Le minimum de déviation à 21,8°

La page 25 du n° 150 des Cahiers Clairaut propose différentes méthodes pour montrer qu'il existe un minimum de déviation à 21,8° mais la méthode analytique (méthode 3) n'est pas développée par manque de place.
Dans l'article sur le halo de Boukhara, il est noté sous l'encadré p 27 : *La déviation n'est pas constante, elle dépend de i_1. On montre qu'il existe un minimum de déviation à 22°, lorsque $r_1 = r_2 = 30°$, i_1 valant alors 41°. Vous trouverez les calculs en compléments sur notre site.*
Voici donc ces calculs.

<u>Démonstration de l'auteur de l'article sur le halo de Boukhara, Jean-Pierre Devalance</u>

La figure est celle de la page 26

$D = i_1 - r_1 + i_2 - r_2$ soit $D = i_1 + i_2 - A$

D présente un extremum lorsque $\dfrac{dD}{di_1} = 0$ soit $\dfrac{di_1 + di_2}{di_1} = 0$ ou $1 + \dfrac{di_2}{di_1} = 0\,(1)$

Or, en dérivant les lois de Descartes, on a :
$\cos i_1 \, di_1 = n \cos r_1 \, dr_1$ et $\cos i_2 \, di_2 = n \cos r_2 \, dr_2$

$di_1 = \dfrac{n \cos r_1}{\cos i_1} dr_1$ et $di_2 = \dfrac{n \cos r_2}{\cos i_2} dr_2$

En faisant le quotient membre à membre de ces deux dernières expressions, on obtient

$\dfrac{di_2}{di_1} = \dfrac{\cos r_2}{\cos r_1} \times \dfrac{\cos i_1}{\cos i_2} \times \dfrac{dr_2}{dr_1}$ (2)

On sait que $r_1 + r_2 = A$ donc $dr_1 + dr_2 = 0$ et $\dfrac{dr_2}{dr_1} = -1$

L'égalité (2) devient $\dfrac{di_2}{di_1} = -\dfrac{\cos r_2}{\cos r_1} \times \dfrac{\cos i_1}{\cos i_2}$

Avec l'égalité (1), on obtient : $\dfrac{\cos r_2}{\cos r_1} \times \dfrac{\cos i_1}{\cos i_2} = 1$ soit $\cos r_2 \times \cos i_1 = \cos r_1 \times \cos i_2$

En élevant au carré : $\cos^2 r_2 \times \cos^2 i_1 = \cos^2 r_1 \times \cos^2 i_2$

Ce qui peut s'écrire : $\dfrac{\cos^2 i_1}{\cos^2 r_1} = \dfrac{\cos^2 i_2}{\cos^2 r_2}$

On exprime tout en fonction de r_1 et r_2

$$\frac{1 - \sin^2 i_1}{\cos^2 r_1} = \frac{1 - \sin^2 i_2}{\cos^2 r_2}$$

$$\frac{1 - n^2 \sin^2 r_1}{\cos^2 r_1} = \frac{1 - n^2 \sin^2 r_2}{\cos^2 r_2}$$

On soustrait n² à chaque membre

$$\frac{1 - n^2 \sin^2 r_1 - n^2 \cos^2 r_1}{\cos^2 r_1} = \frac{1 - n^2 \sin^2 r_2 - n^2 \cos^2 r_2}{\cos^2 r_2}$$

$\dfrac{1 - n^2}{\cos^2 r_1} = \dfrac{1 - n^2}{\cos^2 r_2}$ donc $\cos^2 r_1 = \cos^2 r_2$ et $r_1 = r_2$ (r_1 et r_2 sont compris entre 0 et 90°)

…/…

Démonstration proposée par Michel Bobin

$D = i_1 + i_2 - A$ avec $\sin i_1 = n \sin r_1$; $\sin i_2 = n \sin r_2$ et $r_1 + r_2 = A$.
On écrit D en fonction de i_1 :

$$D(i_1) = i_1 + \arcsin(n \sin r_2) - A = i_1 + \arcsin\left(n\times\sin\left[A - \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right)\right]\right) - A$$

Considérons $i_0 < i_1 < \frac{\pi}{2}$ (i_0 est la valeur minimale de i valant environ 13,4°, voir page 27)
Sur cet intervalle, i_2, r_2, r_1 et D sont des fonctions continues et dérivables de i_1.
On dérive par rapport à i_1 (angles en radians ici) :

$\sin i_1 = n \sin r_1 \quad\rightarrow\quad \cos i_1 = n \cos r_1 \times r_1' \quad$ ou $\quad r_1' = \dfrac{\cos i_1}{n \cos r_1}$

$\sin i_2 = n \sin r_2 \quad\rightarrow\quad \cos i_2 \times i_2' = n \cos r_2 \times r_2' \quad$ ou $\quad i_2' = \dfrac{n \cos r_2}{\cos i_2}\times r_2'$

$r_1 + r_2 = A \quad\rightarrow\quad r_1' + r_2' = 0 \quad$ ou $\quad r_2' = -r_1'$

$D(i_1) = i_1 + i_2 - A \quad\rightarrow\quad D'(i_1) = 1 + i_2' = 1 + \dfrac{n \cos r_2}{\cos i_2}\times r_2' = 1 + \dfrac{n \cos r_2}{\cos i_2}\times\left(-\dfrac{\cos i_1}{n \cos r_1}\right)$

$$\boxed{D'(i_1) = 1 - \frac{\cos r_2}{\cos r_1}\times\frac{\cos i_1}{\cos i_2}}$$

$D'(i_1) = 0 \iff 1 = \dfrac{\cos r_2}{\cos r_1}\times\dfrac{\cos i_1}{\cos i_2} \iff \cos r_1 \times \cos i_2 = \cos r_2 \times \cos i_1$ (1)

En élevant au carré (tous les cosinus sont positifs) et en multipliant par n², on obtient :
(1) $\iff n^2\times\cos^2 r_1 \times \cos^2 i_2 = n^2 \times \cos^2 r_2 \times \cos^2 i_1$ (2)

Or, $n^2\times\cos^2 r_1 = n^2\times(1-\sin^2 r_1) = n^2 - n^2\times\sin^2 r_1 = n^2 - \sin^2 i_1 = n^2 - (1-\cos^2 i_1) = \cos^2 i_1 + n^2 - 1$

De la même manière, $n^2\times\cos^2 r_2 = \cos^2 i_2 + n^2 - 1$

L'égalité (2) devient alors $(\cos^2 i_1 + n^2 - 1)\times\cos^2 i_2 = (\cos^2 i_2 + n^2 - 1)\times\cos^2 i_1$

$\iff (n^2-1)\times(\cos^2 i_2 - \cos^2 i_1) = 0$

$\iff \cos i_2 = \cos i_1 \iff i_2 = i_1$

À cet extremum, on a $i_2 = i_1 = i_e$ et $r_2 = r_1 = r_e = A/2$ (on a noté i_e et r_e les valeurs de i_1 et r_1 ou de i_2 et r_2 pour lesquelles la déviation est un extremum). La figure est alors symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle en A.
Pour savoir si cet extremum en i_e est un minimum ou un maximum, il faut étudier le signe de la dérivée. En partant de $D'(i_1) \leqslant 0$ (au lieu de $D'(i_1) = 0$) on aboutit à $i_2 \geqslant i_1$ ou $i_1 \leqslant i_2$.
On peut en déduire que $i_1 \leqslant i_e$ ainsi :
$i_1 \leqslant i_2$
$\iff \sin i_1 \leqslant \sin i_2 \quad \iff \sin r_1 \leqslant \sin r_2 \quad \iff r_1 \leqslant r_2$
$\iff r_1 \leqslant (r_1+r_2)/2$
$\iff r_1 \leqslant r_e \qquad$ (car $(r_1+r_2)/2 = A/2 = r_e$)
$\iff \sin r_1 \leqslant \sin r_e \quad \iff \sin i_1 \leqslant \sin i_e \quad \iff i_1 \leqslant i_e$ ouf !
On sait donc que $D'(i_1) \leqslant 0$ si $i_1 \leqslant i_e$. La fonction D est donc décroissante avant i_e et croissante ensuite : $D(i_e)$ est bien un minimum de déviation.

Calcul de la déviation minimale

$\sin i_e = n \sin r_e$ et $r_e = A/2$ donc $i_e = \arcsin\left(n \sin\dfrac{A}{2}\right)$

$D_{min} = 2\, i_e - A = 2\times\arcsin\left(n\sin\dfrac{A}{2}\right) - A$

Avec A = 60° et n = 1,31, on trouve $D_{min} \approx 21{,}84°$

Courbe représentative