de la Terre, à partir d'observations d'une éclipse totale de Lune. Il supposait que l'ombre de la Terre au niveau de l'orbite de la Lune avait la taille de la Terre, car le Soleil était très éloigné (cf. figure 6). Aristarque avait observé que l'ombre de la Terre avait une taille d'environ trois fois le diamètre apparent de la Lune : il en avait déduit que le diamètre de la Terre (D_T) était environ trois fois celui de la Lune (D_L) : $D_T/D_L \approx 3$. Aristarque n'a pas pu en déduire le diamètre exact de la Lune, car le diamètre de la Terre n'était pas encore connu à cette époque : il n'a été déterminé (pour la première fois) qu'au siècle suivant, par Ératosthène[3]. Avec les valeurs connues actuellement, $D_T / D_L = 12\,742 / 3\,470 = 3{,}87$, dans le cas où on supposerait que le Soleil est à l'infini, le diamètre Do de l'ombre de la Terre serait donc tel que $Do / D_L = 3{,}67$.

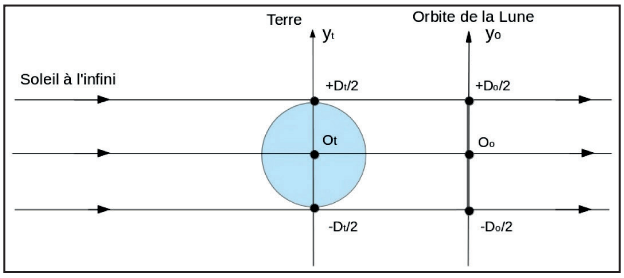

***Fig. 6.** Éclipse de Lune : principe de la méthode d'Aristarque. Si on suppose que le Soleil se trouve à l'infini, le diamètre Do de l'ombre de la Terre est égal au diamètre de la Terre D_T*

Nous avons profité de l'éclipse du Lune du 28 septembre 2015 pour refaire cette expérience. Pour cela, j'ai photographié la Lune à la fin de l'éclipse, alors qu'il faisait encore nuit, avant de prendre l'autobus pour le lycée (figure 7). Pour compléter cette étude, nous avons utilisé un autre cliché pris au début de l'éclipse, au Val de Saire dans la Manche, par un astronome amateur qui l'a publié sur Internet. Les deux clichés ont été pris à $t_1 = 3$ h 24 et $t_2 = 6$ h 12, et sont donc espacés de $t_2 - t_1 = 168$ min.

La période de révolution de la Lune autour de la Terre (par rapport à un repère fixe, comme celui représenté par les étoiles lointaines) est de $P_L = 27{,}32$ jours soit $27{,}32 \times 24 \times 60$ min.

La Lune s'est donc déplacée par rapport aux étoiles d'un angle $\beta_{1,2}$ tel que :

3 Il en existait déjà des estimations avant Ératosthène. Voir l'article du n° 79 des Cahiers Clairaut à ce sujet (automne 1997).

$$\beta_{1,2} = \frac{(t_2 - t_1)}{P_L} \times 360 = \frac{168}{27{,}32 \times 24 \times 60} = 1{,}54°$$

Cet angle vaut environ trois fois le diamètre apparent de la Lune Φ_L (cf. le 2e paragraphe). Sur la figure 7, nous avons donc séparé les deux clichés obtenus à 3 h 24 et 6 h 12 de trois diamètres lunaires. Nous avons ensuite mesuré le diamètre du cercle qui s'ajustait au tracé de l'ombre terrestre sur ces deux clichés[4]. Nous avons trouvé :

$$Do/D_L = 2{,}76 \pm 0{,}2$$

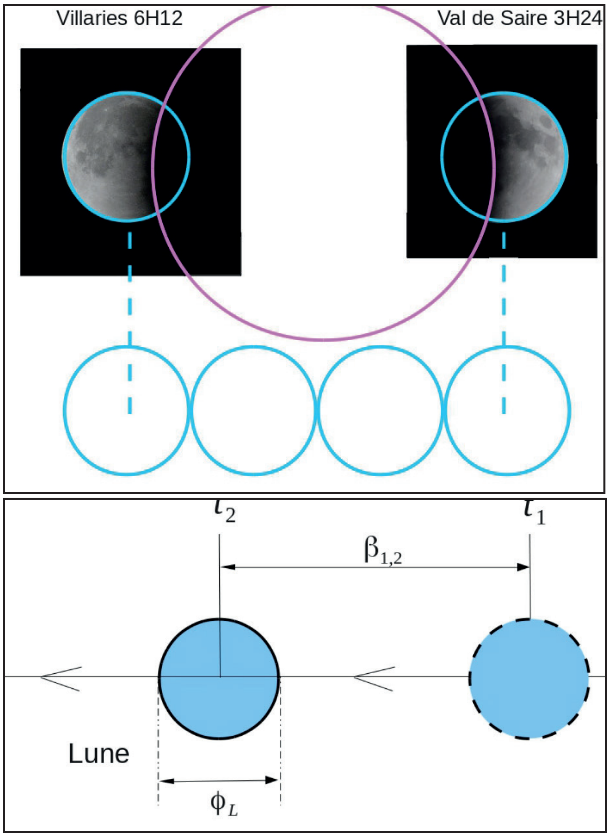

Fig. 7. Éclipse de Lune du 28/09/2015. La première figure est un montage de deux photographies séparées de l'angle correspondant au mouvement apparent de la Lune par rapport aux étoiles. Elle permet de mesurer la dimension de l'ombre terrestre (cercle rose) qui cause cette éclipse. La seconde figure illustre le mouvement apparent de la Lune $\beta_{1,2}$ par rapport aux étoiles, entre deux instants t_1 et t_2.

En faisant l'hypothèse d'Aristarque, qui supposait que le Soleil était à l'infini, on aurait $Do \approx D_T$ et $D_T / D_L = 2{,}76$. Le diamètre de la Lune serait alors de $D_L \approx D_T / 2{,}76$ soit $D_L \approx 12\,742 / 2{,}76 = 4\,617$ km.

C'est beaucoup plus que la valeur connue de 3 470 km ! L'hypothèse d'un Soleil à l'infini est donc inexacte et il nous faut calculer plus précisément les dimensions du cône d'ombre de la Terre au niveau de l'orbite lunaire.

D'après la figure 8, où d_{ST} est la distance Soleil-Terre, D_S et D_T sont respectivement le rayon du Soleil et de la Terre, et α est le demi angle de l'ouverture de ce cône, on a :

$$\tan\alpha = \frac{z}{d_{ST}} = \frac{D_S - D_T}{2d_{ST}}$$

Comme le diamètre de la Terre (DT = 12 700 km) est beaucoup plus petit que celui du Soleil

$$\tan\alpha \approx \frac{D_S}{2d_{ST}}$$

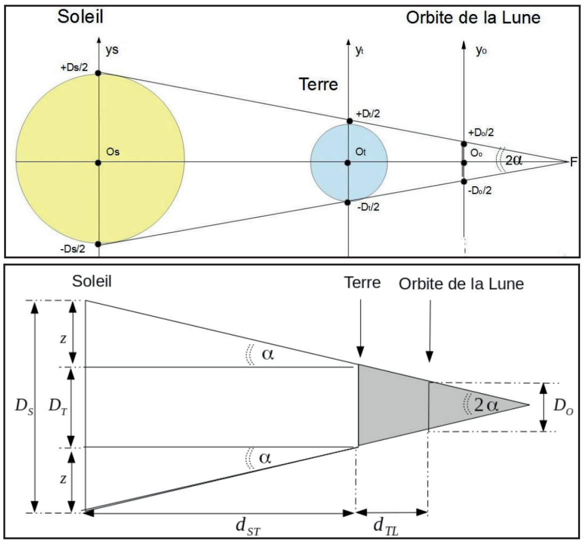

Fig. 8. Schéma général d'une éclipse de Lune (en haut) et paramètres utilisés pour le calcul du cône d'ombre (en bas).

(D_S = 1 392 000 km), on a :

Cet angle α est donc tout simplement la moitié de Φ_S, le diamètre apparent du Soleil vu depuis la Terre, que nous avons mesuré au 2e paragraphe. On a donc α = 0,539/2 et tan(α) = 0,004 61.

D'après la figure 8, le diamètre de l'ombre terrestre au niveau de l'orbite de la Lune (c.-à-d. à la distance d_{TL} de la Terre) est Do tel que :

$$Do = D_T - 2\, d_{TL} \tan\alpha$$

ou encore : $$\frac{Do}{D_T} = 1 - \frac{2d_{TL}\tan\alpha}{D_T}$$

Cette relation montre bien que l'hypothèse d'Aristarque n'est qu'une approximation, où on suppose que le second terme est nul. En utilisant les valeurs exactes, on trouve :

$Do/D_T = 1 - 2 \times 384\,400 \times 0{,}004\,61/12\,742 = 0{,}721$

À partir de nos observations de l'éclipse de Lune, où nous avons mesuré $Do/D_L = 2{,}76 \pm 0{,}2$ (cf. figure 7), nous pouvons donc en déduire une seconde estimation du diamètre de la Lune, qui est une valeur 0,721 fois plus petite que celle obtenue précédemment : $D_L \approx 0{,}721 \times 12\,742 / 2{,}76$

$$\boxed{D_L = 3\,333 \pm 200 \text{ km}}$$

4 On suppose que, pendant ces 168 minutes, l'ombre de la Terre est fixe par rapport aux étoiles, donc que la Terre ne tourne pas autour du Soleil.

Par rapport à la valeur connue D_L = 3 470 km, l'erreur n'est que de 137 km, soit une erreur relative est de 4 %. Cela montre bien qu'il était nécessaire de prendre en compte la forme conique de l'ombre terrestre.

Détermination de la distance Soleil Vénus (avec l'élongation maximale)

Vénus est la planète la plus proche de la Terre, facilement visible le matin peu de temps avant le lever du Soleil ou le soir peu après le coucher du Soleil. Elle semble être l'étoile la plus brillante du ciel et a souvent été appelée « l'étoile du berger ». On remarque que sa distance angulaire avec le Soleil, appelée élongation (cf. figure 9b) varie de jour en jour entre deux limites de –46° et +46° [5]. On le comprend facilement avec la figure 9c puisque Vénus est plus proche du Soleil que la Terre. Une propriété du cercle est que toute droite tangente au cercle en un point quelconque M est perpendiculaire au rayon passant par ce point M, on en déduit d'après cette figure que le triangle TVS est rectangle en V, et donc :

$$d_{SV} = d_{ST} \times \sin \beta$$

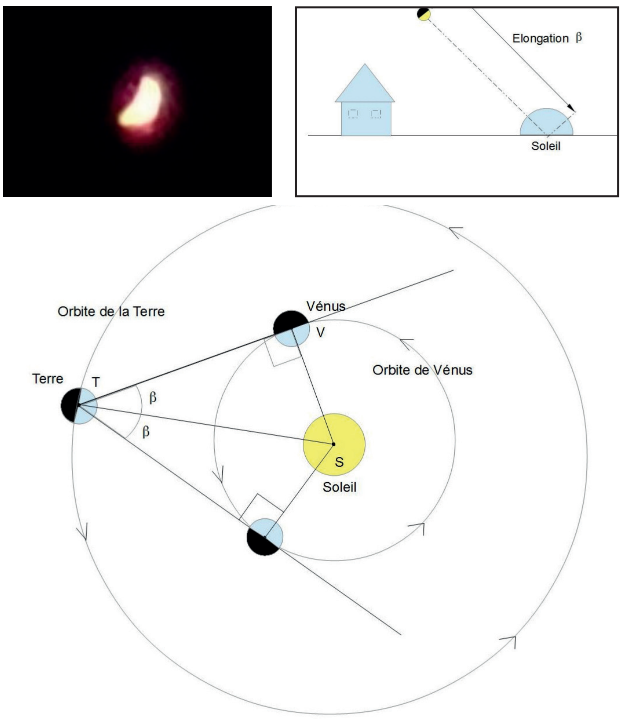

Fig. 9. Vénus et élongation maximale. (a) Cliché pris par l'auteur avec un Sony DSCHX50. (b) L'élongation β est la distance angulaire entre Vénus et le Soleil, vue depuis la Terre. (c) Sur le dernier schéma, l'élongation de Vénus est maximale.

5 L'orbite de Vénus étant elliptique ainsi que celle de la Terre, l'élongation maximale de Vénus varie entre 45° et 47,8°. Dans la suite, les orbites sont supposées circulaires.

La distance d_{ST} est souvent prise comme unité de mesure des distances dans le Système solaire, et est appelée unité astronomique (ua). L'élongation maximale β valant 46°, on en déduit que :

$$d_{SV} = 1 \times \sin(46°) \approx 0{,}71 \text{ ua}$$

En fait cette valeur de 46 degrés n'est pas très précise. La valeur admise actuellement pour la distance moyenne Soleil Vénus est 0,724 ua (détermination très précise avec un radar).

Conclusion

Nous sommes donc parvenu à refaire les expériences qui avaient conduit aux premières déterminations de distances et de diamètres en astronomie, en utilisant les mêmes méthodes. Cette façon de procéder présente l'avantage de ne pas demander de gros moyens et d'être accessible du point de vue théorique (avec le niveau d'un élève en classe de première S par exemple).

Nous avons travaillé à partir de données personnelles (expériences, photographies) ou bien nous avons utilisé des observations de club d'astronomie amateur accessibles sur Internet. L'accès à Internet nous a été aussi très utile pour fournir des mesures à la demande (distance entre deux endroits de la Terre par exemple), et plus généralement pour nous permettre d'apprendre de nouvelles choses.

À l'aide d'un simple appareil photo, nous avons observé et réalisé des mesures du monde macroscopique (diamètre de la Terre, de la Lune, distances de la Lune, du Soleil, etc.). Nous avons été surpris par la qualité des résultats que nous avons obtenus. Il est surprenant de constater que la simple mesure de la longueur de l'ombre d'un piquet pendant les vacances de Noël nous a conduit à déterminer le rayon de la Terre avec une précision de l'ordre de 50 km (erreur inférieure à 1 %) ! ■

Remerciements

Je tiens à remercier mes camarades du groupe de T.P.E., Doriane Clede, Maryon Dejean, et Hugo Louys, ainsi que toutes les personnes qui nous ont aidés lors de ces T.P.E., et en particulier Mme Artigues, M. Laude, M. Bressolles, du lycée Pierre Bourdieu de Fronton.

Quelques-uns des liens utilisés

http://www.apmep.fr/IMG/pdf/atelierM15.pdf (détermination de distances dans le système solaire, atelier CLEA)

http://www.timeanddate.com/astronomy/moon/distance.html (éphémérides de la Lune)

http://userpages.irap.omp.eu/ jprieur/cav (photos éclipse du Soleil)

http://www.vds-phl.fr/2015/09/eclipse-totale-de-lune-plein-lune-27-et-28-septembre-2015.html (photo du Val de Saire)

http://www.lexilogos.com/calcul_distances.htm(calcul de distances sur Terre)

http://www.coordonnees-gps.fr/ (coordonnées GPS de points sur Terre).