ARTICLE DE FOND

Chaos dans le système solaire ?

Philippe Robutel, *IMCCE, Observatoire de Paris*

Une évolution historique de la modélisation mathématique des trajectoires des planètes du système solaire ou comment on passe progressivement d'un monde idéalement stable à un autre très probablement chaotique sur le long terme.

Le désordre engendré par les perturbations planétaires

En découvrant la force qui conditionne le mouvement des corps célestes, Newton en 1686 permit la vérification des lois établies empiriquement par Kepler, tout en introduisant un léger désordre dans le mouvement des planètes.

Cette force de gravitation, qui attire deux corps pesants, est proportionnelle au produit de la masse de chacun des corps en interaction et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Ainsi, quand Jupiter et Saturne sont en conjonction, la distance entre Jupiter et le Soleil est à peu près égale à celle entre Jupiter et Saturne, mais la prépondérance de la masse du Soleil sur celle de ces deux planètes fait que la force de gravitation exercée pas notre étoile sur Jupiter est environ 3 500 fois plus grande que celle que Saturne lui fait subir. La force exercée par le Soleil sur les planètes étant largement prédominante, les interactions gravitationnelles entre les planètes ne sont que des perturbations. En l'absence de ces perturbations, conformément aux lois énoncées par Kepler, les planètes graviteraient sur des ellipses dont le Soleil serait l'un des foyers. Leur mouvement serait parfaitement régulier et donc prédictible. L'existence des interactions planétaires perturbe ces mouvements ; ils restent proches des trajectoires décrites par les lois de Kepler pendant un certain temps du fait de la prépondérance de l'attraction solaire puis s'en éloignent au cours du temps, rendant problématique la prédiction de leur trajectoire. Newton lui-même, en suspectant que l'accumulation des perturbations pouvait désorganiser un système si bien réglé, émettait des doutes sur la capacité du système solaire à conserver sa régularité.

Ainsi, une question fondamentale de la science du XVIII[e] siècle était de savoir si, d'une part, la loi de Newton suffisait à rendre compte du mouvement des planètes et d'autre part si le système solaire était stable malgré l'effet des perturbations planétaires.

Des perturbations « sous contrôle »

La question fut d'abord résolue par Lagrange et Laplace dont les travaux complémentaires apportèrent la « preuve » de la stabilité du système solaire. Comme les ellipses donnent, au moins temporairement, une bonne approximation des orbites des planètes, une des idées développées par Laplace fut de s'intéresser aux déformations à longues périodes des éléments de ces ellipses, mouvements dits séculaires.

En 1773, Laplace expose devant l'Académie des Sciences, sa démonstration du fait que les demi-grands axes des planètes n'ont pas de variation séculaire. Ils subissent de petites variations périodiques, ou plutôt quasi-périodiques[1], dont les périodes sont de l'ordre de grandeur des périodes de révolution des planètes. Il s'agit donc de variations à courtes périodes (de l'ordre de quelques mois à quelques années, par opposition aux variations séculaires), mais qui surtout sont bornées. L'année suivante, Lagrange soumet à l'Académie son nouveau mémoire sur le mouvement séculaire des inclinaisons et des nœuds des planètes (la ligne des nœuds étant l'intersection du plan orbital de la planète avec un plan de référence, le plan de

[1] On peut voir un mouvement quasi-périodique comme la composition de plusieurs mouvements périodiques distincts. Si, pour un mouvement périodique, on retourne au point de départ après un laps de temps appelé période, il n'en est pas de même pour un mouvement quasi-périodique. Pour de tels mouvements, il n'y a pas de retour à la position initiale, mais on peut en passer aussi près qu'on le souhaite, à condition d'attendre suffisamment longtemps.

l'écliptique par exemple). Dans ce mémoire, où apparaît pour la première fois les équations différentielles linéaires à coefficients constants, Lagrange montre que les inclinaisons sont bornées et varient de manière quasi-périodique. La même année, Laplace, en s'inspirant des travaux de Lagrange, donnera un énoncé similaire portant sur les excentricités et le mouvement des périhélies planétaires.

La stabilité du système solaire est donc avérée. Les demi-grands axes des planètes ne subissent pas de variation séculaire. Ils sont constants à de petites variations à courtes périodes près. Les excentricités et inclinaisons des planètes ne subissent que des variations périodiques (principalement à longues périodes) autour de leurs valeurs moyennes. Les orbites sont donc parfaitement contraintes et les variations de la forme et des mouvements des ellipses sont suffisamment petites pour que les orbites planétaires ne se coupent jamais, interdisant toute collision ou même rencontre entre planètes. Cette vision du système solaire est très différente de celle qu'en avait Kepler : les ellipses se déforment tout en étant animées d'un double mouvement de précession dont les périodes vont de 45 000 ans à quelques millions d'années, l'un autour d'un axe perpendiculaire au plan de l'ellipse et l'autre autour d'un axe perpendiculaire à un plan de référence fixe (par exemple le plan de l'écliptique à une date donnée). Mais, comme avec des orbites képlériennes, tous les mouvements sont parfaitement réguliers et prédictibles.

Les petits diviseurs sèment le doute

Ces travaux, même s'ils ont fait grandement avancer la mécanique céleste et certaines branches des mathématiques, ne fournissaient pas une preuve irréfutable de la stabilité du système solaire, mais plutôt de la stabilité que prédit le modèle utilisé. Pour simplifier les équations et ainsi pouvoir les résoudre, seuls les termes principaux[2] étaient retenus. Ce procédé fournissait des solutions représentant très correctement le mouvement des orbites planétaires sur un intervalle de temps long, mais fini. En aucun cas les résultats obtenus à l'aide de telles approximations ne pouvaient avoir de sens sur une durée de temps arbitraire.

Le Verrier après son succès apporté par la prédiction de la position de la nouvelle planète Neptune par le calcul des perturbations qu'elle exerçait sur le mouvement d'Uranus, s'attacha à améliorer les approximations faites par Lagrange et Laplace. Il montra que l'ajout de termes négligés par ces derniers apportait des corrections non négligeables à leurs calculs, qui ne pouvaient donc plus être utilisés sur des durées indéterminées. Tout en poussant plus avant les théories des perturbations, Le Verrier semblait douter de l'efficacité des méthodes des approximations successives pour prédire avec la précision voulue le mouvement des planètes.

Il n'est pas question d'aborder ici la nature des séries utilisées en mécanique céleste. Disons simplement qu'une des techniques résidait en la résolution par approximations successives des équations régissant le mouvement des planètes du système solaire. Le principe étant le suivant : calculons d'abord une première approximation des solutions des équations, par exemple celle pour laquelle le mouvement des planètes suit les lois de Kepler, et supposons que la solution exacte est égale à cette dernière plus une (petite) quantité inconnue. En injectant la solution ainsi construite, dans les équations initiales, on est en mesure d'écrire l'équation dont la perturbation que l'on a ajoutée est solution. On résout alors approximativement cette nouvelle équation et on itère le processus. L'idée étant qu'à chaque itération, on s'approche de plus en plus de la solution exacte de l'équation initiale.

Le Verrier fut le premier à suspecter que l'apparition, dans ces calculs, de termes appelés « petits diviseurs » tendait à ne pas faire diminuer la taille des termes perturbateurs successifs autant que les astronomes ne l'imaginaient. Constatation qu'il exprimait sous la forme « *Ces termes acquièrent*

[2] Deux approximations importantes sont utilisées dans ces travaux. D'abord le recours au système séculaire : en écrivant les équations qui régissent les déformations des ellipses représentant les orbites planétaires, on constate qu'elles comportent des termes à courte période (périodes des planètes sur leurs orbites) et d'autres à beaucoup plus longues périodes dits termes séculaires. On construit le système séculaire en calculant la moyenne de ces équations sur les courtes périodes, moyenne que l'on obtient par approximations successives. La partie principale est de l'ordre des masses planétaires (petite devant la masse solaire) et les termes suivants sont proportionnels au carré, au cube et aux puissances supérieures des masses planétaires. Lagrange et Laplace se sont limités à la partie principale, dit système séculaire d'ordre un des masses. La deuxième approximation consiste à faire un développement du second membre des équations séculaires en puissance des excentricités et inclinaisons limité à un degré donné. Les excentricités et inclinaisons planétaires étant faibles Lagrange et Laplace se sont limités à l'ordre un de ces quantités. Il s'agissait donc d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

par l'intégration de très petits diviseurs ; et ainsi il en résulte, dans les intégrales, des termes dus à la seconde approximation, et dont les coefficients surpassent ceux de la première approximation. Si l'on pouvait répondre de la valeur absolue de ces petits diviseurs, la conclusion serait simple : la méthode des approximations successives devrait être rejetée ». Il remarqua également que ces diviseurs dépendaient de la valeur des demi-grands axes moyens des planètes et en conclut que ce qui se produit pour les planètes du système solaire peut être totalement différent si l'on prend d'autres valeurs des demi-grands axes. D'où l'idée que les solutions fournies par les méthodes d'approximations successives ne représentent pas avec le même degré de fidélité les solutions exactes lorsque l'on fait varier les paramètres du système considéré (masses planétaires connues à cette époque assez peu précisément, demi-grands axes moyens…).

Cette idée que la convergence des séries issues de la théorie des perturbations dépend de la valeur de paramètres, ou des conditions initiales, sera formalisée par Henri Poincaré quelques années plus tard. Il montra d'abord qu'on ne pouvait pas résoudre les équations du problème des trois corps (par exemple Jupiter, Saturne, Soleil) comme on le faisait pour celui des deux corps. Tout espoir de trouver une solution exacte du mouvement des planètes du système solaire était donc à abandonner ; la seule issue restante était la construction de solutions approchées, par les méthodes que fournissait la théorie des perturbations. Poincaré, en simplifiant les méthodes d'approximations successives utilisées par les astronomes, précisa comment résoudre, à tout ordre, les équations ainsi obtenues. Il montra également que l'apparition des petits diviseurs inhérents à ces méthodes entraînait la divergence des séries ainsi construites. Mais ces séries, divergentes au sens des mathématiciens, pouvaient fournir des approximations des mouvements planétaires très satisfaisantes à condition de se limiter à un intervalle de temps fini : « *Les termes de ces séries, en effet, décroissent d'abord très rapidement et se mettent ensuite à croître ; mais, comme les astronomes s'arrêtent aux premiers termes de la série et bien avant que ces termes aient cessé de décroître, l'approximation est suffisante pour les besoins de la pratique. La divergence de ces développements n'aurait d'inconvénients que si l'on voulait s'en servir pour établir rigoureusement certains résultats, par exemple la stabilité du système solaire*[3]».

En conséquence, si les méthodes utilisées par les astronomes peuvent prédire avec grande précision le mouvement des planètes sur un intervalle de temps fini, elles ne peuvent, en aucun cas, être utilisées pour prédire la stabilité perpétuelle du système solaire. La question reste encore une fois entière.

Des mathématiciens au secours du système solaire

En reprenant les travaux de Poincaré portant sur la convergence des séries issues de la théorie des perturbations, entre 1957 et 1967, les mathématiciens A. N. Kolmogorov, V.I. Arnold et J. Moser, apportèrent une réponse définitive à la question de la convergence de ces séries en développant une théorie maintenant appelée théorie KAM.

Ils montrèrent, en particulier, que Poincaré avait raison quand il pointait la divergence des séries, mais qu'il était également un peu trop pessimiste. Comme l'avait pressenti Poincaré, la nature de ces séries dépend en effet des conditions initiales. Plus clairement, si l'on s'intéresse au cas d'un système planétaire, on pourra trouver des conditions initiales (positions et vitesses des planètes à un instant donné) pour lesquelles les solutions des équations du mouvement seront obtenues par des séries convergentes. Ces mouvements seront donc quasi-périodiques, et en conséquence, perpétuellement stables. Mais, pour une infime modification des conditions initiales, les séries pourront, au contraire, diverger et les trajectoires des planètes perdront leur nature régulière. Dans ces conditions, on peut voir apparaître des phénomènes de diffusion pour lesquels les trajectoires issues de conditions initiales conduisant à des séries divergentes peuvent visiter une grande partie de l'espace, sans que ces excursions puissent être bornées sur un temps infini. Bien au contraire, les solutions quasi-périodiques sont confinées dans des régions données et limitées de l'espace. La théorie KAM va encore bien plus loin en donnant une mesure de la taille de l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles les séries sont convergentes. Elle montre que la taille des régions de divergence, donc d'instabilité, tend vers zéro avec la taille de la perturbation. En d'autres termes, plus la perturbation est petite, plus la probabilité que la trajectoire issue de conditions initiales tirées au hasard soit chaotique est faible.

Dans un article publié en 1963, Arnold applique cette théorie au problème des n-corps[4] et montre

[3] H. Poincaré, Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, tome 2, réimp. A. Blanchard, 1987, p. 1.

[4] Il donne une démonstration rigoureuse pour trois corps (une étoile et deux planètes) et indique comment on pourrait

que, si les masses des planètes, leurs excentricités et leurs inclinaisons sont suffisamment petites, la majorité des conditions initiales conduit à des solutions quasi-périodiques, et donc stables sur un temps quelconque. Mais peut-on vraiment parler de la stabilité d'un système planétaire lorsque l'on sait qu'une variation, même infime, des conditions initiales peut entraîner des mouvements totalement irréguliers ? C'est en 1977 qu'une réponse fut apportée par le mathématicien soviétique N. N. Nekhorochev. Il montra en effet que la diffusion d'une trajectoire située à proximité d'une orbite quasi-périodique était un phénomène très lent, et que par conséquence, on pouvait toujours borner cette diffusion sur un temps fini mais très long. Ainsi, même si les planètes n'étaient pas animées de mouvements parfaitement réguliers, leur trajectoire réelle était presque indiscernable d'une trajectoire quasi-périodique, au moins sur des périodes comparables à la durée de vie du système solaire, soit une dizaine de milliards d'années.

Les résultats évoqués ci-dessus restaient parfaitement théoriques, en particulier, ils ne s'appliquaient que si les masses, les excentricités et les inclinaisons des planètes étaient suffisamment petites, et en tous cas, bien en deçà de celles de Jupiter. Mais les estimations utilisées lors de la démonstration des théorèmes de stabilité n'étant certainement pas optimales, il ne faisait que peu de doutes que leurs améliorations les rendraient applicables à notre système solaire. C'en était donc fini de l'instabilité du système solaire, la vision de Laplace d'un système parfaitement et perpétuellement réglé avait triomphé.

Une vision moins tranchée

À partir des années 1980, l'usage intensif des ordinateurs ouvrit une nouvelle voie pour la résolution approchée des équations régissant les mouvements planétaires. Les premières intégrations numériques des planètes géantes[5] sur 200 millions d'années conduisirent à des solutions quasi-périodiques du même type que celles obtenues par Laplace et Lagrange.

En revanche, la simulation effectuée par G. Sussman et J. Wisdom en 1988, incluant les planètes extérieures de Jupiter à Pluton, mit en évidence les irrégularités du mouvement de cette dernière ; mais sa masse étant très faible[6], ses mouvements chaotiques n'affectaient pas sensiblement celui des planètes géantes. L'année suivante, en combinant des méthodes analytiques à l'intégration numérique[7], Jacques Laskar, montra que le système solaire pouvait se décomposer en deux sous-systèmes dont la nature des mouvements était fondamentalement différente. S'il confirma que les trajectoires des planètes géantes étaient très régulières, il montra au contraire que le mouvement à long terme des planètes telluriques (Mercure, Vénus, la Terre et Mars) était chaotique. Il semblait ainsi que les conclusions de la théorie KAM pouvaient s'appliquer aux planètes gazeuses mais pas aux petites planètes de notre système. Ce chaos observé dans les trajectoires des planètes rocheuses se révélait par une grande sensibilité aux conditions initiales qui rendait leur mouvement imprévisible sur des échelles de temps de l'ordre de la centaine de millions d'années.

En pratique, l'écart en deux solutions croît exponentiellement avec le temps. Si l'on commet une erreur de 15 mètres sur la position initiale de la Terre, l'écart de position au bout de 10 millions d'années sera de 150 mètres, ce qui reste excellent ; mais après 100 millions d'années, l'écart entre les deux solutions initialement voisines sera d'environ 150 millions de kilomètres, soit la distance qui sépare le Terre du Soleil ! Il devient donc impossible de prévoir la position des planètes telluriques sur de telles périodes. Cela ne permet pas pour autant qu'il y ait des collisions entre les planètes. Sur 200 millions d'années, même si l'on ne peut pas prédire la position des planètes rocheuses, les variations de leurs éléments orbitaux (demi-grands axes et excentricités) restent bornées, interdisant toute intersection d'orbites.

En raison du caractère chaotique du mouvement des planètes telluriques, il n'est pas possible de décrire une trajectoire isolée. En revanche, on peut s'intéresser au comportement statistique d'un ensemble de trajectoires voisines, en calculant la probabilité que se produise un comportement donné. C'est ce type d'étude qu'entreprit J. Laskar en 2008. Il montra en particulier que la probabilité

généraliser pour un nombre arbitraire de corps. Plusieurs généralisations de la preuve d'Arnold ont été établies depuis.

[5] Si les planètes géantes ont une grande influence sur le mouvement à long terme des planètes telluriques, l'inverse n'est pas vrai. Un modèle constitué exclusivement des planètes géantes et du Soleil auquel on a ajouté la masse des planètes terrestres est donc cohérent.

[6] La masse de Pluton est d'environ 7,7 10^{-9} masse solaire à comparer aux 5,3 10^{-5} de celle de Neptune.

[7] J. Laskar construisit le système séculaire d'ordre deux des masses, qu'il intégra numériquement.

de voir l'excentricité de Mercure dépasser 0,6[8] en 5 milliards d'années était de 1 %, et que pour certaines solutions particulières, Mercure pouvait rencontrer Vénus, sans pour autant que l'orbite de la Terre en soit sensiblement affectée. Parmi le grand nombre de solutions voisines explorées pour obtenir ces statistiques, il trouva quelques situations remarquables pour lesquelles l'augmentation de l'excentricité de Mercure est suivie de celle de Mars qui déstabilise l'ensemble du système solaire interne. Même si, dans la majorité des cas, le chaos dans le système des planètes telluriques n'entraîne pas de cataclysme sur la durée de vie du système solaire (celle du Soleil), des collisions ou des éjections restent possibles.

Si ces collisions entre planètes, comme leurs éjections hors du système planétaire, peuvent paraître surprenantes, elles ne sont finalement pas aussi rares qu'on pourrait le croire. Deux arguments vont dans ce sens. Le premier est que l'on découvre de plus en plus de planètes nomades ou encore orphelines[9], c'est à dire des planètes ne gravitant plus autour d'une étoile, et dont on pense qu'elles ont été éjectées du système dans lequel elles se sont formées. Le deuxième argument provient des évolutions récentes dans la compréhension de la formation du système solaire. En affinant les scénarios de formation de celui-ci, les astronomes se sont convaincu que des phénomènes catastrophiques ont marqué sa jeunesse.

Certains modèles, comme ceux appelés « modèle de Nice » et « grand virement de bord »[10] supposent que les planètes géantes étaient, à l'origine, bien plus proches du Soleil qu'elles ne le sont actuellement. Au tout début de la formation du système solaire, sous l'effet du gaz contenu dans la nébuleuse protoplanétaire, les planètes géantes se seraient déplacées vers l'intérieur (Jupiter aurait pu atteindre la position qu'occupe Mars actuellement), puis inversant leur marche, s'en seraient éloignées.

Dans un deuxième temps, après la disparition du gaz, les planètes géantes, plongées dans un disque de planétésimaux très dense, se seraient déplacées vers l'extérieur du système solaire. En effet, les rencontres et rapprochements très nombreux entre les planétésimaux et les planètes tendraient à éjecter les premiers (une partie sur le Soleil et une autre vers les confins du système) en repoussant les planètes vers les positions qu'elles occupent actuellement[11]. Même si cette activité collisionnelle n'a plus rien de comparable à celle qu'elle était il y a 3,8 milliards d'années, elle garde encore une influence non négligeable sur la prédictibilité des mouvements planétaires. C'est en 2011 que Jacques Laskar et ses collaborateurs, en étudiant l'influence des astéroïdes de la ceinture principale sur les gros astéroïdes Cérès et Vesta, découvrirent que le mouvement de ceux-ci était bien moins régulier qu'on ne le pensait jusqu'ici, allant même jusqu'à abaisser le seuil de prédictibilité de leur position à 500 000 ans. Ce phénomène, qui ne semble pas très spectaculaire, a pourtant une conséquence assez inattendue sur notre compréhension de climats terrestres passés. En effet, même étant de faible masse, les principaux astéroïdes ont une influence à long terme sur le mouvement des planètes rocheuses. Leurs mouvements étant chaotiques, ils induisent, par le biais des perturbations qu'ils exercent sur les planètes, une certaine irrégularité sur leur dynamique.

Ainsi, la valeur des éléments orbitaux, comme l'excentricité de la Terre, n'est pas prévisible au-delà de 60 millions d'années dans le futur, mais également dans le passé. Ce qui limite à cette durée la reconstitution précise des paléo-climats.

Références

- A. Dahan-Dalmedico, J-L.Chabert et K. Chemla (sous la direction de), Chaos & déterminisme, Points Sciences, Le Seuil (1992).

- La Lune et l'origine de l'Homme. Pour la Science, n° 186, pp 34 - 41, Avril 1993.

- Les systèmes planétaires sont-ils pleins à craquer ? Dossier Pour la Science N°64, juillet-septembre 2009.

- Le Système solaire est-il stable ? Jacques Laskar. Bourbaphy, séminaire Poincaré (2010). http://www.bourbaphy.fr/laskar.pdf.

- Le grand bombardement tardif et la formation du système solaire. A. Morbidelli. http://www.planetastronomy.com/special/2006-special/20nov06/morbi-obspm.htm.

- Quand Jupiter était à la place de Mars ! https://www.oca.eu/spip.php?article559 ■

[8] Il faut une excentricité d'au moins 0,7 pour que Mercure puisse couper l'orbite de Vénus.

[9] En anglais : free-floating planets ou sub-brown dwarfs.

[10] Voir : Les systèmes planétaires sont-ils pleins à craquer ? Dossier Pour la Science N°64, 2009 et également https://www.oca.eu/spip.php?article 559.

[11]- La cratérisation des petits objets du système solaire montre l'intensité de cette activité collisionnelle passée (voir http://www.planetastronomy.com/special/2006-special/20nov06/morbi-obspm.htm.