

# AVEC NOS ÉLÈVES

## Mesure de la durée de l'année tropique avec un sextant

Vincent Deparis, Lycée Jean Monnet, Annemasse (vincent.deparis@neuf.fr)

*Pour fabriquer un calendrier, il faut connaître précisément la durée de l'année des saisons. Vous trouverez ici une méthode originale pour obtenir le moment de l'équinoxe à l'heure près pour ensuite en déduire la durée de l'année tropique grâce à Hipparque.*

L'année est le temps mis par la Terre pour effectuer une révolution complète autour du Soleil. Il faut cependant préciser le point de référence utilisé et comme plusieurs choix sont possibles, cela implique différentes définitions : l'année sidérale est la durée d'une révolution de la Terre par rapport à la direction d'une étoile lointaine, l'année tropique, la durée d'une révolution par rapport à la direction du point vernal  $\gamma$  (direction du Soleil lors de l'équinoxe de printemps) et l'année anomalistique, la durée d'une révolution par rapport à un point de son orbite comme le périhélie. Dans cet article, nous nous intéressons uniquement à l'année tropique, qui est l'année des saisons. Sa définition exacte est délicate<sup>1</sup> et nous nous contenterons de définitions approximatives. Notre but est d'estimer sa durée à l'aide d'un sextant. Le travail a été réalisé au cours de l'année 2015-2016 avec trois élèves du lycée Jean Monnet (Annemasse) : Aliénor Arnaud, Mathieu Dabrowski et Gleb Zubov.

### Durée de l'année avec les mesures de culmination

La première définition de l'année tropique que nous utilisons est la suivante : c'est l'intervalle de temps entre deux passages du Soleil à la même hauteur de culmination, avec le même sens de variation. La hauteur du Soleil est l'angle, mesuré dans un plan vertical, entre la direction de l'horizon et la direction du Soleil. La hauteur de culmination est la hauteur maximale atteinte par le Soleil au cours de la journée, lorsqu'il passe dans la direction du sud (midi solaire).

La hauteur de culmination peut être mesurée grâce à un sextant (figure 1 – voir Les Cahiers Clairaut n°145 printemps 2014). L'instrument est idéalement

employé en mer mais il peut aussi être employé sur terre, en utilisant la réflexion du Soleil dans un petit récipient rempli d'eau (figure 2). Ce n'est plus l'angle entre l'horizon et le Soleil qui est mesuré mais l'angle, égal à deux fois la hauteur du Soleil, entre le Soleil réfléchi et le Soleil réel (figure 3). Au moment de la culmination, lorsque l'astre finit son mouvement ascendant et commence son mouvement descendant, sa hauteur ne semble pas varier pendant une bonne dizaine de minutes. On dispose donc d'un laps de temps suffisant pour effectuer plusieurs mesures et les confronter. Avec un peu d'entraînement, les mesures sont précises à 1' ou 2'.

Les mesures gagnent à être effectuées aux alentours des équinoxes du printemps ou d'automne car ce sont les deux moments de l'année où la déclinaison du Soleil varie le plus rapidement d'un jour à l'autre. Lors d'un projet précédent, des élèves du lycée avaient déjà mesuré la hauteur de culmination du Soleil en mars 2012. On effectue de nouvelles mesures trois ans plus tard (tableau 1).

Date	Hauteur de culmination du Soleil	
	Degrés (°)	Minutes (')
12/03/2012	40	45,5
12/03/2015	40	28
13/03/2015	40	53,5

**Tableau 1.** Hauteur de culmination du Soleil à trois ans d'intervalle (la hauteur est obtenue en divisant par 2 l'angle mesuré avec le sextant). On ne tient pas compte de la réfraction atmosphérique puisque l'on compare des mesures effectuées dans des conditions similaires.

Le 12 mars 2015, la hauteur du Soleil est un peu trop petite par rapport à la mesure du 12 mars 2012. Le lendemain, la hauteur est un peu trop grande. On peut donner un premier encadrement de l'année :

<sup>1</sup> J. Meeus et D. Savoie, « The history of the tropical year », Journal of the British Astronomical Association, vol. 102, n° 1, 1992, p. 40–42.

$3 \times 365 \text{ jours} < 3 \text{ années} < 3 \times 365 + 1 \text{ jours}$   
 soit,  $365 \text{ jours} < 1 \text{ année} < 365 + 1/3 \text{ jours}$   
 (il n'y a aucune année bissextile ici).

Pour trouver une valeur plus précise de l'année, on peut supposer que sur une journée la hauteur de culmination du Soleil varie proportionnellement au temps (cela revient à supposer que l'on se déplace le long du même parallèle pour suivre la hauteur de culmination pour différents lieux terrestres de même latitude). En une journée, entre le 12 et le 13 mars 2015, l'angle mesuré a augmenté de  $25,5'$ . Or pour atteindre la même valeur que celle du 12 mars 2012, il n'aurait dû augmenter que de  $17,5'$  (différence entre  $40^\circ 45,5'$  et  $40^\circ 28'$ ). Cet accroissement est atteint au bout de  $17,5/25,5 = 0,69 \text{ jour}$ .

Trois années tropiques durent :

$$3 \times 365 + 0,686 = 1\,095,686 \text{ jours}$$

La durée d'une année tropique est donc :

$$1\,095,686/3 = 365,23 \text{ jours}$$

Nous pouvons donner une estimation de notre précision. Puisque la hauteur de culmination du Soleil aux alentours de l'équinoxe varie de  $25,5'$  par jour, une erreur de  $1'$  sur la mesure de hauteur (précision du sextant) occasionne une erreur en temps de  $0,04 \text{ jour}$ , soit environ  $1 \text{ h}$ . Puisque l'intervalle de mesures est de 3 ans, l'erreur sur la durée de l'année tropique est d'environ  $20 \text{ min}$ . Pour améliorer la précision de la détermination, il faudrait disposer de mesures séparées par un plus grand intervalle de temps. L'erreur commise serait réduite car divisée par un plus grand nombre d'années. Malheureusement, nous ne disposons pas de telles données.

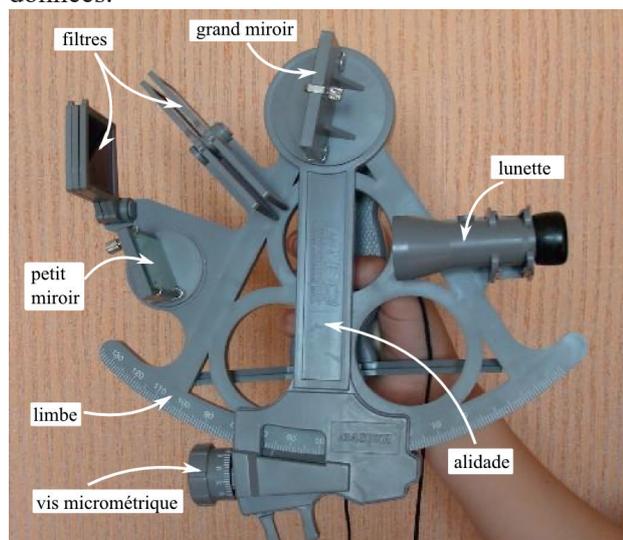


Fig.1. Le sextant. Le grand miroir est solidaire de l'alidade mobile, le petit miroir est semi-réfléchissant.



Fig.2. Le reflet du Soleil dans un petit récipient rempli d'eau permet l'utilisation du sextant sur Terre.

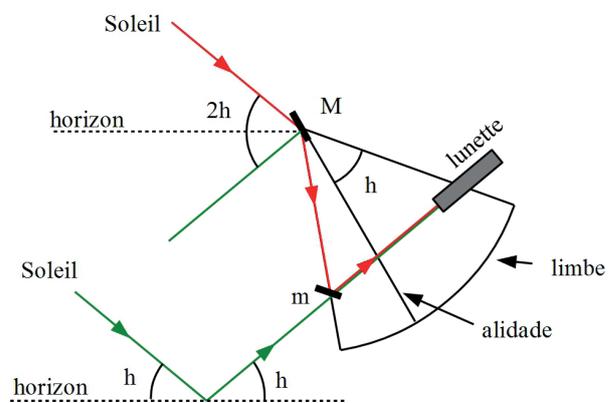


Fig.3. L'angle entre le Soleil reflété et le Soleil réel est égal à deux fois la hauteur du Soleil.

## Durée de l'année en utilisant les équinoxes

Une deuxième définition de l'année tropique est la durée moyenne écoulée entre deux équinoxes de printemps successifs. Il est très intéressant de travailler avec les équinoxes car, d'une part, la détermination de la date de l'équinoxe est indépendante du lieu d'observation et, d'autre part, les astronomes donnent les dates des équinoxes et des solstices depuis très longtemps. Nous savons par exemple qu'Hipparque, un astronome ayant vécu sur l'île de Rhodes à la fin du II<sup>e</sup> siècle avant J.-C., a établi que l'équinoxe de printemps de l'année  $-145$  est survenu le 24 mars au moment du lever du Soleil (vers 6 h, heure de Rhodes)<sup>2</sup>. En déterminant le moment de l'équinoxe de printemps de 2015, nous pourrions connaître la durée correspondant à 2160 années tropiques (2 015

<sup>2</sup> Tannery Paul, Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne, Paris, Gauthier-Villars, 1893, p. 153. La date est donnée dans le calendrier julien sous la forme qu'utilisent les astronomes avec une année négative (en comptant une année 0), on est donc en 146 av. J.-C.

+145) et ainsi affiner la mesure de la durée moyenne de l'année tropique.

Les équinoxes et les solstices sont définis grâce à la déclinaison du Soleil, qui est l'angle, mesuré depuis le centre de la Terre, entre la direction du Soleil et le plan équatorial de la Terre (figure 4). Cet angle ne dépend pas du lieu d'observation. Il varie très lentement au cours de l'année. Les équinoxes surviennent lorsqu'il est nul, le solstice d'été, lorsqu'il est maximal et égal à l'obliquité de l'écliptique ( $23^{\circ} 26'$ ) et le solstice d'hiver, lorsqu'il est minimal et égal à  $-23^{\circ} 26'$ . La déclinaison  $\delta$  du Soleil se calcule en mesurant la hauteur  $h$  de culmination du Soleil tout en connaissant la latitude  $\varphi$  du lieu d'observation. Nous avons la relation suivante :  $d = j + h - 90^{\circ}$ . La déclinaison solaire ne peut donc être déterminée simplement qu'une seule fois par jour, au moment du midi solaire.

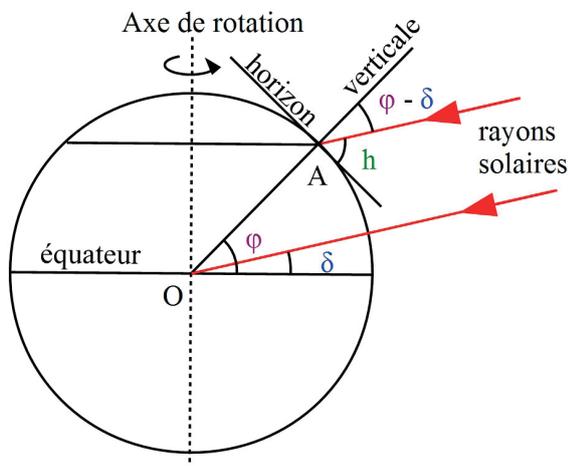


Fig.4. Lorsque le Soleil passe au méridien, sa position dans le ciel est repérée par sa hauteur  $h$  depuis un lieu d'observation  $A$  et par sa déclinaison  $\delta$ . La latitude du lieu  $A$  est  $\varphi$ .

Nous avons effectué 6 mesures de culmination avec le sextant avant et après l'équinoxe de printemps (tableau 2). La hauteur  $h_{mesurée}$  du Soleil est égale à la moitié de l'angle lu sur le sextant (réflexion sur un plan d'eau).

Ces hauteurs mesurées sont diminuées de  $1'$  (valeur approximative de la réfraction atmosphérique) :  $h_{corrigée} = h_{mesurée} - 1'$ . Connaissant  $h_{corrigée}$  et la latitude du lieu ( $\varphi_{lycée} = 46^{\circ} 10' 56'' = 46,182^{\circ}$ ), on en déduit la déclinaison  $\delta$  du Soleil. Pour les dates, on considère que  $t = 0$  à minuit dans la nuit du 28 février au 1<sup>er</sup> mars. Ainsi dans l'expression des dates, la partie entière donne directement le jour du mois de mars et la partie décimale donne les heures. Les heures indiquées sont exprimées en temps universel (temps de la montre moins 1 h, puisque nous sommes à l'heure d'hiver).

Le moment approximatif de la culmination a été calculé en tenant compte de la longitude du lycée et de l'équation du temps (la précision n'a pas besoin d'être grande puisque la déclinaison solaire varie lentement).

La modélisation des mesures donne la droite d'équation :  $\delta(t) = 0,3929 t - 8,2670$ .

L'équinoxe a lieu lorsque  $\delta(t) = 0$ , soit

$$t = \frac{8,2670}{0,3929} = 21,041 \text{ jours}$$

La date de l'équinoxe de printemps est donc le 21 mars à 0 h 59 min.

Date		Sextant		$h_{mesurée}$	$h_{corrigé}$	déclinaison
	jours	°	'	°	°	°
10 mars 11 h 44	10,489	79	21	39,675	39,658	-4,16
12 mars 11 h 44	12,489	80	56	40,467	40,450	-3,37
13 mars 11 h 44	13,489	81	47	40,892	40,875	-2,94
17 mars 11 h 44	17,489	84	54	42,450	42,433	-1,38
19 mars 11 h 44	19,489	86	26	43,217	43,200	-0,62
23 mars 11 h 44	23,489	89	35	44,792	44,775	0,96

Tableau 2 : Mesures au sextant pour déterminer le moment de l'équinoxe de printemps 2015.

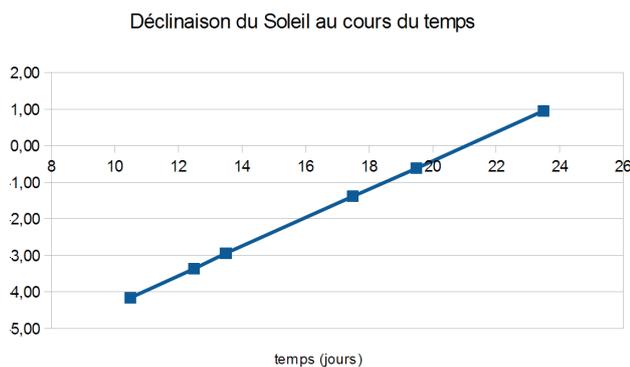


Fig. 5. Variation de la déclinaison solaire aux alentours de l'équinoxe de printemps 2015.

Nous pouvons estimer la précision de notre résultat. Supposons que toutes nos mesures soient erronées de +1' (par exemple l'instrument est mal réglé et occasionne une erreur systématique). Quelle est la répercussion pour la date de l'équinoxe ? Nous trouvons que l'équinoxe survient le 20 mars à 23 h 58 min, soit 1 h plus tôt. Notre détermination de l'équinoxe est donc précise à 1 ou 2 h près. Le site de l'IMCCE (Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides) donne la date vraie de l'équinoxe : le 20 mars à 22 h 45 min.

Nous disposons des dates de deux équinoxes :

- mesure d'Hipparque, le 24 mars -145 à 6 heures (heure de Rhodes). Il faut convertir les heures en temps universel. La longitude de Rhodes est de 28° 13', ce qui occasionne un décalage temporel de 1 h 53 min avec le méridien origine de Greenwich. L'équinoxe de printemps de l'année -145 est donc survenu le 24 mars vers 4 h (temps universel) ;
- notre mesure : le 21 mars à 0 h 59 min (temps universel).

Pour calculer l'intervalle de temps entre les deux dates, nous utilisons les jours juliens. Le jour julien est la base d'un système de datation consistant à compter le nombre de jours écoulés depuis une date conventionnelle fixée au 1er janvier -4712 à 12 h 00. Un programme disponible sur le site de l'IMCCE permet de transformer n'importe quelle date en jours juliens<sup>3</sup> :

- le 24 mars -145 à 4 h : 1 668 178,67 jours juliens
- le 21 mars 2015 à 0 h 59 min : 2 457 102,54 jours juliens.

3 <http://www.imcce.fr> (grand public / jour julien).

La première date (-145) est exprimée dans le calendrier julien proleptique, calendrier julien étendu aux dates antérieures à son introduction officielle en 45 av. J.-C., la seconde (2015) dans le calendrier grégorien commençant le 15 octobre 1582. Le calcul du jour julien effectué par le programme de l'IMCCE utilise ces deux calendriers suivant que l'on est avant le 4/10/1582 ou après le 15/10/1582.

Le nombre de jours écoulés entre les deux équinoxes est donc de :

$$2\,457\,102,54 - 1\,668\,178,67 = 788\,923,87 \text{ jours}$$

En divisant par le nombre d'années (2 160 = 2 015 + 145), on obtient la durée moyenne de l'année tropique :

$$1 \text{ année tropique} = 365,2425 \text{ jours}$$

Les historiens estiment que pendant l'Antiquité, la détermination des équinoxes est précise entre un quart de jour et un demi jour près. Notre propre erreur est de 1 à 2 heures. Pour fixer les idées et estimer notre erreur, calculons la répercussion d'une erreur de 1 jour ramenée aux 2 160 années :  $1/2\,160 = 0,0005 \text{ jours} = 40 \text{ s}$ . La durée moyenne de l'année tropique est donc, selon notre définition :

$$1 \text{ année tropique} = 365,2425 \pm 0,0005 \text{ jours}$$

## Interpolation des mesures

En guise de conclusion, nous pouvons relever un point intéressant concernant les deux méthodes employées ici : celui de l'interpolation des mesures. En effet, les mesures de culmination du Soleil ne peuvent être effectuées, bien évidemment, qu'une seule fois par jour. Or, par exemple pour la détermination de l'équinoxe, il y a peu de chances que la déclinaison solaire s'annule exactement au moment du midi solaire pour le lieu d'observation. L'équinoxe peut survenir à n'importe quel moment de la journée ou même la nuit lorsque les mesures sont impossibles. Il est donc nécessaire d'effectuer plusieurs mesures avant et après l'équinoxe (de manière symétrique si possible) et de les interpoler pour trouver le moment où la déclinaison s'annule. Cette méthode d'interpolation est très simple, elle a pourtant longtemps échappé au professeur encadrant, qui se demandait comment on pouvait déterminer un équinoxe à 6 h du matin par exemple, en effectuant uniquement des mesures à midi solaire.