Exoplanètes, effet Doppler et lois de Kepler
Les calculs

Les notations

M_E masse de l'étoile. Elle peut être déterminée à partir de son spectre.
R_E distance du centre de l'étoile au centre de masse du système étoile planète. Inconnue.
M_P masse de la planète. Inconnue.
R_P distance du centre de la planète au centre de masse du système étoile planète. Inconnue.
R distance du centre de l'étoile au centre de la planète. Inconnue.
V_E = vitesse linéaire de l'étoile sur son orbite autour du centre de masse. Peut être déterminée par effet Doppler.
F = force d'attraction entre l'étoile et la planète.
T_E = période de révolution de l'étoile autour du centre de masse. Peut être déterminé par effet Doppler.

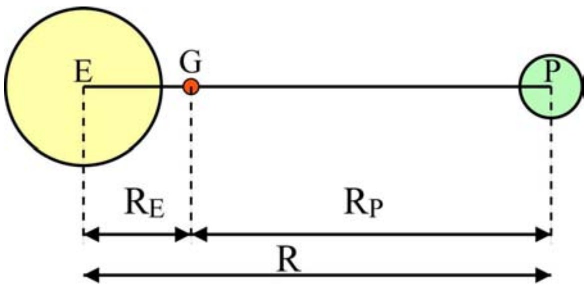
Les formules de départ

(1) $M_E\, R_E = M_P\, R_P$ (définition du centre de masse)

(2) $R = R_E + R_P$ (voir figure)

(3) $F = G\,\dfrac{M_E\, M_P}{R^2}$ (loi de Newton)

(4) $F = M_E\, a_E = M_E\,\dfrac{V_E^2}{R_E}$ (force centripète)



(5) $T_E\, V_E = 2\,\pi\, R_E$ (distance parcourue par le centre de l'étoile en une révolution)

Les calculs de l'article

Page 31

***a. Formule donnant* V_E^2**

Avec (3) et (4), on obtient :

$$V_E^2 = G\,\frac{M_E\, M_P}{R^2}\times\frac{R_E}{M_E}$$

On remplace R par $R_E + R_P$ avec (2) :

$$V_E^2 = G\,\frac{M_E\, M_P}{(R_E + R_P)^2}\times\frac{R_E}{M_E} = G\times\frac{M_P\, R_E}{R_P^2(R_E/R_P + 1)^2} = G\times\frac{R_E}{R_P}\times\frac{M_P}{R_P}\times\frac{1}{(R_E/R_P + 1)^2}$$

Or, d'après (1) : $\dfrac{R_E}{R_P} = \dfrac{M_P}{M_E}$

d'où : $$V_E^2 = G\times\frac{M_P}{M_E}\times\frac{M_P}{R_P}\times\frac{1}{(M_P/M_E + 1)^2} \quad (6)$$

M_P étant petit devant M_E, on peut écrire :

$$V_E^2 \approx G\times\frac{M_P^2}{M_E\, R_P} \text{ ou } M_P^2\times\frac{G}{R_P\, M_E} \quad (7)$$

b. Formule donnant T_E^2

Avec (5) : $T_E^2 = \dfrac{4\,\pi^2\,R_E^2}{V_E^2}$

Avec (6), cela devient : $T_E^2 = 4\,\pi^2\,R_E^2 \times \dfrac{M_E R_P (M_P / M_E + 1)^2}{G \times M_P{}^2} = \dfrac{4\,\pi^2}{G} \times \dfrac{R_E^2}{M_P^2} \times M_E R_P \times \dfrac{(M_P / M_E + 1)^3}{M_P / M_E + 1}$

Avec (1), on obtient : $T_E^2 = \dfrac{4\,\pi^2}{G} \times \dfrac{R_P^2}{M_E^2} \times M_E R_P \times \dfrac{(R_E / R_P + 1)^3}{M_P / M_E + 1} = \dfrac{4\,\pi^2}{G} \times \dfrac{R_P{}^3 (R_E / R_P + 1)^3}{M_E (M_P / M_E + 1)}$

$$= \frac{4\,\pi^2}{G} \times \frac{(R_E + R_P)^3}{M_E (M_P / M_E + 1)}$$

Avec (2) : $T_E^2 = \dfrac{4\,\pi^2}{G} \times \dfrac{R^3}{M_E (M_P / M_E + 1)} \approx \dfrac{4\,\pi^2\,R^3}{G\,M_E}$ ou $\dfrac{TE^2}{R^3} = \dfrac{4\,\pi^2}{G\,M_E}$ *(car M_P est très petit devant M_E)*

Page 32

c. Formule donnant V_{OBS}

$V_{OBS} = V_E \sin i$

Avec (7) : $V_{OBS} = \sin i \times M_P \times \sqrt{\dfrac{G}{R_P\,M_E}}$

<u>Autre manière de faire les calculs</u>

Formules de départ

(1) $M_E\,R_E = M_P\,R_P$; (2) $R = R_E + R_P$; (3) $F = G\,\dfrac{M_E\,M_P}{R^2}$

(4a) $F = M_E\,\dfrac{V_E^2}{R_E}$ et (4b) $F = M_P\,\dfrac{V_P^2}{R_P}$; (5a) $T_E\,V_E = 2\,\pi\,R_E$ et (5b) $T_P\,V_P = 2\,\pi\,R_P$

Calcul de R_P à partir de M_E et T_P

Les formules (3) et (4b) donnent $V_P^2 = G\,\dfrac{M_E\,R_P}{R^2}$

La formule (5b) donne $V_P^2 = \dfrac{4\,\pi^2\,R_P^2}{T_P^2}$; d'où $G\,\dfrac{M_E\,R_P}{R^2} = \dfrac{4\,\pi^2\,R_P^2}{T_P^2}$ ou $\dfrac{T_P^2}{R_P \times R^2} = \dfrac{4\,\pi^2}{G\,M_E}$

Or, $R_P \times R^2 = R_P \times (R_P + R_E)^2 = R_P{}^3 \times (1 + R_E/R_P)^2 = R_P{}^3 \times (1 + M_P/M_E)^2$ qu'on assimile à $R_P{}^3$ car $M_P << M_E$

On retrouve donc la 3e loi de Kepler $\dfrac{T_P^2}{R_P{}^3} = \dfrac{4\,\pi^2}{G\,M_E}$

On peut mesurer T_P et M_E, on en déduit donc R_P

Calcul de M_P avec comme donnée supplémentaire la mesure de V_E

La formule (5a) $T_E\,V_E = 2\,\pi\,R_E$ donne R_E puisque l'on connaît T_E et V_E .

On peut alors calculer M_P avec la formule (1) : $M_E\,R_E = M_P\,R_P$.

M_E, T_E et V_E sont des résultats de mesure.

Remarque Avec les deux méthodes, on a $M_P{}^3 = \dfrac{M_E^2 \times T_E \times V_E{}^3}{2\pi G}$