TRANSFORMATION DES VITESSES ET DES ACCELERATIONS EN RELATIVITE RESTREINTE

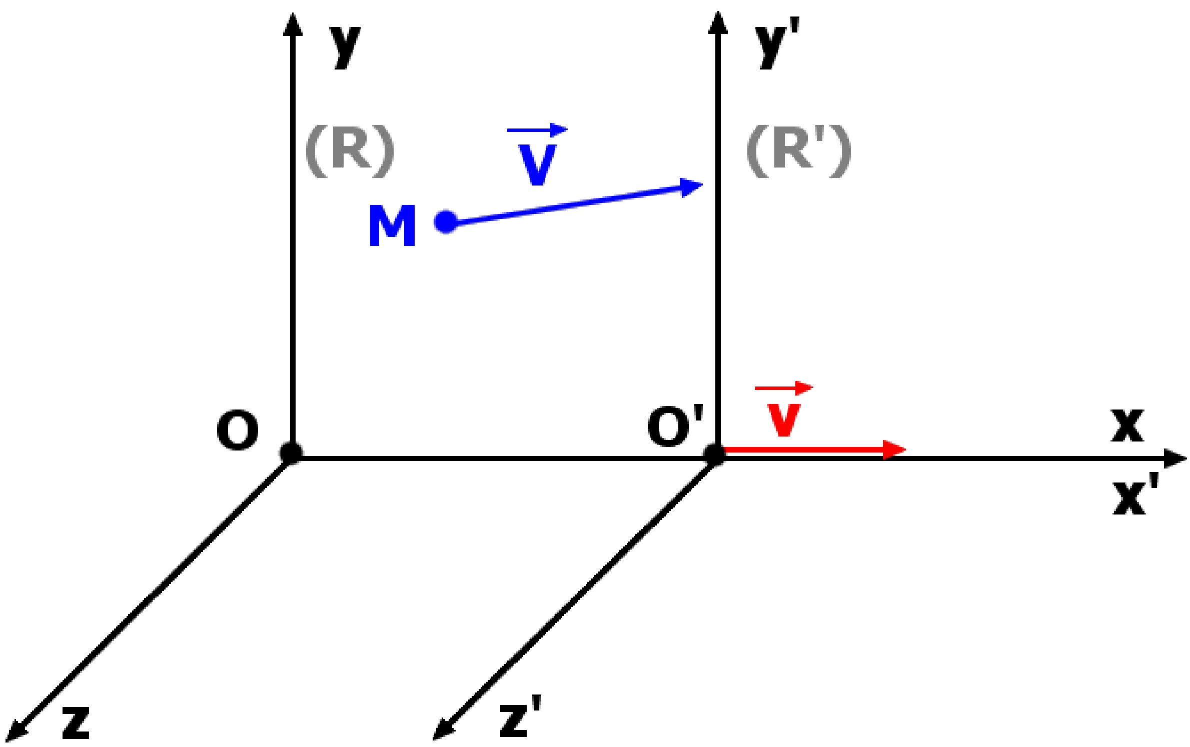
INTRODUCTION

Le temps et l'espace n'étant plus indépendant l'un de l'autre en relativité restreinte, les lois de transformation ne sont plus celles de Galilée mais celles de Lorentz. Rappelons ces dernières dans le cas du déplacement d'un référentiel **(R')** par rapport à un référentiel **(R)** à la vitesse $\vec{v}$. Nous considérons que Ox, O'x' et $\vec{v}$ sont colinéaires, comme détaillé sur la figure ci contre.

Transformation de Lorentz :

$$x = \gamma.(x' + v.t') \quad y = y' \quad z = z'$$

$$t = \gamma.(t' + \frac{v}{c^2}.x')$$



Cette interdépendance entre les coordonnées d'espace et celle de temps va compliquer sérieusement les formules de transformation des vitesses et des accélérations, comme nous allons le voir.

TRANSFORMATION DES VITESSES

Soit un point matériel M ayant, dans le référentiel **(R')**, une vitesse $\vec{V}$ quelconque et dont les composantes, dans **(R)** et dans **(R')** sont données par les relations suivantes :

$$V_x = \frac{dx}{dt} \qquad V'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} \qquad V'_{y'} = \frac{dy'}{dt'}$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} \qquad V'_{z'} = \frac{dz'}{dt'}$$

Calculons les différentielles des relations de la transformation de Lorentz :

$$dx = \gamma.(dx' + v.dt')$$

$$dy = dy'$$

$$dz = dz'$$

$$dt = \gamma.(dt' + \frac{v}{c^2}.dx')$$

On a alors :

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma.(dx' + v.dt')}{\gamma.(dt' + \frac{v}{c^2}.dx')} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}.\frac{dx'}{dt'}} = \frac{V'_{x'} + v}{1 + \frac{v.V'_{x'}}{c^2}}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma.(dt' + \frac{v}{c^2}.dx')} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma.(1 + \frac{v}{c^2}.\frac{dx'}{dt'})} = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)}.V'_{y'}}{1 + \frac{v.V'_{x'}}{c^2}}$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)}.V'_{z'}}{1 + \frac{v.V'_{x'}}{c^2}} \quad (\textit{calcul identique à celui de } V_y)$$

On peut utiliser ces formules de transformation pour expliquer certains phénomènes observés comme l'aberration de la lumière stellaire ou l'expérience de Fizeau sur la vitesse de la lumière dans un courant d'eau.

<u>TRANSFORMATION DES ACCELERATIONS</u>

En mécanique classique l'accélération est un invariant pour des référentiels galiléens. Là encore, du fait de la nouvelle formulation des lois de transformation de l'espace et du temps, çà n'est plus le cas en relativité restreinte. Dans les référentiels **(R)** et **(R')** les accélérations du point matériel M sont :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad \vec{a}' = \frac{d\vec{V}'}{dt'}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dV_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dV_z}{dt}$$

$$a'_{x'} = \frac{dV'_{x'}}{dt'} \qquad a'_{y'} = \frac{dV'_{y'}}{dt'} \qquad a'_{z'} = \frac{dV'_{z'}}{dt'}$$

Nous avons les expressions des composantes de la vitesse de la particule dans **(R)** et dans **(R')** ainsi que celle de dt en fonction de dt' qu'on peut reformuler différemment :

$$dt = \gamma.(dt' + \frac{v}{c^2}.dx') = \gamma.dt'.(1 + \frac{v}{c^2}.\frac{dx'}{dt'}) = \frac{(1 + \frac{v.V'_{x'}}{c^2})}{\sqrt{(1-\beta^2)}}.dt'$$

Calculons dV_x en fonction de $d'V_{x'}$. Après dérivation de $V'_{x'}$ et regroupement des termes nous trouvons :

$$dV_x = \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})}{(1 + \frac{v.V'_{x'}}{c^2})^2}.dV'_{x'}$$

Finalement :

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \frac{v.V'_{x'}}{c^2})^3}.a'_{x'}$$

En utilisant la même méthode de calcul nous obtenons pour les deux autres composantes de $\vec{a}'$:

$$a_y = \frac{(1-\beta^2)}{(1 + \frac{v.V'_{x'}}{c^2})^2}.\left[a'_{y'} - \frac{\frac{v}{c^2}.V'_{y'}}{1 + \frac{v.V'_{x'}}{c^2}}.a'_{x'}\right]$$

$$a_z = \frac{(1-\beta^2)}{(1 + \frac{v.V'_{x'}}{c^2})^2}.\left[a'_{z'} - \frac{\frac{v}{c^2}.V'_{z'}}{1 + \frac{v.V'_{x'}}{c^2}}.a'_{x'}\right]$$

Dans le cas de notre étude sur le voyageur de Langevin en mouvement accéléré nous pouvons simplifier les expressions car le « point matériel » est le voyageur lui même dont la vitesse $\vec{V}$ par rapport à **(R')** est nulle :

$$a_x = (1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}.a'_{x'}$$

$$a_y = 0$$

$$a_z = 0$$

Pierre MAGNIEN
27 septembre 2012