Indications pour réaliser un TP à la découverte des espaces courbes

Pacôme Delva et Marie-Christine Angonin
du SYRTE, Observatoire de Paris, PSL Research University,
CNRS, Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris 06, LNE

Ceci n'est pas un TP clefs en main : il propose plusieurs activités pour partir à la découverte des géométries des espaces courbes, que l'on peut relier à une introduction à la théorie de la relativité générale, par exemple l'article p. 2 de ce même numéro. Il conviendra d'adapter ces activités au niveau de la classe et au temps dont l'on dispose.

Objectifs

- Découvrir quelques conséquences de la géométrie d'une surface courbe (somme des angles d'un triangle, géodésiques) ;
- Comparer la géométrie plane et la géométrie courbe ;
- Découvrir quelques conséquences astrophysiques de l'espace-temps courbe.

Matériel

- Pour les élèves : papier bristol (quadrillé), ruban adhésif de couleur (ou fil et punaises), agrafeuse, ciseaux, règle, rapporteur, crayon ;
- Pour l'introduction : un planisphère et un globe terrestre.

Activités

Introduction sur la courbure

Le but de l'introduction est de faire prendre conscience aux élèves qu'il y a des différences entre les surface courbes et les surfaces planes. Pour cela on leur propose de comparer le chemin le plus court entre deux villes éloignées sur Terre, sur un planisphère et sur un globe terrestre :
- sur le planisphère, le trajet le plus direct est la ligne droite. On peut tracer cette ligne sur le planisphère, puis la reproduire sur le globe terrestre ;
- sur le globe terrestre, le trajet le plus direct est une portion d'un grand cercle (une des géodésiques de la sphère). On peut le tracer à l'aide d'un scotch, d'une règle souple qui épouse la forme du globe ou encore d'un fil tendu entre deux punaises.

En comparant les deux trajectoires, on se rend compte qu'elles sont différentes et qu'elles n'ont pas la même longueur : la plus longue est celle qui correspond à la ligne droite du planisphère. On en déduit que les lignes droites du plan ne sont pas les mêmes que les « lignes droites » (au sens de plus court chemin d'un point à un autre) de la sphère : la géométrie est différente.

La sphère a une courbure constante positive alors que le plan a une courbure nulle partout. Cette différence se manifeste dans le fait qu'il est impossible de fabriquer une sphère à l'aide de petits bouts de papier plats.

Le posicône

1) Rappel sur le triangle

Chaque élève trace un triangle sur une feuille et mesure ses trois angles à l'aide du rapporteur, puis vérifie que la somme des angles fait bien 180 degrés.

2) Fabrication d'un posicône

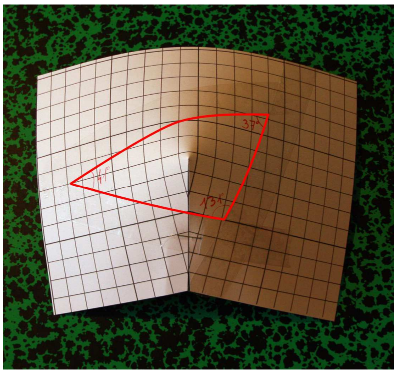
Chaque élève découpe une tranche dans le papier bristol comme illustré ci-dessous, puis ramène les deux bords et les agrafe ensemble. On obtient alors un posicône, c'est à dire un cône avec un point de courbure positive. Toute la courbure de cette surface est concentrée à la pointe du cône, alors que tout point en dehors de la pointe a une courbure nulle. La courbure totale de ce posicône est non nulle, ce qui se caractérise par le fait qu'il est impossible de l'aplatir sans le déchirer. Cependant, toute surface ne contenant pas la pointe du cône peut s'aplatir sans se déchirer, ce qui caractérise le fait que la courbure est nulle en dehors de la pointe du cône.

3) Comment tracer une géodésique ?

Les géodésiques sont les « lignes droites » d'une surface courbe, c'est-à-dire les trajectoires qui minimisent la distance parcourue entre deux points. Sur un plan, ce sont les droites que l'on trace à l'aide d'une règle. Sur le posicône, on peut utiliser le rouleau de ruban adhésif pour tracer les géodésiques : il faut coller le ruban bien à plat (sans déformations) sur le papier bristol. On peut vérifier, lorsque l'on enlève les agrafes et que l'on aplatit le posicône, que le ruban adhésif suit en fait une ligne droite pourvu qu'il ne passe pas sur la pointe du cône. Ceci révèle le fait que les surfaces en dehors de la pointe du cône sont de courbures nulles, et partagent donc les mêmes géodésiques que le plan : des droites. Il est aussi possible de tracer ces droites avec une règle en aplatissant partiellement le posicône, mais c'est moins pédagogique et ne fonctionnera pas avec une surface de courbure constante comme la sphère.

4) La somme des angles d'un triangle, ou comment mesurer la courbure totale ?

Demander à chaque élève de dessiner un triangle grâce au ruban adhésif.



Chaque côté du triangle doit être une « ligne droite », ou géodésique, et on veillera donc à ce que le ruban adhésif qui représente un des côtés du triangle soit collé bien à plat sans pliures. On demandera à quelques élèves de dessiner leur triangle de façon à ce que la pointe du posicône soit en dehors, et aux autres d'inclure la pointe à l'intérieur du triangle.

Ensuite, on défait les agrafes et on met la surface à plat (pour cela il faut découper un des côtés du triangle). Cela permet de mesurer à plat chaque angle formé par les trois sommets du triangle. Demander à chaque groupe de faire la somme de ces trois angles. On peut recueillir les résultats de chaque groupe et les regrouper sous la forme d'un tableau, et réfléchir ensemble à la signification des résultats (qui sont à priori tous différents).

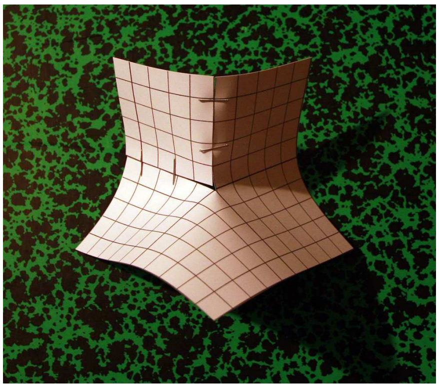
Voici quelques conclusions auxquelles on peut aboutir : seuls quelques élèves obtiennent 180° pour la somme (aux erreurs de mesures près), ceux dont le triangle ne contient pas la pointe du posicône ; tous les autres groupes obtiennent un résultat supérieur à 180° ; la différence entre le résultat obtenu et 180° correspond à l'angle formé par la portion de feuille que l'on a retirée, ce que l'on nomme un *excès d'angle* par référence au résultat obtenu sur une surface plane. Cet excès d'angle correspond à la *courbure totale*[3] de la surface délimitée par le triangle.

En conclusion de cette expérience, nous connaissons une procédure qui nous permet de mesurer la courbure totale d'une surface, et que l'on peut réutiliser pour mesurer la courbure totale d'autres surfaces.

Le négacône

1) Fabrication d'un négacône

Pour fabriquer un négacône, ou selle de cheval, on ajoute une portion d'angle au papier bristol. C'est l'inverse du procédé précédent (voir l'illustration ci-dessous). D'abord, on découpe une portion de papier bristol



(comme une portion de pizza) que l'on met de côté. Ensuite avec une feuille non utilisée, on découpe une ligne droite, puis on écarte les deux côtés de cette découpe pour y insérer la portion de papier bristol. Enfin, on agrafe pour faire tenir ensemble la feuille de bristol avec la portion insérée.

On obtient alors un point de courbure négative. La surface ainsi formée à une forme de selle de cheval. Comme dans le cas du posicône, toute la courbure de cette surface est contenue dans la « pointe » du négacône ; tout point en dehors de la « pointe » a une courbure nulle.

2) Somme des angles d'un triangle

On peut répéter l'expérience faite avec le posicône : on trace un triangle (contenant le point de courbure négative) grâce au papier adhésif. On détache les agrafes et on mesure la somme des angles des sommets du triangle. Cette somme est inférieure à 180° : la différence entre 180° et le résultat obtenu est égale à l'angle formé par la portion de papier ajoutée : c'est un *défaut d'angle*, par référence au résultat obtenu pour une surface plane. Ce défaut d'angle est égal à la courbure totale contenue dans le triangle, celle-ci ayant un signe négatif.

[3]La courbure totale d'une surface est l'intégrale de surface de la courbure de Gauss. Elle se mesure en degrés ou en radians. Par exemple, la courbure totale d'une sphère est 4p ; en effet, une sphère peut se décomposer en huit triangles équilatéraux qui ont chacun un excès d'angle - donc une courbure totale - de valeur p/2 ; la courbure totale de la sphère est alors la somme des courbures totales de chacun des triangles équilatéraux. On en déduit la courbure de Gauss de la sphère en divisant sa courbure totale par sa surface : 4p/(4pR²) = 1/R².

Pour aller plus loin

Voici quelques questions qui permettent de mettre en œuvre les concepts et procédures que l'on a découverts dans les activités précédentes.

Comment fabriquer une surface de courbure totale nulle contenant un posicône et un négacône ?

Il faut que la courbure totale du posicône soit égale à celle du négacône (on ajoute une portion d'angle pour le négacône égale à celle enlevée pour le posicône). En effet, les courbures s'additionnent (avec un signe négatif pour les courbures négatives). On peut le vérifier en traçant un triangle contenant les deux points de courbure (grâce au ruban adhésif), et en montrant que la somme des angles du triangle est égale à 180° (sauf erreur de construction). La courbure totale est donc nulle.

Comment tracer un triangle rectangle équilatéral ?

La somme des angles d'un triangle rectangle équilatéral doit être égale à (90° * 3) = 270°. Il faut donc fabriquer un posicône de courbure totale (270°-180°) = 90°, en enlevant une portion de la feuille de bristol d'angle égal à 90°.

L'espace-temps de la relativité générale

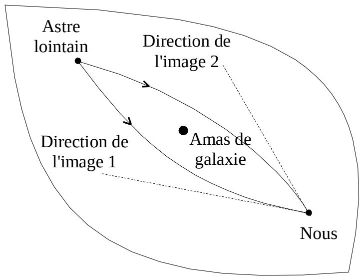
L'espace-temps est un espace à quatre dimensions (voir l'article page 2). Dans la théorie de la relativité générale développée par Einstein, la masse courbe (positivement) l'espace-temps. Plus la masse est compacte (une grande masse dans un petit volume), et plus la courbure est grande. Par exemple le Soleil courbe l'espace-temps du Système Solaire. Il est possible grâce à des expériences de mesurer cette courbure.

Par contre, il est impossible de s'imaginer la courbure d'un espace à quatre dimensions. On peut pourtant faire une analogie avec la courbure des surfaces. Le posicône que l'on a fabriqué contient un point de courbure positive. Ce point pourrait correspondre à notre Soleil si nous vivions dans un monde à deux dimensions (imaginez-vous en petite fourmi évoluant sur une surface). En fait, le Soleil n'est pas un point : il est étendu. La courbure de la surface devrait être continue. Il faut alors s'imaginer un posicône abrasé. Par exemple, pour une calotte sphérique la courbure est continûment répartie (il n'y a pas de cassure, de pliure ou de pointe). La lumière subit les déformations de l'espace-temps : les rayons lumineux suivent les géodésiques de l'espace-temps courbe.

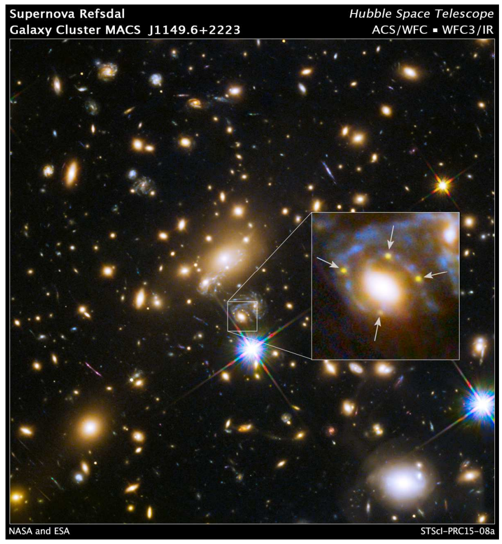
Les lentilles gravitationnelles, ou comment fabriquer un biangle ?

Fabriquons un posicône de courbure totale suffisamment élevée (par exemple 180°). On trace facilement deux géodésiques qui se coupent en deux points. Elles forment alors un biangle, dont la somme des angles des deux sommets est égale à 180°. En théorie il est possible de former un biangle avec n'importe quel posicône, mais plus la courbure totale est faible et plus les deux géodésiques se croiseront loin.

Conséquence astrophysique : il y a des amas de galaxies dans l'univers qui déforment tellement l'espace-temps autour d'eux qu'ils perturbent la propagation de la lumière qui passe à proximité. Dans notre exemple avec le posicône, les deux rubans adhésifs peuvent représenter les trajectoires de deux rayons lumineux. L'observateur situé à l'un des croisements des deux rayons verrait alors deux images du même astre (voir dessin).



Sur la photographie prise par le Hubble Space Telescope (HST), les quatre points brillants jaunes pointés par des flèches (partie zoomée de l'image) sont les images d'une même supernova située à 9,3 milliards d'années-lumière.



En effet, sur la ligne de visée de la supernova, à cinq milliards d'années-lumière, se trouve une galaxie massive (située dans un amas de galaxie plus large) qui déforme l'espace-temps. Ce phénomène se nomme lentille gravitationnelle, et la forme en croix des quatre images de la supernova une croix d'Einstein.

Quelques références

Ces idées de TP sont tirées de deux références :

- « Les aventures d'Anselme Lanturlu : le trou noir », de Jean-Pierre Petit. C'est une bande-dessinée téléchar-geable gratuitement à l'adresse : http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/trou_noir.htm
- Paper models of surfaces with curvature, Howard Iseri, Mansfield University : http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/SN/ScArt3/iseri-2003.pdf

■