

# ASTRO-PHYSIQUE : LA FRONDE GRAVITATIONNELLE

## Résumé

*Les grandes agences spatiales qui lancent des sondes à travers le Système solaire utilisent une technique maintenant bien maîtrisée qui est celle de l'assistance gravitationnelle. Cette dernière permet à un engin soit de prélever de l'énergie d'origine gravitationnelle à une planète à proximité de laquelle il va passer afin d'accélérer pour atteindre plus rapidement une cible plus lointaine soit de lui restituer cette énergie afin de ralentir suffisamment pour se satelliser autour de cette planète. On montre dans cet article que ce phénomène est à rattacher au problème de mécanique céleste bien connu des trois corps et qu'un tel transfert d'énergie n'est possible que parce la planète à proximité de laquelle l'échange se produit est en mouvement autour du Soleil.*

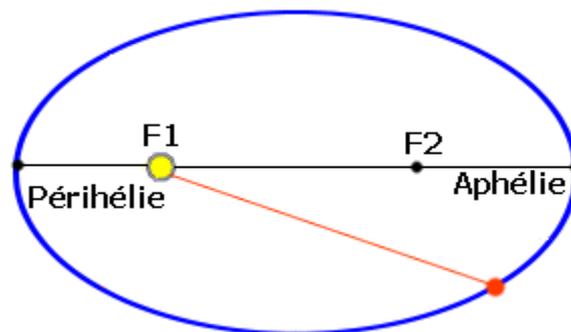
## Introduction

L'exploration du Système solaire à l'aide de sondes nécessite depuis ses début en 1958 - passage de Luna 1 (URSS) à proximité de notre satellite naturel – de disposer de lanceur puissant capable de donner à la charge utile l'impulsion nécessaire pour parvenir à destination. Les conditions pour atteindre cet objectif dépendent essentiellement de l'objet visé et de la masse de la sonde envoyée en mission. Or, encore aujourd'hui et malgré les progrès réalisés dans la conception et la fabrication des lanceurs, on ne dispose pas toujours des moyens techniques et/ou financiers pour parvenir rapidement au but visé. Illustrons ces difficultés avec l'exemple de la mission BepiColombo lancée récemment en direction de Mercure. Même si cette planète se rapproche quelquefois à moins de quatre-vingt huit millions de kilomètres de la Terre, il faut savoir qu'il est plus facile en temps et en énergie d'atteindre Jupiter, qui se trouve pourtant à plus de six-cents millions de kilomètres de nous. Les lois de la mécanique céleste impliquent en effet qu'il est moins coûteux de voyager vers les planètes extérieures de notre Système solaire que vers celles situées plus proches du Soleil.

## Le billard cosmique : quelques rappels de mécanique céleste

Dans le Système solaire les objets tournant autour du Soleil obéissent en première approximation<sup>1</sup> aux trois lois de **Johannes Kepler** (1571–1630) qui s'énoncent ainsi :

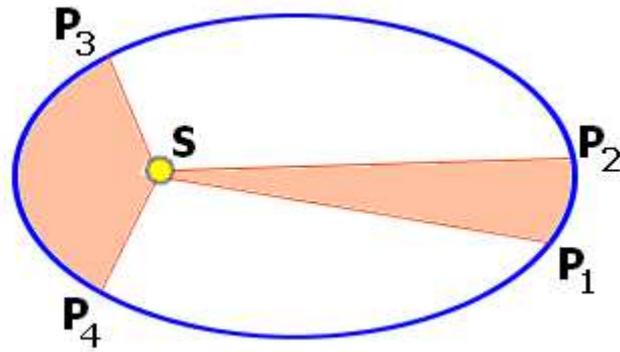
**Première loi** : Chaque planète décrit, dans le système héliocentrique, une ellipse dont un des foyers est occupé par le Soleil.



**Deuxième loi** : La droite qui joint le Soleil à une planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

---

<sup>1</sup> Les lois de Kepler font l'approximation, pour une planète quelconque, de négliger l'influence gravitationnelle des objets autre que le Soleil pour décrire son mouvement.

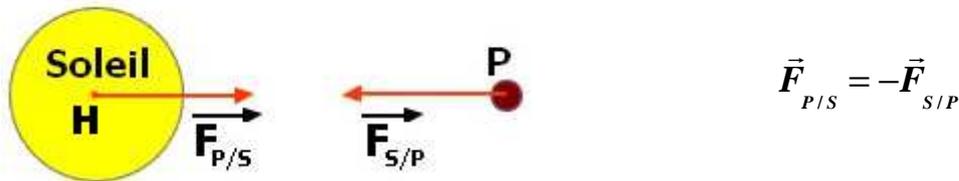


Par exemple, sur la figure ci-dessus, la planète met le même temps pour faire le trajet P<sub>1</sub>P<sub>2</sub> que pour faire le trajet P<sub>3</sub>P<sub>4</sub>.

**Troisième loi :** Le carré de la période de révolution **T** d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe<sup>2</sup> **a** de l'ellipse, la constante de proportionnalité étant identique pour toutes les planètes d'un même système planétaire.

$$\frac{T^2}{a^3} = cste$$

Ces lois, découvertes empiriquement par Kepler à partir des relevés de position de la planète Mars réalisés par **Tycho Brahé** (1546–1601), ont été justifiées ultérieurement par les lois de la mécanique d'**Isaac Newton** (1642–1727) appliquées au Système solaire dans lequel les planètes se déplacent sous l'action des forces d'interaction gravitationnelle entre chacune d'elles et le Soleil.



L'intensité de ces forces est donnée par l'expression suivante :

$$F = G \cdot \frac{m_s \cdot m_p}{d^2} \text{ avec}$$

**d** : HP

**m<sub>H</sub>** : masse du Soleil =  $2.10^{30} \text{ kg}$  – **m<sub>p</sub>** : masse de la planète

**G** : constante de la gravitation universelle avec  $G = 6,67.10^{-11} \text{ unité SI}$

Bien évidemment ces différentes lois s'appliquent également pour décrire les interactions gravitationnelles et les mouvements qui en découlent dans les systèmes planète/satellite (naturel ou artificiel).

<sup>2</sup> La période de révolution est le temps **T** nécessaire à la planète pour parcourir complètement son orbite. Le demi-grand axe **a** d'une orbite est égal à la moitié de la distance entre l'aphélie (point de l'orbite le plus distant du Soleil) et le périhélie (point de l'orbite le plus proche du Soleil).

Pour notre étude en relation avec l'envoi de sondes pour explorer d'autres objets du Système solaire à un moindre coût énergétique et avec satellisation éventuelle autour de l'objectif, il nous faut connaître :

- La vitesse  $\vec{v}_{LP}$  : C'est la vitesse, mesurée dans le **référentiel planétocentrique**, qu'il faut donner à l'engin pour l'arracher à l'attraction de la planète considérée depuis sa surface et qu'on appelle vitesse de libération.
- Les vitesses  $\vec{v}_{PH}$  : C'est la vitesse, mesurée dans le **référentiel héliocentrique**, de la Terre et de la planète visée. On l'appelle vitesse orbitale.
- La vitesse  $\vec{v}_{SP}$  : C'est la vitesse, mesurée dans le **référentiel planétocentrique** de l'objectif, qu'il faut donner à l'engin pour que ce dernier se satellise en fin de parcours. On l'appelle vitesse de satellisation. La valeur de cette dernière est variable selon l'orbite choisie autour de la planète cible mais elle doit être inférieure à la vitesse de libération.

Le tableau suivant présente deux de ces différents éléments pour quelques planètes inférieures et supérieures de notre Système solaire :

	<b> Mercure </b>	<b> Vénus </b>	<b> Terre </b>	<b> Mars </b>	<b> Jupiter </b>
$V_{PH}$ (km/s)	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1
$v_{LP}$ (km/s)	4,2	10,4	11,2	5,0	59,5

Pour simplifier l'étude on considérera par la suite que :

- les orbites des différentes planètes sont circulaires, ce qui est proche de la réalité puisque leur excentricité  $e$  est, pour la plupart, très faible.
- les orbites des différentes planètes sont toutes dans le même plan qui est celui de l'écliptique.
- La masse des planètes est négligeable devant celle du Soleil et nous aurons toujours l'approximation  $(m_H + m_P) \approx m_H$  avec  $m_H$  : masse du Soleil et  $m_P$  : masse de la planète.

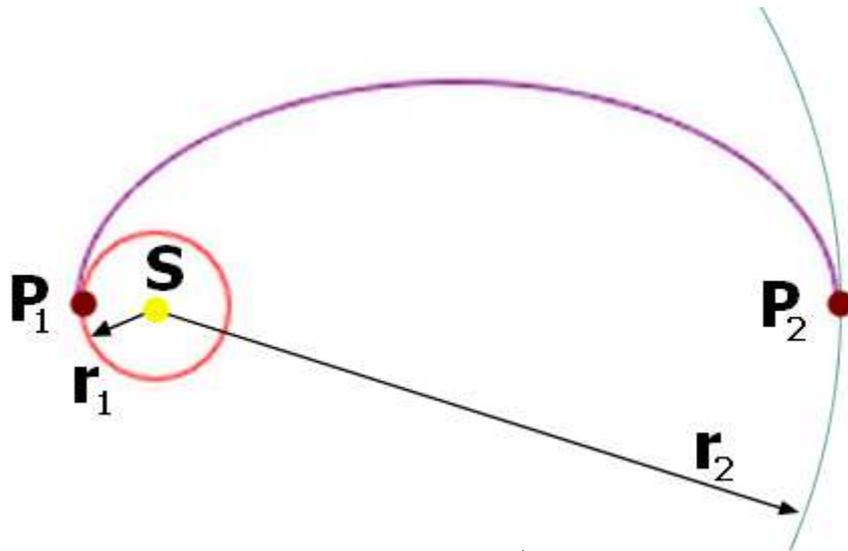
### **Envoi d'une sonde terrestre vers une planète : orbite d'Hohmann**

L'envoi d'une sonde depuis la Terre vers une planète peut se faire selon de nombreuses trajectoires. Ces dernières vont se distinguer par deux caractéristiques : la durée du voyage et le coût énergétique. Sur ce dernier point une des trajectoires les plus économiques et certainement la plus simple est l'orbite de transfert de **Hohmann**<sup>3</sup>, qui est tangente aux orbites de départ et d'arrivée. C'est celle qui minimise la dépense d'énergie nécessaire pour passer de la Terre à la planète visée.

Le schéma ci dessous illustre le cas d'un transfert selon une orbite d'Hohmann entre l'orbite de la planète  $P_2$ , distante de  $r_2$  du Soleil, et l'orbite de la planète  $P_1$ , distante de  $r_1$  du Soleil. Elle permet donc de passer d'une première orbite circulaire à une deuxième en utilisant uniquement deux manœuvres de courte durée consommant le moins d'énergie possible. On applique d'abord un changement de vitesse  $\Delta\vec{v}_2$  tangentiellement à la trajectoire circulaire de départ pour changer

<sup>3</sup> Walter Hohmann (1880-1945) était un ingénieur allemand passionné d'aéronautique. Avec le russe Constantin Tsiolkovski (1857-1935), l'américain Robert Goddard (1882-1945) et l'austro-hongrois Hermann Oberth (1894-1989) il fait partie des pionniers de cette discipline. Son ouvrage écrit en 1925, « *L'atteignabilité des corps célestes* », est le premier texte où l'on rencontre le concept d'orbite de transfert.

l'orbite en une ellipse d'apogée  $r_2$  et de périégée  $r_1$ . Au périégée, on applique un changement de vitesse  $\Delta \vec{v}_1$ , toujours tangentielllement à l'orbite, pour circulariser l'orbite à un rayon  $r_1$ .



On peut montrer à l'aide de considérations énergétiques<sup>4</sup> que le module de la vitesse héliocentrique  $\vec{v}_{SH}$  d'une sonde (S) parcourant une orbite elliptique – ici celle de Hohmann - est donnée, en n'importe quel point, par l'expression suivante :

$$v_{SH} = \sqrt{G \cdot m_H \cdot (2/r - 1/a)}$$

avec  $r$  : distance sonde-Soleil et  $a$  : demi-grand axe de l'orbite de transfert d'Hohmann qui vaut, d'après le schéma,  $(r_1 + r_2)/2$ .

Prenons maintenant l'exemple d'une sonde que l'on souhaite envoyer, depuis la Terre (planète  $P_2$ ), en direction de Mercure (planète  $P_1$ ) selon une orbite de transfert d'Hohmann. On sait qu'il faut tout d'abord l'extraire du puit gravitationnel terrestre. Pour l'étude suivante on va considérer que ceci est fait et que la sonde s'est placée sur une orbite solaire accompagnant notre planète dans sa ronde dans le Système solaire à la vitesse héliocentrique de 29,8 km/s. Sa vitesse  $\vec{v}_{SH}$  est alors celle d'un objet parcourant l'orbite d'Hohmann passant à son aphélie et dont nous noterons le module  $v_{SH2}$ . On a alors :

$$r = r_2 = 150 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$a = (r_1 + r_2)/2 = 1/2 \cdot (58 + 150) \cdot 10^9 \text{ m} = 104 \cdot 10^9 \text{ m}$$

En parvenant au niveau de Mercure  $\vec{v}_{SH}$  est celle du périhélie de l'orbite d'Hohmann. Son module sera noter  $v_{SH1}$ . Dans ce cas

$$r = r_1 = 58 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Après calcul nous obtenons :

$$v_{SH2} = 22,3 \text{ km / s}$$

$$v_{SH1} = 57,6 \text{ km / s}$$

<sup>4</sup> La démonstration de cette expression est donnée en annexe.

Au départ, après être sortie du puit de potentiel gravitationnel de la Terre, la sonde possède sa vitesse héliocentrique  $v_{TH}$  de 29,8 km/s. Pour qu'elle emprunte l'orbite de transfert il faut la **freiner** jusqu'à la vitesse  $v_{SH2}$  de 22,3 km/s. A l'arrivée, après avoir parcouru la moitié de l'ellipse d'Hohmann d'une manière passive<sup>5</sup>, elle a une vitesse héliocentrique  $v_{SH1}$  de 57,6 km/s alors que Mercure, à laquelle elle doit « s'arrimer », à une vitesse héliocentrique  $v_{MH}$  de 47,9 km/s. Là encore il faut la **freiner** jusqu'à la vitesse de Mercure sur son orbite dans le référentiel héliocentrique. Résumons tout ceci dans un tableau :

Vitesse héliocentrique	Valeur (km/s)	Différentielle (km/s)
Initiale (Terre) $v_{TH}$	29,8	-7,5
Aphélie (Hohmann) $v_{SH2}$	22,3	
Périhélie (Hohmann) $v_{SH1}$	57,6	-9,7
Finale (Mercure) $v_{MH}$	47,9	

La diminution de l'intensité de la vitesse à l'aphélie et au périhélie de l'orbite de transfert correspond à une décélération et donc, en vertu des lois de la mécanique newtonienne, à l'application d'une force résistante obtenue avec la mise en route de rétro-fusées consommant une certaine quantité de carburant. Nous savons que pour amener la sonde, depuis le sol, sur une orbite confondue avec celle de la Terre il est nécessaire de lui donner la vitesse de libération dans le référentiel terrestre  $v_{LP} = 11,2$  km/s. On a donc des accélérations du même ordre en valeur absolue, ce qui induit logiquement que pour parcourir l'orbite d'Hohmann jusqu'à la satellisation de la sonde autour de Mercure il faut dépenser une énergie environ deux fois supérieure à celle nécessaire pour la placer sur une orbite solaire voisine de celle de la Terre. Dans le cas où de telles manœuvres sont réalisées à l'aide de rétrofusées il faut alors emporter une importante quantité de carburant qui va s'ajouter à la masse initiale. On se heurte ici à des contraintes insurmontables liées aux limites (éventuellement techniques mais surtout économiques) des fusées actuelles : il faut essayer de trouver autre chose. La solution a tout d'abord été développée par les ingénieurs de la NASA en s'appuyant sur les travaux de plusieurs mathématiciens de la première moitié du XX<sup>e</sup> siècle : il s'agit de l'assistance gravitationnelle appelée également l'effet de fronde gravitationnelle. Cette technique a tout d'abord été étudiée par **Michael Minovitch** au début des années 1960 alors qu'il était étudiant à l'UCLA et qu'il travaillait durant l'été au JPL. On pensait auparavant que les voyages vers les parties externes du Système solaire ne seraient possible qu'en développant des lanceurs extrêmement puissants utilisant des réacteurs nucléaires permettant de fournir une poussée considérable.

L'idée principale était la suivante : en s'approchant suffisamment près d'une planète une sonde, soumise à son attraction, va échanger avec elle de l'énergie. Ceci aura pour effet de modifier sa trajectoire, sa vitesse – on peut de cette façon accélérer ou freiner une sonde - et même son inclinaison par rapport au plan de l'écliptique sans pour cela devoir mettre en route un moteur et consommer du carburant. Pioneer 10 est la première sonde à utiliser cet effet en 1973 en s'appuyant sur l'accélération communiquée par Jupiter pour sortir du Système solaire. Pioneer 11 fera de même en 1974 pour poursuivre son voyage vers Saturne. Mariner 10, en 1974, exploitera également l'assistance gravitationnelle en s'appuyant sur le coup de pouce fourni par Vénus pour atteindre Mercure. C'est aujourd'hui une technique récurrente pour la plupart des sondes envoyées explorer les objets du Système solaire. Voyons comment les lois de la physique permettent ce gain d'énergie qui « semble » gratuit.

## Lois de la mécanique et assistance gravitationnelle

<sup>5</sup> Ce qui signifie sans aucune énergie additionnelle et donc sous la seule influence de l'attraction solaire. Rappelons que nous négligeons dans ce modèle simplifié l'attraction gravitationnelle des autres objets du Système solaire.

Pour simplifier l'étude nous allons, pour un objet donné, diviser l'espace en deux régions dont la première est appelée sphère de Hill : c'est la région de l'espace centrée sur l'objet et dans laquelle son pouvoir gravitationnel domine sur celui du Soleil. C'est donc une approximation de la sphère d'influence gravitationnelle de l'objet considéré, le plus souvent une planète. Elle est désignée d'après **John William Hill** (1812-1879). Son rayon  $r_{HILL}$  est donné par l'expression<sup>6</sup> :

$$r_{HILL} \approx a \cdot \sqrt[3]{m_P / 3m_H}$$

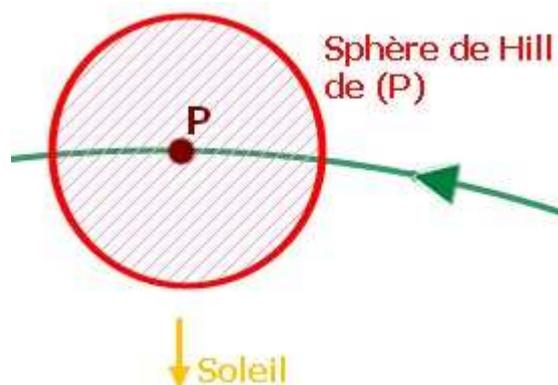
avec  $a$  : demi-grand axe de l'orbite héliocentrique de l'objet (en général une planète),  $m_P$  : masse de l'objet,  $m_H$  : masse du Soleil. Nous avons  $m_H = 2 \cdot 10^{30}$  kg

On peut alors dresser le tableau suivant pour quelques planètes du Système solaire.

Planètes	a (10 <sup>6</sup> km)	m <sub>P</sub> (10 <sup>24</sup> kg)	r <sub>HILL</sub> (10 <sup>6</sup> km)
Mercure	57,9	0,330	0,22
Vénus	108,2	4,87	1,22
Terre	149,6	5,98	1,5
Mars	227,9	0,64	1,09
Jupiter	778,3	1900	53,3
Saturne	1427,2	568	65,4

L'utilisation de cette division nette de l'espace en deux régions est bien sûr une simplification et la transition entre une influence prépondérante du Soleil et celle dominante de la planète est, dans la réalité, progressive. De plus l'existence de l'une n'annule jamais l'autre. Cependant l'introduction de cette approximation permet de simplifier considérablement l'étude de notre problème. On peut faire quelques remarques à propos de ce tableau :

- Jupiter, trois fois plus « lourde » que Saturne, a cependant une sphère d'influence dont le rayon est plus petit de 20%. Ceci est dû à l'éloignement plus grand de la planète aux anneaux et donc à l'attraction gravitationnelle plus faible du Soleil à son niveau.
- La Lune se trouve largement à l'intérieur de la sphère d'influence de la Terre car  $r_L \approx r_{HILL}/4$  ( $r_L$  est le rayon de l'orbite lunaire dans le référentiel géocentrique).

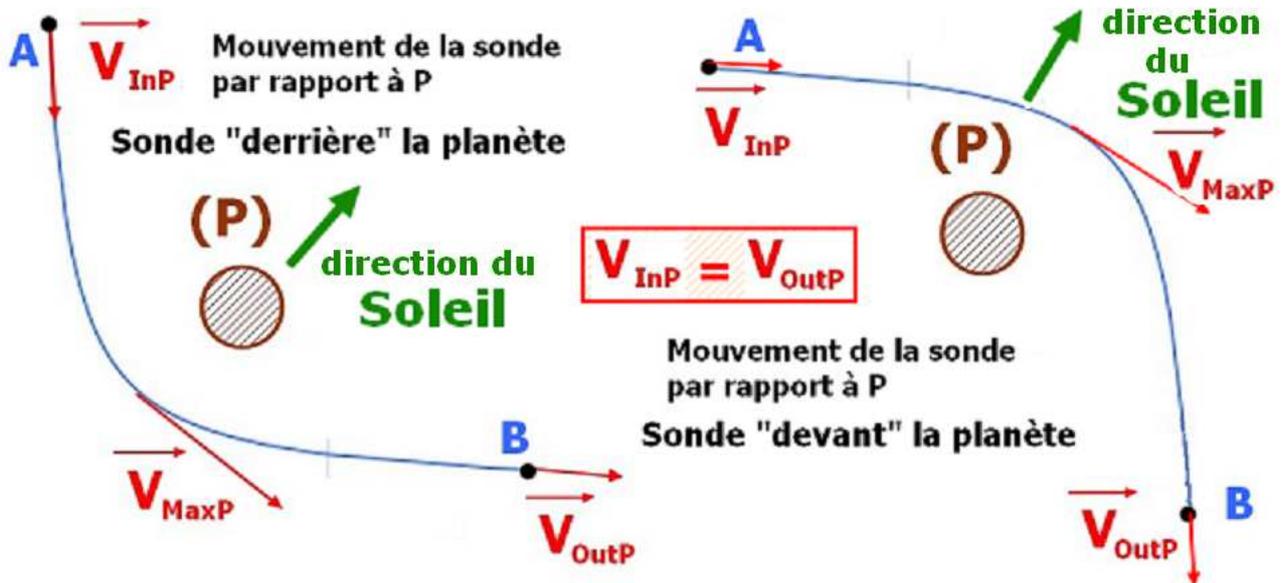


<sup>6</sup> La détermination de cette expression n'est pas simple car il faut se rappeler que la planète considérée est en mouvement autour du Soleil, ce qui a une influence sur la détermination de  $r_{HILL}$ . Mathématiquement parlant, la sphère de Hill est le lieu où le gradient des champs gravitationnels de la planète et du Soleil s'équilibrent, c'est à dire le lieu où les forces de marée des deux objets sur un troisième de masse négligeable sont égales. On trouvera plus de détails sur le sujet en annexe.

(voir [https://fr.wikipedia.org/wiki/Sphère\\_de\\_Hill](https://fr.wikipedia.org/wiki/Sphère_de_Hill) ainsi que [https://fr.wikipedia.org/wiki/Discussion:Sphère\\_de\\_Hill](https://fr.wikipedia.org/wiki/Discussion:Sphère_de_Hill) )

Les outils étant maintenant en place, voyons comment il est possible d'économiser de l'énergie embarquée en profitant d'un échange d'énergie gravitationnelle entre une planète et une sonde spatiale passant à proximité de cette dernière.

Considérons tout d'abord, en s'appuyant sur le schéma ci-dessous, le mouvement de la sonde à l'approche de la planète (P) en se plaçant dans le référentiel attaché à la planète, c'est à dire dans lequel la planète est au repos. On se limitera uniquement à la portion de la trajectoire de la sonde située **à l'intérieur** de la sphère de Hill.



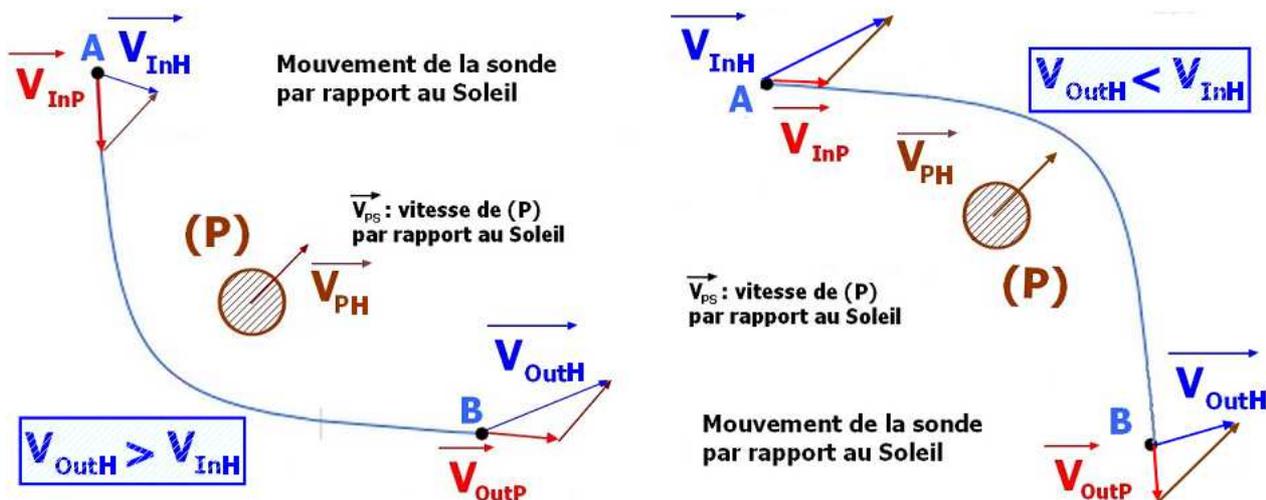
Ce schéma représente les deux cas possibles : à gauche la sonde contourne (P) en passant « derrière » par rapport au sens du mouvement<sup>7</sup> de (P) autour au Soleil alors qu'à droite elle le fait en passant « devant ».

Il est capital, bien entendu, que la sonde ait une vitesse suffisante à l'entrée dans la sphère de Hill en A pour ne pas être capturée par la planète. Cette vitesse doit donc être supérieure à la vitesse de libération<sup>8</sup> en A. Dans ces circonstances la trajectoire de la sonde, dans le référentiel considéré lié à la planète, est une branche d'hyperbole. Par symétrie, la vitesse  $\vec{V}_{OutP}$  de la sonde à la sortie de la sphère de Hill est identique en valeur à la vitesse d'entrée  $\vec{V}_{InP}$ , seule sa direction a changé. En résumé, la sonde passe à proximité de (P), dans le référentiel de cette dernière, avec une vitesse qui augmente tout d'abord jusqu'à une valeur  $\vec{V}_{MaxP}$  au point le plus proche puis qui diminue jusqu'à retrouver en B une valeur identique à celle du début en A : en module nous avons  $V_{OutP} = V_{InP}$ .

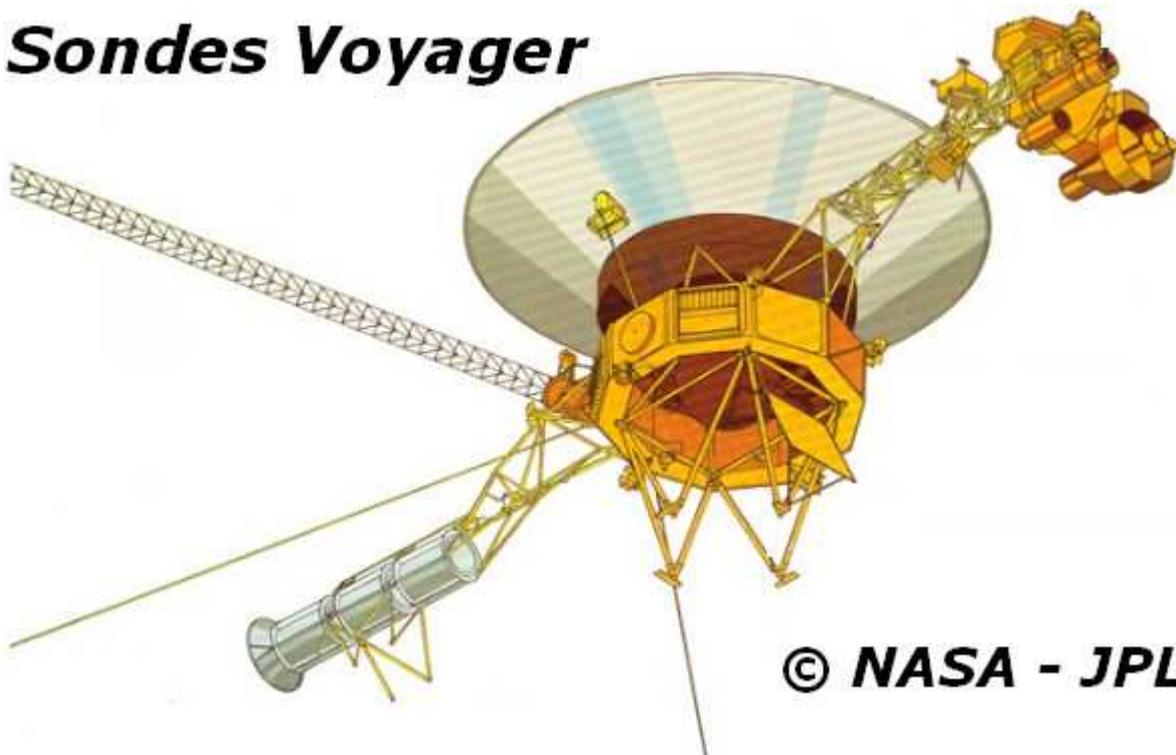
<sup>7</sup> Sur les schémas proposés (P) se déplace, dans le référentiel héliocentrique, en direction du coin supérieur droit.

<sup>8</sup> Rappelons que la vitesse de libération d'une planète est celle que l'on doit donner à un objet pour qu'il échappe « définitivement » à son attraction. Elle dépend de la masse de la planète mais aussi de la distance entre l'objet et le centre de la planète selon l'expression  $v_{LP} = \sqrt{2G \cdot m_p / r}$  avec  $m_p$  masse de la planète et  $r$  distance de l'objet au centre de la planète. Dans le cas pratique de Jupiter que nous étudions ici on écrira  $v_{LJ} = \sqrt{2G \cdot m_J / r}$ .

Voyons maintenant comment les choses se passent lorsqu'on les observe depuis un référentiel héliocentrique dans lequel la planète a une vitesse  $\vec{V}_{PH}$ . Pour déterminer les vitesses  $\vec{V}_{InH}$  et  $\vec{V}_{OutH}$  d'entrée et de sortie de la sonde de la zone d'influence de P dans ce référentiel, il faut faire une composition des vecteurs avec  $\vec{V}_{InH} = \vec{V}_{InP} + \vec{V}_{PH}$  et  $\vec{V}_{OutH} = \vec{V}_{OutP} + \vec{V}_{PH}$ . Les constructions géométriques de ces sommes vectorielles sont visibles sur le schéma suivant et l'on constate bien un gain en module et un changement de direction de la vitesse de la sonde à travers le Système solaire après son passage à l'intérieur de la sphère d'influence de P.

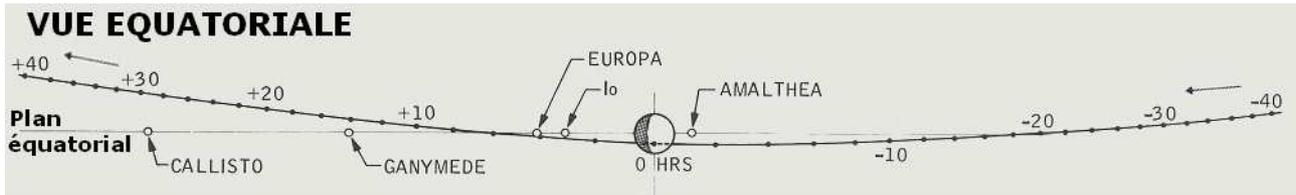


## Sondes Voyager

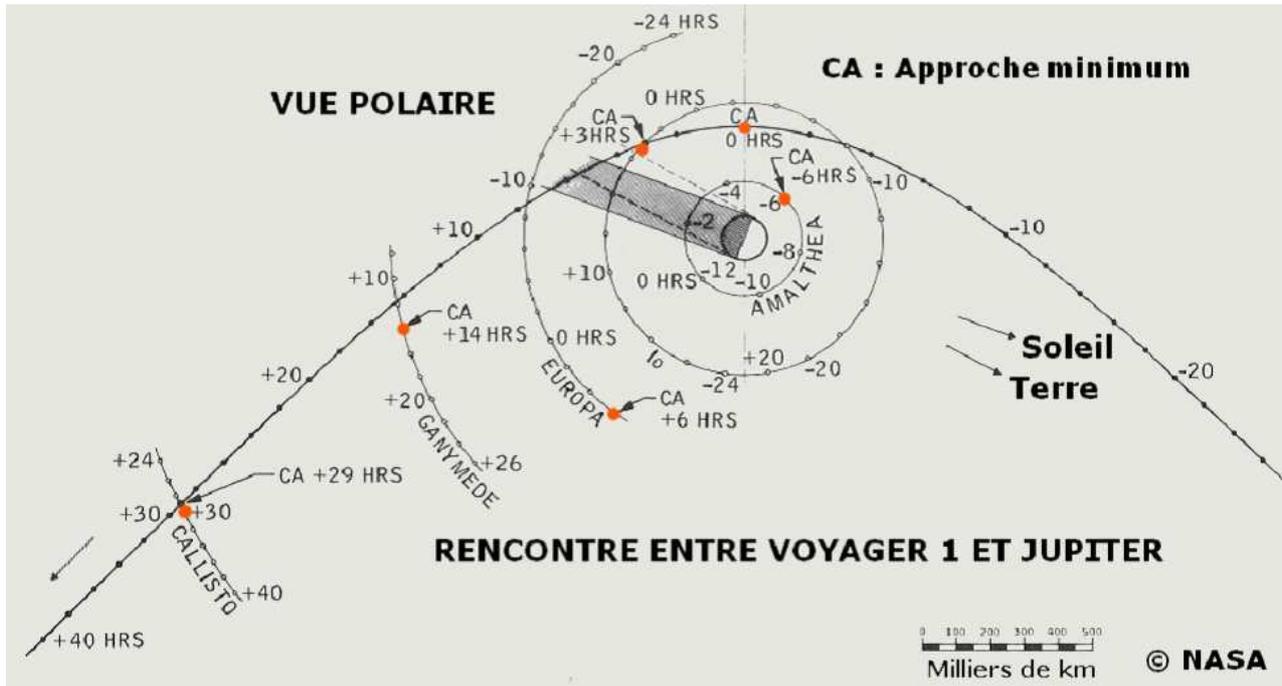


© NASA - JPL

Pour illustrer cette technique d'assistance gravitationnelle et en montrer l'intérêt nous allons considérer le passage de Voyager 1 à proximité de Jupiter qui s'est effectué en mars 1979.



Sur le schéma ci dessus on constate que la trajectoire de la sonde est très proche du plan équatorial<sup>9</sup> de la planète. On considérera par la suite que cette trajectoire est pratiquement plane et contenu dans ce plan équatorial.



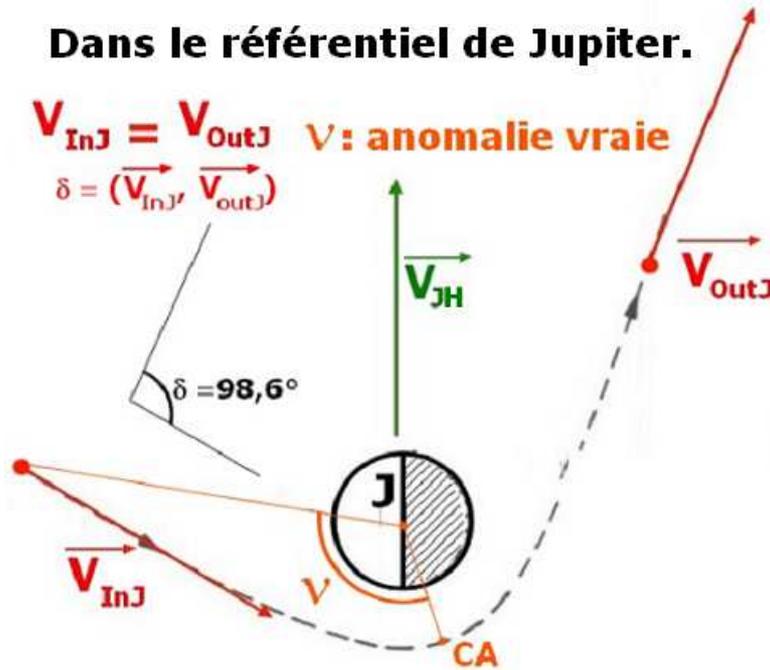
Sur la figure ci dessus est représentée la trajectoire de Voyager 1 dans le référentiel de Hill attaché à Jupiter. C'est donc une hyperbole parcourue en un peu moins de quatre jours. Au cours de cette traversée il croise les orbites des principaux satellites de la planète géante. A l'entrée dans la sphère de Hill la sonde a une vitesse<sup>10</sup>  $\vec{V}_{InJ}$  et à sa sortie cette vitesse a changé de direction pour devenir  $\vec{V}_{OutJ}$  (référentiel lié à Jupiter). Ces deux vecteurs ont la même amplitude et font entre eux un angle de  $98,6^\circ$  (donnée NASA). En effet, à l'intérieur de la sphère de Hill de Jupiter, on peut considérer que Voyager 1 arrive de « l'infini » avec une vitesse  $\vec{V}_{InJ}$  dont le module est supérieur à la vitesse de libération de Jupiter pour cette distance – la trajectoire de la sonde, dans le référentiel de la planète, est donc bien une branche d'hyperbole – et retourne à « l'infini » en ressortant de cette région avec la vitesse  $\vec{V}_{OutJ}$  qui a le même module que  $\vec{V}_{InJ}$ . Lors de son passage au plus proche de Jupiter ou périastre – noté CA au sommet de la branche de l'hyperbole – la vitesse de la sonde à une valeur maximum de 29,0 km/s par rapport à la planète<sup>11</sup>.

<sup>9</sup> Ce dernier est lui-même peu incliné sur le plan de l'écliptique.

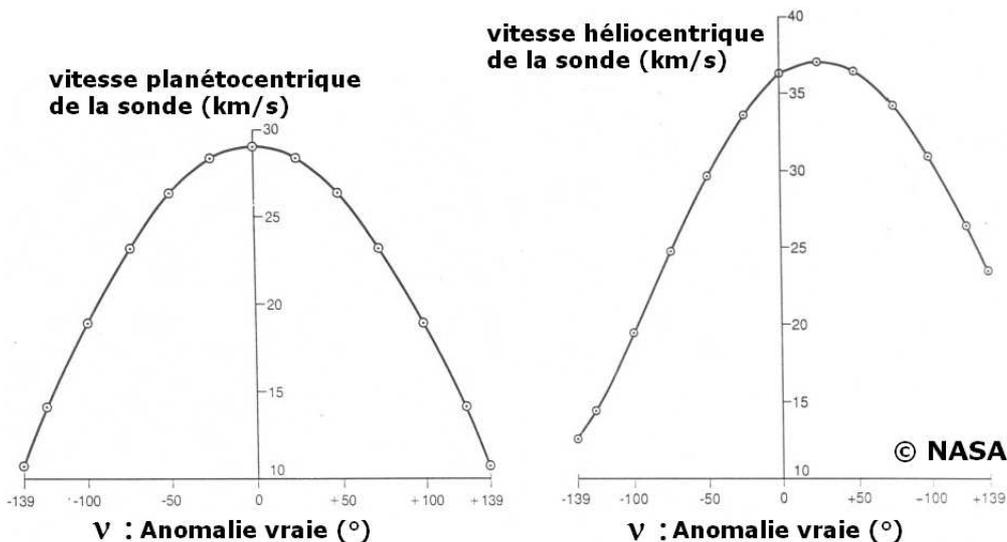
<sup>10</sup> Dans la notation des vitesses, la lettre **P** (pour Planète) devient un **J** (pour Jupiter).

<sup>11</sup> Notons que, dans le référentiel héliocentrique, la vitesse la plus grande durant cette interaction avec Jupiter dans sa sphère de Hill atteint 37,1 km/s un peu après le passage au périastre (donnée NASA). Ce décalage est dû au fait que le rayon vecteur du périastre n'est pas dans la direction du vecteur vitesse héliocentrique de Jupiter.

## Dans le référentiel de Jupiter.



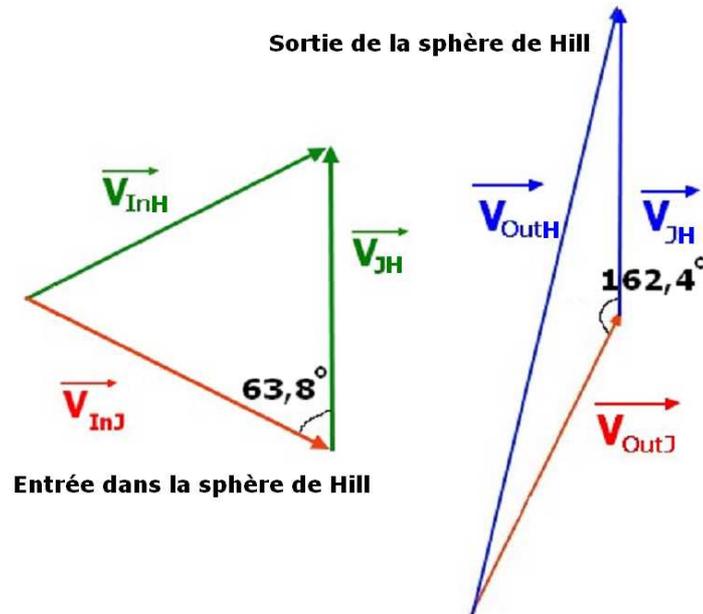
La NASA fournit les deux diagrammes suivants pour l'évolution de la vitesse de la sonde lors de son passage dans la sphère de Hill. La quantité notée « *anomalie vraie* » est l'angle entre le rayon vecteur de la sonde par rapport à Jupiter et le segment reliant le centre de Jupiter au périastre (négatif avant le passage au périastre et positif après) comme indiqué sur la figure ci dessus. On constate bien que, dans le référentiel planétocentrique, la courbe de vitesse est symétrique par rapport à la position d'anomalie vraie nulle et que la vitesse à la sortie de la sphère de Hill est égale à celle que possédait la sonde lors de son entrée. Par contre, dans le référentiel héliocentrique, le module de la vitesse de la sonde en quittant la sphère de Hill est supérieur à celui de celle qu'elle avait en l'abordant. C'est ce que l'on appelle l'effet de « **fronde gravitationnelle** ».



D'autres données sont disponibles pour étudier l'événement. Il s'agit tout d'abord des valeurs des modules de la vitesse de la sonde  $\vec{V}_{InH}$  à l'entrée dans la sphère de Hill et de la vitesse de Jupiter  $\vec{V}_{JH}$  dans le référentiel héliocentrique. Nous avons :

$$V_{InH} = 12,6 \text{ km/s} \quad V_{JH} = 12,8 \text{ km/s}$$

Nous pouvons alors construire les diagrammes vectoriels<sup>12</sup> des vitesses d'entrée et de sortie dans les référentiels planétocentrique et héliocentrique. Les valeurs des angles indiqués sont fournies par la NASA ou calculées d'après les données disponibles :



Dans le triangle des vitesses de gauche (entrée dans la sphère de Hill) exprimons le module de la vitesse  $\vec{V}_{InH}$  à partir des données connues (fournies par la NASA) en utilisant la relation entre les carrés des côtés d'un triangle quelconque :

$$V_{InH}^2 = V_{InJ}^2 + V_{JH}^2 - 2V_{InJ} \cdot V_{JH} \cdot \cos(63,8^\circ)$$

On résout cette équation<sup>13</sup> avec  $V_{InJ}$  comme inconnue et on obtient :

$$\boxed{V_{InJ} = 10,8 \text{ km/s}}$$

Comme déjà indiqué nous savons que  $V_{OutJ} = V_{InJ} = 10,8 \text{ km/s}$ , ce qui permet de trouver, sur le triangle des vitesses de droite (sortie de la sphère de Hill), le module de la vitesse  $V_{OutH}$  :

$$V_{OutH}^2 = V_{OutJ}^2 + V_{JH}^2 - 2V_{OutJ} \cdot V_{JH} \cdot \cos(162,4^\circ)$$

Tout calcul fait, nous obtenons alors :

$$\boxed{V_{OutH} = 23,3 \text{ km/s}}$$

On constate donc bien, dans le référentiel héliocentrique, une augmentation importante du module de la vitesse de 12,5 km/s de la sonde. Elle a donc également augmenter considérablement sa quantité de mouvement et son énergie cinétique. Détaillons cet aspect en s'appuyant sur les deux lois fondamentales de la dynamique concernées ici :

- La loi de conservation de la quantité de mouvement

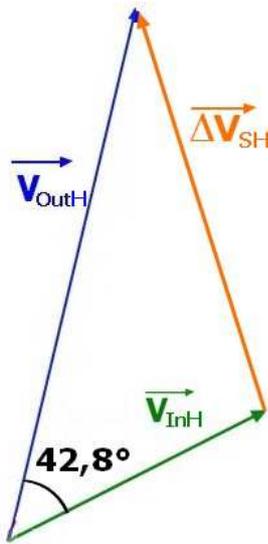
<sup>12</sup> Les diagrammes vectoriels représentés ne sont forcément justes quantitativement mais correspondent simplement à une visualisation des positionnements relatifs des vecteurs les uns par rapport aux autres.

<sup>13</sup> Seule la racine la plus grande de l'équation du second degré convient puisque l'autre est  $V_{InJ} = 0,45 \text{ km/s}$ . Cette dernière est beaucoup trop faible pour que la sonde suive une trajectoire hyperbolique dans le référentiel de Jupiter. Dans ce cas là elle aurait été détruite dans la haute atmosphère de Jupiter.

Selon les deuxième et troisième lois du mouvement de Newton, l'impulsion appliquée à la sonde du fait de la force gravitationnelle de la planète provoque une modification de sa quantité de mouvement  $\Delta\vec{p}_{SH}$  dans le référentiel héliocentrique. De même l'impulsion fournie à Jupiter du fait de l'interaction gravitationnelle avec l'engin spatial a également entraîné un changement de la quantité de mouvement  $\Delta\vec{p}_{JH}$  de la planète dans le même référentiel héliocentrique.

Nous pouvons écrire, pour la sonde de masse  $m_s$  :

$$\Delta\vec{p}_{SH} = m_s \cdot \vec{V}_{OutH} - m_s \cdot \vec{V}_{InH} = m_s \cdot \Delta\vec{V}_{SH}$$



$\Delta\vec{V}_{SH}$  est le changement de la vitesse héliocentrique de la sonde suite à la rencontre de cette dernière avec la planète Jupiter. La construction vectorielle ci contre montre que  $\Delta\vec{V}_{SH} = \vec{V}_{OutH} - \vec{V}_{InH}$ . L'angle de  $42,8^\circ$  entre les deux vecteurs vitesse est une donnée déduite de celles fournies par la NASA.

Pour Jupiter la relation précédente est du même type et, sachant que  $\Delta\vec{V}_{JH}$  est la variation de vitesse de Jupiter dans le référentiel héliocentrique, nous avons<sup>14</sup> :

$$\Delta\vec{p}_{JH} = m_J \cdot \vec{V}_{JOutH} - m_J \cdot \vec{V}_{JInH} = m_J \cdot \Delta\vec{V}_{JH}$$

La conservation de la quantité de mouvement pour le système (sonde + Jupiter) impose alors que :

$$\Delta\vec{p}_{JH} + \Delta\vec{p}_{SH} = \vec{0} \Rightarrow m_J \cdot \Delta\vec{V}_{JH} = -m_s \cdot \Delta\vec{V}_{SH}$$

Le rapport des modules des variations de vitesse est donc égal au rapport des masses et on donc :

$$\boxed{\Delta V_{JH} = \left( \frac{m_s}{m_J} \right) \Delta V_{SH}}$$

Nous pouvons calculer  $\Delta V_{SH}$  sur le diagramme ci dessus avec :

$$\Delta V_{SH}^2 = V_{OutH}^2 + V_{InH}^2 - 2 \cdot V_{OutH} \cdot V_{InH} \cdot \cos(42,8^\circ) \Rightarrow \Delta V_{SH} = 16,5 \text{ km/s}^{15}$$

Sachant que  $m = 722 \text{ kg}$  et  $M = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$  nous obtenons finalement  $\Delta V_{JH} = 3,8 \cdot 10^{-25} \text{ km/s}$ .

Cette valeur est extrêmement faible mais ne peut pas être considérée comme nulle car la variation de vitesse de la sonde lui est directement liée. Cependant on peut la négliger vis à vis du mouvement de Jupiter qui, à son échelle, n'est pas du tout affectée par une telle perte de quantité de mouvement.

- La loi de conservation de l'énergie cinétique

La nature conservative d'un tel rapprochement entraîne que, dans le référentiel héliocentrique, la somme de l'énergie cinétique de la sonde et de celle de Jupiter avant la rencontre est égale à celle

<sup>14</sup>  $\vec{V}_{JInH}$  et  $\vec{V}_{JOutH}$  sont, respectivement, la vitesse orbitale de Jupiter en référentiel héliocentrique à l'entrée de la sonde dans la sphère de Hill et celle à sa sortie.

<sup>15</sup> On remarque  $\Delta V_{SH} \neq V_{outH} - V_{InH}$ . En effet si  $\Delta\vec{V}_{SH} = \vec{V}_{OutH} - \vec{V}_{InH}$ , on a  $\|\Delta\vec{V}_{SH}\| \neq \|\vec{V}_{OutH}\| - \|\vec{V}_{InH}\|$ .

des mêmes quantités après<sup>16</sup>. Nous devons donc vérifier que le gain en énergie cinétique de Voyager durant son passage à proximité de Jupiter correspond à une perte de la planète de même valeur absolue. Voyons cela.

Le gain en énergie cinétique de la sonde peut s'écrire :

$$\Delta E_{SH} = m_s/2 \cdot (V_{OutH}^2 - V_{InH}^2)$$

En remplaçant les différentes grandeurs par leur valeur numérique nous obtenons :

$$\Delta E_{SH} = (722/2) \cdot ((23,3 \cdot 10^3)^2 - (12,6 \cdot 10^3)^2) = 139 \text{ GJ}$$

Pour Jupiter nous avons de même :

$$\Delta E_{JH} = m_J/2 \cdot (V_{JOutH}^2 - V_{JInH}^2)$$

$\vec{V}_{JInH}$  et  $\vec{V}_{JOutH}$  sont les vitesses héliocentrique de Jupiter au début et à la fin de l'interaction associée à l'assistance gravitationnelle. Nous savons que  $\vec{V}_{JOutH} - \vec{V}_{JInH} = \Delta \vec{V}_{JH}$  mais  $\vec{V}_{JInH}$  et  $\vec{V}_{JOutH}$  étant très proches l'une de l'autre nous allons réécrire la relation précédente différemment :

$$\begin{aligned} \Delta E_{JH} &= m_J/2 \cdot (\vec{V}_{JOutH} \cdot \vec{V}_{JOutH} - V_{JInH}^2) = m_J/2 \cdot [(\vec{V}_{JInH} + \Delta \vec{V}_{JH}) \cdot (\vec{V}_{JInH} + \Delta \vec{V}_{JH}) - V_{JInH}^2] \\ \Delta E_{JH} &= m_J/2 \cdot (V_{JInH}^2 - V_{JInH}^2 + 2 \cdot \vec{V}_{JInH} \cdot \Delta \vec{V}_{JH} + (\Delta V_{JH})^2) = m_J \cdot (\vec{V}_{JInH} \cdot \Delta \vec{V}_{JH} + (\Delta V_{JH})^2/2) \end{aligned}$$

Le second terme de la parenthèse est négligeable devant le premier et il nous reste :

$$\begin{aligned} \Delta E_{JH} &= m_J \cdot \vec{V}_{JInH} \cdot \Delta \vec{V}_{JH} \\ m_J \cdot \Delta \vec{V}_{JH} &= -m_s \cdot \Delta \vec{V}_{SH} \\ \Delta E_{JH} &= -m_s \cdot \vec{V}_{JInH} \cdot \Delta \vec{V}_{SH} = -m_s \cdot V_{JInH} \cdot \Delta V_{SH} \cdot \cos(\vec{V}_{JInH}, \Delta \vec{V}_{SH}) \end{aligned}$$

Il nous reste à calculer  $\cos(\vec{V}_{JInH}, \Delta \vec{V}_{SH})$ . Pour cela raisonnons sur le diagramme vectoriel de gauche correspondant à celui des vitesses. Les valeurs d'angle qui y figurent ont été calculées avec la formule d'Al Kashi de la généralisation du théorème de Pythagore à un triangle quelconque. On assimile bien entendu le vecteur  $\vec{V}_{JInH}$  au vecteur considéré comme constant<sup>17</sup> pendant l'assistance gravitationnelle représenté par  $\vec{V}_{JH}$  (vitesse de Jupiter dans le référentiel héliocentrique).

$$(\vec{V}_{JInH}, \Delta \vec{V}_{SH}) = (\vec{V}_{JH}, \Delta \vec{V}_{SH}) = 180^\circ - 105,6^\circ - 50,3^\circ = 24,1^\circ$$

Finalement :

<sup>16</sup> Si l'énergie potentielle de la sonde a varié pendant sa traversée de la sphère de Hill, le bilan final entre l'instant de son entrée et celui de sa sortie est nul.

<sup>17</sup> Durant la courte période où l'assistance gravitationnelle de Jupiter est opérationnelle on considère que le vecteur vitesse héliocentrique de la planète ne change pas ni en module ni en direction.

$$\Delta E_{JH} = -722 \times 12,8.10^3 \times 16,5.10^3 \times 0,913 = -139GJ$$

Donc nous trouvons bien que :

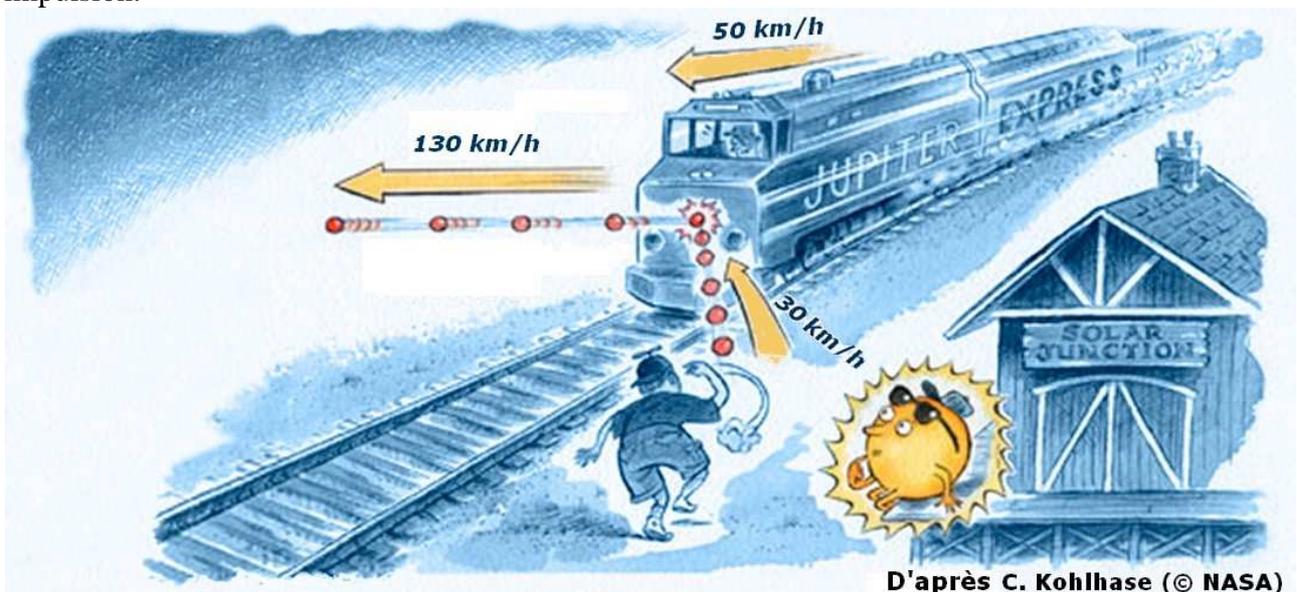
$$\Delta E_s = -\Delta E_j = 139GJ$$

Pour obtenir une telle énergie à l'aide d'une motorisation alimentée par un ergol chimique il aurait été nécessaire de tripler la masse de la charge utile lors du lancement. Quand on se rappelle, en plus, que Voyager 2, jumeau de notre exemple, a profité également de l'assistance gravitationnelle de Saturne puis de Neptune et enfin d'Uranus, on ne peut qu'être convaincu de l'intérêt de cette approche astucieuse du vol cosmique.

Remarquons que la perte d'énergie cinétique par Jupiter – et donc le gain pour la sonde Voyager – dépend directement de la vitesse héliocentrique de la planète. Si cette dernière avait été nulle l'assistance gravitationnelle n'aurait pas été possible. Il est donc clairement établi ici que le gain d'énergie cinétique héliocentrique de Voyager durant son rapprochement avec Jupiter est totalement dépendant du fait que la planète elle-même est en mouvement dans le Système solaire. Ceci est confirmé par la constatation que, dans le repère planétocentrique où Jupiter est bien entendu au repos, la sonde ne gagne aucune énergie cinétique lors de sa traversée du système jupitérien puisque  $V_{OutJ} = V_{InJ}$ .

### Autre interaction semblable à l'assistance gravitationnelle

Dans la rubrique pédagogique de son site, la NASA propose un exemple pour illustrer le fonctionnement de l'assistance gravitationnelle s'appuyant sur une analogie. Cette dernière, illustrée par le dessin ci-dessus, fait intervenir un convoi ferroviaire en mouvement qui représente Jupiter se déplaçant le long de son orbite autour du Soleil et un enfant représentant un vaisseau spatial et qui lance une balle de tennis. Cette dernière, en heurtant le train, lui transfère une partie de son impulsion.

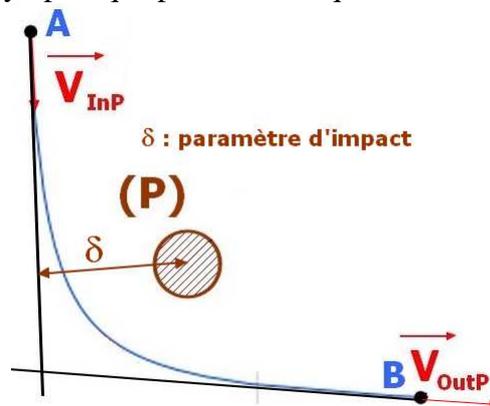


Intéressons nous aux vitesses proposées sur le dessin. L'enfant voit sa balle de tennis s'éloigner de lui à une vitesse de 30 km/h. Le Soleil, assis sur la plate-forme et au repos par rapport au lanceur, fait le même constat. Le conducteur du train voit la balle arriver à environ 80 km/h, puisque le train se déplace à une vitesse de 50 km/h par rapport au sol dans le sens contraire de la balle qui arrive vers lui. Le train et la balle interagissent avec une vitesse relative de 80 km/h. Dans le référentiel du

train la balle rebondit sur l'avant du train à presque 80 km/h, ce qui, pour un observateur au bord de la voie, vient s'ajouter au 50 km/h du train. La vitesse de la balle après le choc atteint donc dans le référentiel du lanceur une valeur proche<sup>18</sup> de 130 km/h puisque la masse  $m$  de la balle est négligeable devant celle  $M$  du train. Ce scénario est analogue à celui où la vitesse d'un engin spatial se compose avec celle de la planète « repart après le rebond » avec une valeur encore plus élevée, bien que le « rebond » de l'engin spatial soit une interaction gravitationnelle, donc sans contact, et non pas un choc comme dans cette analogie. Rien d'étonnant à cela puisque ce sont les mêmes lois de conservations (quantité de mouvement et énergie cinétique<sup>19</sup>) qui s'appliquent ici aussi. D'autres analogies sportives peuvent bien sûr être proposées comme le tennis ou le ping-pong.

L'assistance gravitationnelle est un cas particulier du problème des trois corps de la mécanique céleste, que les astronomes connaissent depuis les travaux fondateurs de **Joseph Louis Lagrange** (1736 – 1813). Dans ce problème, comme dans le travail présenté ici, il existe deux corps massifs et un troisième corps de masse beaucoup plus faible, chacun se déplaçant dans le champ gravitationnel des deux autres. Le troisième corps est considéré comme ayant une masse infiniment petite qui est soumise aux forces d'attraction des deux autres mais il n'exerce aucune force sur ces derniers, approximation satisfaisante bien qu'incorrecte par principe. Le mouvement des comètes dans le Système solaire est un sujet classique appartenant au problème des trois corps. Des solutions particulières indiquent comment une orbite héliocentrique de type parabolique peut être transformée en une orbite hyperbolique ou elliptique lors de la rencontre avec une planète. Les paramètres essentiels dans chaque cas sont :

- ✓ le paramètre d'impact<sup>20</sup>  $\delta$  c'est à dire la distance perpendiculaire entre le centre de la planète et la direction d'approche asymptotique planétocentrique de la comète.



- ✓ la vitesse d'évasion d'un objet à partir de la surface de la planète, à savoir  $v_{LP} = \sqrt{2G.m_p/R_p}$ , où, rappelons-le,  $G$  est la constante de gravitation de Newton,  $m_p$  est la masse de la planète et  $R_p$  son rayon
- ✓ la vitesse héliocentrique de la planète
- ✓ la vitesse d'approche planétocentrique de la comète.

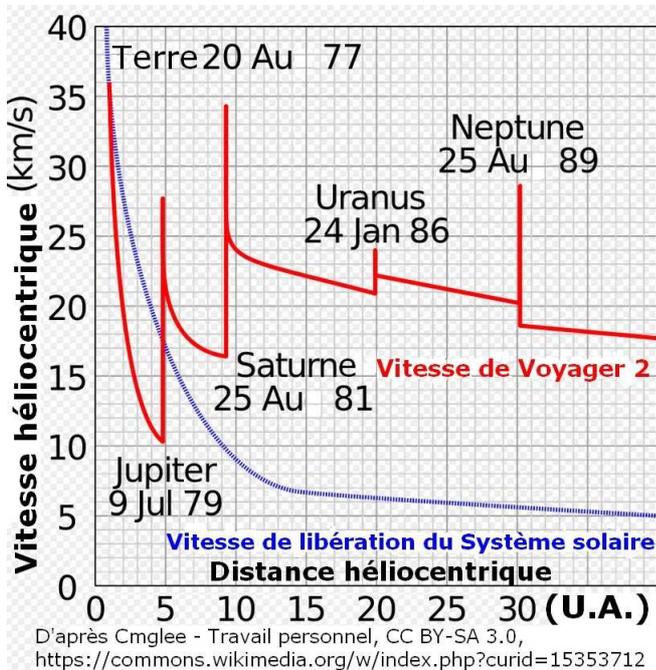
Du fait que la masse de Jupiter est beaucoup plus grande que celle de n'importe quelle autre planète, elle joue le rôle le plus important dans la perturbation des orbites des comètes.

<sup>18</sup> En réalité le lanceur balance sa balle dans une direction qui fait un certain angle avec celle de la voie. Si, par exemple, cet angle vaut  $30^\circ$  la vitesse de rebond de la balle vaudra, en toute rigueur, 127 km/h, proche des 130 proposés ci dessus.

<sup>19</sup> On néglige ici la variation d'énergie potentielle gravitationnelle de la balle au cours de son mouvement.

<sup>20</sup> On rencontre également cette grandeur en physique nucléaire, par exemple en étudiant la diffusion des particules  $\alpha$  par les noyaux d'or dans l'expérience d'Ernest Rutherford (1909).

Un autre exemple du problème des trois corps peut être donné en considérant la capture éventuelle d'un objet passant d'une orbite hyperbolique à une orbite elliptique autour d'une planète. Dans le problème des deux corps, impliquant uniquement la planète et l'objet, la capture est impossible. Le corps frappe la planète ou passe près d'elle selon une hyperbole centrée sur cette dernière. Mais si un deuxième corps massif – un satellite de la planète par exemple - est ajouté au problème, la capture de l'objet devient possible dans des circonstances très particulières.



Avec les moyens informatiques actuels, les calculs nécessaires pour configurer le lancement et la trajectoire des sondes destinées à sillonner le Système solaire ne posent plus aucun problème et on peut envisager, pour une même sonde, plusieurs passages à proximité de plusieurs planètes pour optimiser de la meilleure façon son voyage et sa consommation de carburant. Citons ci dessous quelques exemples particulièrement spectaculaires dans lesquels le procédé a été largement utilisé :

**Mariner 10** : Première utilisation de l'assistance gravitationnelle en 1974 à proximité de Vénus afin de modifier sa trajectoire en direction de Mercure.

**Voyager 2** : Lancé en 1977 en direction du Système solaire extérieur cette sonde a pu profiter de l'assistance gravitationnelle de Jupiter pour rejoindre Saturne, de cette dernière pour se diriger vers Uranus et enfin de celle ci pour atteindre 12 ans après son départ Neptune. Sans ces « coups de pouce de la gravitation il aurait fallu au moins 30 ans pour parvenir au but final de son voyage. Il faut cependant remarquer qu'un tel exploit n'a été possible que grâce à un ensemble particulièrement favorable des positions relatives de toutes ces planètes qui ne se reproduit que tous les 276 ans. Voyager 1, dont le mouvement est pris comme exemple dans les pages précédentes, n'avait croisé, après Jupiter, que la planète Saturne.

En 2019 la NASA est toujours en contact avec les deux sondes qui ont franchi l'héliopause<sup>21</sup> il y a quelques années (Voyager 1) ou quelques mois (Voyager 2).

On peut suivre la progression de leur déplacement sur le site de la NASA avec le lien suivant : <https://voyager.jpl.nasa.gov/mission/status/>

**Ulysses** : Cette sonde, développée conjointement par l'ESA et la NASA, a été lancée le 09 octobre 1990 afin d'étudier le Soleil depuis ses zones polaires jusqu'à sa partie équatoriale au cours d'un cycle complet d'activité (environ 11 ans). Pour cela l'engin devait suivre une trajectoire en dehors de l'écliptique, l'idéal étant d'être dans un plan perpendiculaire à ce dernier. Aucune fusée, encore aujourd'hui, n'était disponible pour atteindre un tel objectif. On a donc utilisé, là encore, l'assistance gravitationnelle de Jupiter. Lancée sur une orbite de Hohmann dont la planète géante était l'aphélie, la sonde a été déviée sur une nouvelle trajectoire contenue dans un plan faisant un angle de 80° avec celui de l'écliptique.

<sup>21</sup> L'héliopause est la frontière « floue » séparant le milieu interstellaire du Système solaire par rapport au flux de particules électrisées (plasma) émis par le Soleil. Au delà de cette limite il n'est plus possible de distinguer son origine.

On peut donner d'autres exemples de missions que l'on retrouvera dans le tableau suivant contenant en particulier les planètes fournissant l'assistance gravitationnelle accompagnées du nombre de fois où elle a été utilisée pour chaque mission.

Mission	Lancement	Destination	Durée voyage	Assistance gravitationnelle				
				Me	V	T	Ma	J
Galileo	18/10/1989	Jupiter	6 ans		1	2		
Cassini Huygens	15/10/1997	Saturne	7 ans		2	1		1
Hayabusa	09/03/2002	Itokawa	3,5 ans			1		
Rosetta	02/03/2004	Tchiouromov Guéra.	10,5 ans		3	3	1	
Messenger	03/08/2004	Mercure	6,5 ans	3	2	1		
New Horizons	19/01/2006	Pluton	9,5 ans					1
Dawn	27/09/2007	Vesta - Cérés	4 ans				1	
Hayabusa	23/12/2014	Ryugu	3,5 ans			1		
Osiris REx	08/09/2016	Bénou	2 ans			1		
Bepi Colombo	19/10/2018	Mercure	7 ans	6	2	1		

On constate bien, comme indiqué au début de cet article, que les missions vers l'intérieur de notre Système solaire (il faut ralentir les sondes donc diminuer leur énergie cinétique) nécessitent le plus souvent un nombre d'interactions supérieur à celles dirigées vers l'extérieur. Cependant, comme on peut le voir, le gain énergétique a un coût situé dans l'augmentation de la longueur du trajet suivi et donc dans celle de la durée du voyage<sup>22</sup>. Par exemple le vol direct des sondes Voyager vers Jupiter a duré un peu moins de deux ans alors qu'il en a fallu plus de six à Galileo pour atteindre le même objectif après trois relances par assistance gravitationnelle.

## Conclusion

Les travaux de Michael Minovitch n'avaient rien de novateur ; ils se plaçaient dans la continuité de ceux de nombreux astronomes<sup>23</sup> ayant étudié le cas restreint du problème des trois corps de la mécanique céleste. Cependant, conduite dans la perspective d'une application aux nouveaux problèmes de l'aéronautique naissante, son étude constituait une innovation. En effet le but poursuivi par M. Minovitch ne se plaçait pas dans la logique de ses prédécesseurs pour lesquels seule une connaissance précise du mouvement des objets du Système solaire importait. Il s'agissait pour lui de vérifier une intuition, qu'il tient de sa bonne connaissance de la mécanique céleste « classique », relative à la possibilité de modifier avec un gain énergétique la trajectoire d'une sonde spatiale lors de son interaction gravitationnelle avec une planète.

Pour conduire cette vérification, le jeune mathématicien va profiter d'un outil puissant qu'aucun de ses prédécesseurs ne possédait : l'ordinateur. En s'appuyant sur des calculs itératifs basés sur les théories de ses prédécesseurs il a pu calculer de nombreuses trajectoires et vérifier qu'il en existait certaines permettant d'extraire de l'énergie gravitationnelle de la planète croisée pour accélérer la sonde étudiée. Aujourd'hui les moyens informatiques disponibles sont tels qu'il est possible de passer à la résolution des problèmes à N corps et donc de tenir compte de l'influence des objets plus lointains pour parvenir à des précisions remarquables dans l'évaluation des trajectoires envisagées.

<sup>22</sup> Cette dernière remarque a une exception notable avec les sondes Voyager 1 et 2 pour lesquelles les « coups de pouce » gravitationnels des planètes extérieures ont considérablement raccourci la durée du voyage. Cependant cela n'aurait pas été possible si la finalité des missions avait été de se satelliser autour d'un des objets.

<sup>23</sup> En plus de JL Lagrange, déjà cité, on peut rappeler quelques noms d'astronomes ayant fait avancer nos connaissances dans ce domaine : PS de Laplace (1749-1827), CE Delaunay (1816 – 1872), FF Tisserand (1843 – 1896), H Poincaré (1854 – 1912).

L'assistance gravitationnelle est donc devenue indispensable pour la plupart des voyages interplanétaires, hormis ceux en direction de Mars qui se contentent le plus souvent de suivre une trajectoire de Hohmann sans profiter d'aucune assistance gravitationnelle.

**Pierre MAGNIEN**  
**04 avril 2019**

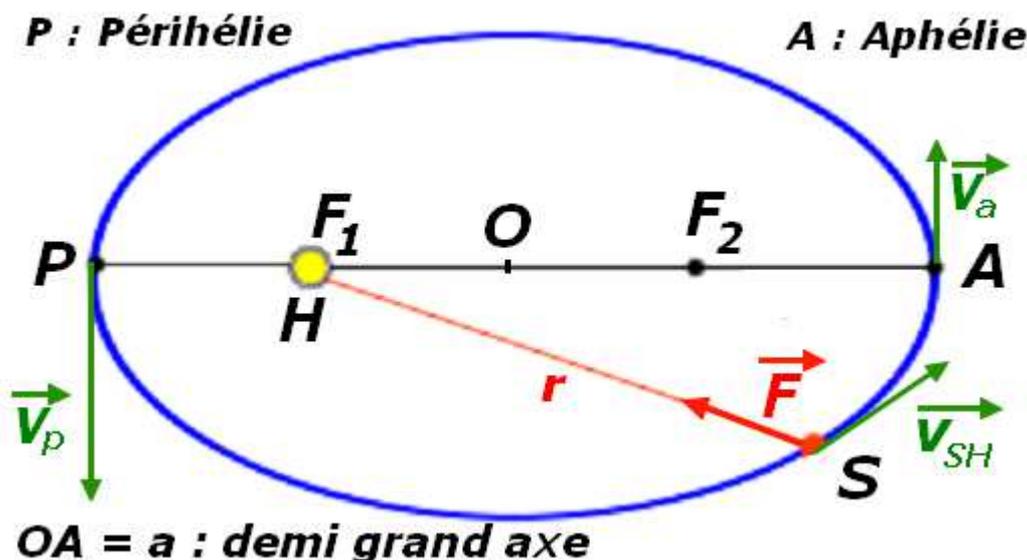
### **Ouvrages, articles et liens Internet :**

- ✓ Vidéo intitulée « *L'effet de fronde gravitationnelle pour les sondes interplanétaires* » dans laquelle Étienne Parizot, astrophysicien et professeur à l'Université Paris Diderot, nous entretient du phénomène :  
<https://www.youtube.com/watch?v=wvztTXN0o9o>
- ✓ Site de **Michael Minovitch** avec de nombreux articles relatifs à l'assistance gravitationnelle.  
<http://www.gravityassist.com/>
- ✓ Article « *Voyage interplanétaire : application à une mission martienne* » - Les Cahiers Clairaut n°127 – août 2009 - page 18)  
[http://clea-astro.eu/archives/cahiers-clairaut/CLEA\\_CahiersClairaut\\_127\\_07.pdf](http://clea-astro.eu/archives/cahiers-clairaut/CLEA_CahiersClairaut_127_07.pdf)
- ✓ Cours de l'Observatoire de Marseille « *Assistance Gravitationnelle* »  
<https://astronomia.fr/seminaires/annee1415/assistanceGravit.php>
- ✓ « *Astronomie générale* » - André Danjon chez Albert Blanchard (niveau universitaire)

## Annexes

### A1 : Vitesse d'un objet en un point quelconque de son orbite

On trouve dans le texte l'expression de la vitesse d'un objet (S) en orbite elliptique autour du Soleil (H) en fonction de sa distance  $r$  à ce dernier.



Elle est de la forme :

$$v_{SH} = \sqrt{G \cdot m_H \cdot (2/r - 1/a)}$$

On sait que si les forces appliquées à un point matériel sont conservatives (c'est à dire dérivent d'un potentiel via un gradient) l'énergie mécanique (c'est à dire la somme des énergies cinétique et potentielle) se conserve au cours du mouvement. Elle est donc constante. Or, la force gravitationnelle dérivant du potentiel gravitationnel, on peut donc écrire :

$$\boxed{E_{(r)} = E_c + U = cste}$$

L'utilisation du théorème du moment cinétique  $\sigma$  appliqué en O dans le cas d'un mouvement à force centrale permet de conclure que  $d\sigma/dt = 0$  donc :

$$\boxed{\sigma = cste}$$

Nous allons écrire ces deux lois de conservation<sup>24</sup> pour le point matériel S de masse  $m_S$  en deux points particuliers de l'orbite elliptique qui sont l'aphélie A avec une vitesse  $\vec{v}_a$  et le périhélie P avec une vitesse  $\vec{v}_p$ . Nous utiliserons également les relations entre les expressions des distances à l'aphélie et au périhélie de S en fonction du demi grand-axe  $a$  et de l'excentricité  $e$  de l'ellipse :

$$r_a = a \cdot (1 + e) \text{ et } r_p = a \cdot (1 - e)$$

<sup>24</sup> Les mises en équation faites ici tiennent compte du fait que  $m_H \gg m_S$ . Ceci concerne en particulier le terme relatif à l'énergie cinétique qui, dans le cas général, doit faire intervenir la masse réduite  $\mu$  telle que  $\mu = m_S \cdot m_H / (m_S + m_H)$ . Si  $m_H \gg m_S$  alors  $\mu = m_S$ .

En A nous avons, pour l'énergie tout d'abord et le moment cinétique ensuite :

$$E_a = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_a^2 - \frac{G \cdot m_H \cdot m_s}{r_a} = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_a^2 - \frac{G \cdot m_H \cdot m_s}{a \cdot (1+e)}$$

$$\sigma_a = m_s \cdot v_a \cdot r_a = m_s \cdot v_a \cdot a \cdot (1+e)$$

En P nous avons :

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_p^2 - \frac{G \cdot m_H \cdot m_s}{r_p} = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_p^2 - \frac{G \cdot m_H \cdot m_s}{a \cdot (1-e)} \quad (1)$$

$$\sigma_p = m_s \cdot v_p \cdot r_p = m_s \cdot v_p \cdot a \cdot (1+e)$$

Nous avons bien entendu  $E_a = E_p$  et  $\sigma_a = \sigma_p$ . La première égalité va nous permettre de déterminer  $(v_p^2 - v_a^2)$  et la seconde  $v_p/v_a$ . Après quelques calculs algébriques simples nous aboutissons à :

$$(v_p^2 - v_a^2) = \frac{2Gm_H}{a} \cdot \frac{2e}{(1-e) \cdot (1+e)} \quad (2)$$

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow v_a = \frac{1-e}{1+e} \cdot v_p \quad (3)$$

En utilisant (3) pour éliminer  $v_a$  dans (2) nous obtenons une expression de  $v_p^2$  qui est, après regroupements de termes et simplification :

$$v_p^2 = \frac{G \cdot m_H}{a} \cdot \frac{(1+e)}{(1-e)}$$

Nous pouvons maintenant calculer, à l'aide de l'expression (1),  $E_p$  qui, du fait de la loi de conservation de l'énergie, sera égale à l'énergie totale en n'importe quel point de l'orbite :

$$E_{(r)} = E_p = -\frac{G \cdot m_H \cdot m_s}{2a} = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_{SH}^2 - \frac{G \cdot m_H \cdot m_s}{r} \Rightarrow v_{SH}^2 = G \cdot m_H \cdot \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Nous aboutissons bien à l'expression recherchée

$$v_{SH} = \sqrt{G \cdot m_H \cdot \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

## A2 : Compléments sur la sphère de Hill

Pour déterminer les caractéristiques de la région<sup>25</sup> centrée sur une planète et à l'intérieur de laquelle on souhaite négliger l'influence du Soleil il nous faut fixer un critère quantitatif. Nous dirons que la limite extérieure de cette zone est constituée par l'ensemble des points où, dans le référentiel lié à la planète, un point matériel est soumis à une résultante des forces appliquées nulle. Sachant que, dans la pratique, les sondes se déplacent pour la plupart dans le plan de l'écliptique, nous nous limiterons uniquement à l'étude des points contenus dans ce plan qui est approximativement celui de l'orbite

<sup>25</sup> J'évite ici de parler de sphère car, comme nous le verrons, cette région, telle qu'elle est définie, a une forme assez complexe et, en tout cas, pas sphérique.

de la planète. Le référentiel attaché à la planète étant en rotation autour du Soleil, il n'est pas galiléen et nous devons introduire une force centrifuge<sup>26</sup>.

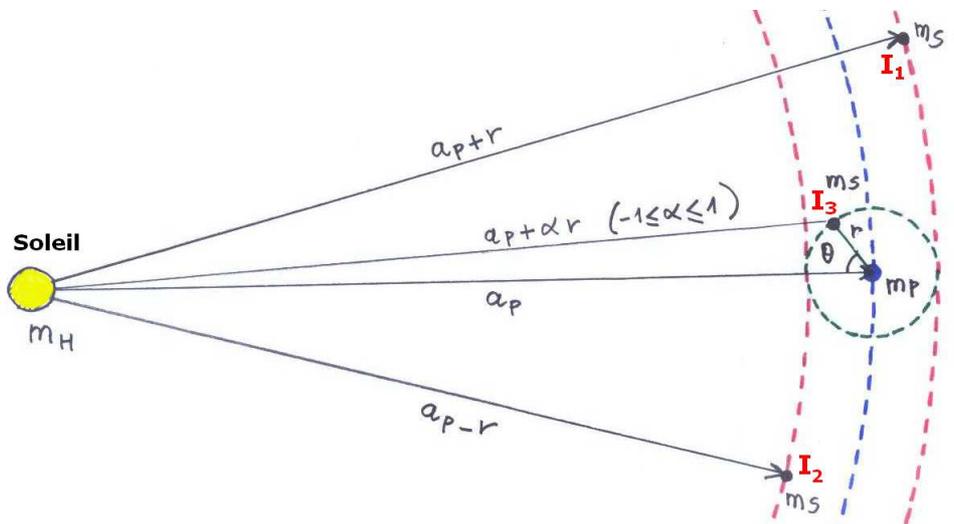
Considérons donc un point matériel de masse  $m_s$  tournant autour du Soleil de masse  $m_H$  avec la même vitesse angulaire  $\omega$  que la planète de masse  $m_P$ . Cette dernière est située à une distance  $a_P$  du Soleil. Le rayon de la sphère de Hill, noté précédemment  $r_{HILL}$ , sera désigné ici par  $r$ .

Dans un référentiel attaché à la planète (P) et en rotation autour du Soleil, (P) est soumise à deux forces qui s'équilibrent : la force d'attraction gravitationnelle et la force centrifuge. On peut donc écrire :

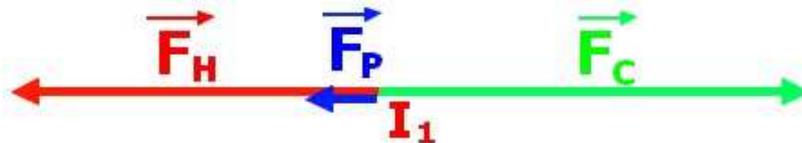
$$m_P \cdot \omega^2 \cdot a_P = G \cdot m_P \cdot m_H / a_P^2$$

$$\omega^2 = G \cdot m_H / a_P^3$$

Comme indiqué sur le schéma nous placerons le point matériel en  $I_1$  puis en  $I_2$  et enfin en  $I_3$ .



De même le point matériel est soumis aux forces de gravitation du Soleil  $\vec{F}_H$  et de la planète  $\vec{F}_P$  ainsi qu'à la force centrifuge  $\vec{F}_C$ . En  $I_1$  ces forces se placent de la façon suivante :



$$m_s \cdot \omega^2 \cdot (a_P + r) = G \cdot m_s \cdot (m_H / (a_P + r)^2 + m_P / r^2)$$

Remplaçons  $\omega^2$  par son expression :

$$G \cdot m_s \cdot m_H \cdot (a_P + r) / a_P^3 = G \cdot m_s \cdot (m_H / (a_P + r)^2 + m_P / r^2)$$

$$m_H \cdot (a_P + r) / a_P^3 = m_H / (a_P + r)^2 + m_P / r^2$$

<sup>26</sup> Nous considérerons dans la suite le référentiel lié à la planète en **rotation** dans le référentiel de Copernic et non pas le référentiel en **translation curviligne** dans lequel il y a conservation du parallélisme des axes  $O'x'$  et  $O'y'$  par rapport à ceux qui leur correspondent dans le référentiel de Copernic.

Multiplions les deux membres par  $a_P^3 \cdot (a_P+r)^2 \cdot r^2$  :

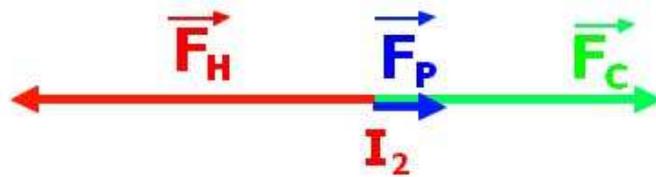
$$m_H \cdot (a_P + r)^3 \cdot r^2 = m_H \cdot a_P^3 \cdot r^2 + m_P \cdot a_P^3 \cdot (a_P + r)^2 \Rightarrow m_P \cdot a_P^3 \cdot (a_P + r)^2 = m_H \cdot (a_P + r)^3 \cdot r^2 - m_H \cdot a_P^3 \cdot r^2$$

$$m_P \cdot a_P^3 \cdot (a_P + r)^2 = m_H \cdot r^2 \cdot (a_P^3 + 3a_P^2 \cdot r + 3a_P \cdot r^2 + r^3) - m_H \cdot a_P^3 \cdot r^2$$

Après développement et simplification du membre de droite :

$$\boxed{m_P \cdot a_P^3 \cdot (a_P + r)^2 = m_H \cdot r^3 \cdot (3a_P^2 + 3a_P \cdot r + r^2)} \quad (1)$$

Au point  $I_2$  on a un schéma des forces selon le schéma suivant :



En développant de la même manière que précédemment on obtient à la place de l'équation (1) :

$$\boxed{m_P \cdot a_P^3 \cdot (a_P - r)^2 = m_H \cdot r^3 \cdot (3a_P^2 - 3a_P \cdot r + r^2)} \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) peuvent se mettre sous une seule et même forme en introduisant un coefficient  $\epsilon$  qui vaudra + 1 dans le premier cas et -1 dans le second.

$$\boxed{m_P \cdot a_P^3 \cdot (a_P + \epsilon r)^2 = m_H \cdot r^3 \cdot (3a_P^2 + 3\epsilon a_P \cdot r + r^2)}$$

Si  $r \ll a_P$  alors  $(a_P + \epsilon r)^2 \approx a_P^2$  et  $3a_P^2 + 3\epsilon a_P \cdot r + r^2 \approx 3a_P^2$ . L'équation précédente se simplifie sous la forme :

$$m_P \cdot a_P^5 \approx 3m_H \cdot r^3 \cdot a_P^2 \Rightarrow m_P \cdot a_P^3 \approx 3m_H \cdot r^3$$

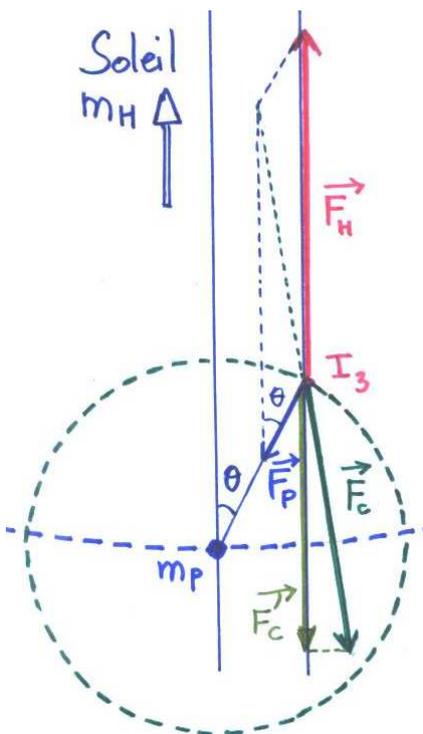
Finalement en  $I_1$  et  $I_2$  :

$$\boxed{r \approx a_P \sqrt[3]{m_P / 3m_H}} \quad (3)$$

Pour une planète comme Jupiter nous avons  $m_P/m_H = 1048$  et le rapport  $r/a_P \approx 0,068$ . Comme  $a_P$  vaut  $778.10^6$  km cela nous donne pour  $r$  environ  $53.10^6$  km.

Dans une position quelconque, comme  $I_3$ , du point matériel de masse  $m_S$  le calcul doit tenir compte de la valeur de l'angle  $\theta$ .

La figure ci-contre qui a permis de faire les calculs introduit une approximation par rapport à celle présentée plus haut. On y fait le choix du parallélisme des deux directions (Planète, Soleil) – (Point  $I_3$ , Soleil) afin de simplifier les calculs.



Les modules de  $\vec{F}_H$  et de  $\vec{F}_P$  sont donnés par les expressions suivantes :

$$\vec{F}_H = G.m_s.m_H / (a_p - r \cdot \cos(\theta))^2$$

$$\vec{F}_P = G.m_s.m_P / r^2$$

On a toujours, bien entendu  $\omega^2 = G.m_H / a_p^3$

En calculant le module de la résultante de  $\vec{F}_H$  et  $\vec{F}_P$  - égale et opposée à  $\vec{F}_C$  - sur le triangle quelconque contenant l'angle  $\theta$  pris dans le parallélogramme des forces nous obtenons la relation :

$$F_C^2 = F_P^2 + F_H^2 - 2.F_P.F_H \cdot \cos(\theta)$$

Cependant, ici, la force centrifuge  $\vec{F}_C$  n'est plus dans la direction du Soleil et c'est sa composante radiale  $\vec{F}'_C$  qui est égale à  $m_s \omega^2 \cdot [a_p - r \cdot \cos(\theta)]$ . Après un calcul laborieux et en posant, pour simplifier l'écriture,  $a_p = 1$ ,  $m_P = 1$  (donc  $m_H = 1048$  pour la planète Jupiter que nous avons prise ici comme exemple), nous obtenons comme expression à vérifier pour  $r$  :

$$\boxed{[1 - r \cdot \cos(\theta)]^2 \cdot \cos(\theta) = m_H \cdot r^3 \cdot \cos(\theta) \cdot [3 - 3r \cdot \cos(\theta) + r^2 \cdot \cos^2(\theta)]} \quad (4)$$

On vérifie que l'expression (4) trouvée est identique à l'expression (1) pour  $\theta = \pi$  et à l'expression (2) pour  $\theta = 0$ . Pour calculer les différentes valeurs de  $r$  correspondantes à différents angles  $\theta$  variant de 0 à 180° nous faisons la recherche dans une page Excel en débutant avec une première valeur obtenue avec l'expression simplifiée  $r \approx a_p \sqrt[3]{m_P / 3m_H}$ . En prenant  $a_p = 1$  et  $m_P = 1$  nous travaillerons autour de  $r \approx \sqrt[3]{1/3m_H} = 0,0683$ .

Finalement nous obtenons le tableau suivant pour les différentes expressions obtenues dans les calculs précédents. Les valeurs de  $r$  y sont exprimées en  $10^2$  :

Angle $\theta$	Expression (1)	Expression (2)	Expression (3)	Expression (4)
0		6,667	6,826	6,667
30				6,689
45				6,714
60				6,748
70				6,773
80				6,799
90				6,826
100				6,853
110				6,879
120				6,903
135				6,934
150				6,958
180	6,978		6,826	6,978

On voit donc que, par rapport à nos hypothèses simplificatrices permettant d'étudier l'effet de fronde gravitationnelle, l'expression (3) est largement suffisante pour faire l'étude quantitative du phénomène abordé.

### A3 : notations utilisées dans le texte

$m_H$  : Masse du Soleil

$m_P$  : Masse d'une planète quelconque

$m_J$  : Masse de Jupiter

$m_S$  : Masse de la sonde

$\vec{V}_{LP}$  : Vitesse planétocentrique de libération de la planète P

$\vec{V}_{InP}$  : Vitesse planétocentrique d'une sonde lors de son entrée dans la sphère de Hill de la planète P

$\vec{V}_{OutP}$  : Vitesse planétocentrique d'une sonde lors de sa sortie de la sphère de Hill de la planète P

$\vec{V}_{MaxP}$  : Vitesse planétocentrique maximale d'une sonde lors de sa traversée de la sphère de Hill de la planète P

$\vec{V}_{InH}$  : Vitesse héliocentrique d'une sonde lors de son entrée dans la sphère de Hill de la planète P en général ou Jupiter en particulier

$\vec{V}_{OutH}$  : Vitesse héliocentrique d'une sonde lors de sa sortie de la sphère de Hill de la planète P en général ou Jupiter en particulier

$\vec{V}_{PH}$  : Vitesse héliocentrique de la planète P

$\vec{V}_{JInH}$  : Vitesse héliocentrique de la planète Jupiter lors de l'entrée dans la sphère de Hill par la sonde

$\vec{V}_{JOutH}$  : Vitesse héliocentrique de la planète Jupiter lors de la sortie de la sphère de Hill de la sonde

$\vec{V}_{JH}$  : Vitesse héliocentrique « moyenne » de la planète Jupiter ( $\vec{V}_{JH} \approx (\vec{V}_{JOutH} + \vec{V}_{JInH})/2$ )

$\Delta\vec{V}_{SH}$  : Variation de la vitesse héliocentrique d'une sonde lors de sa traversée de la sphère de Hill de la planète Jupiter

$\Delta\vec{p}_{SH}$  : Variation de la quantité de mouvement héliocentrique d'une sonde lors de sa traversée de la sphère de Hill de la planète Jupiter

$\Delta\vec{V}_{JH}$  : Variation de la vitesse héliocentrique de Jupiter lors de la traversée par une sonde de sa sphère de Hill

$\Delta\vec{p}_{JH}$  : Variation de la quantité de mouvement héliocentrique de Jupiter lors de la traversée par une sonde de sa sphère de Hill

$\Delta E_{SH}$  : Variation de l'énergie cinétique héliocentrique d'une sonde lors de sa traversée de la sphère de Hill de la planète Jupiter

$\Delta E_{JH}$  : Variation de l'énergie cinétique héliocentrique de Jupiter lors de la traversée par une sonde de sa sphère de Hill