LES JUMEAUX DE LANGEVIN : VOYAGE ACCELERE

INTRODUCTION

On trouve le plus souvent le traitement du pseudo-paradoxe des « jumeaux de Langevin » dans sa version la plus simple : le voyageur se déplace en mouvement uniforme et doit alors être considéré dans deux référentiels d'inertie, l'un pour le voyage aller et l'autre pour le voyage retour. Lorsqu'on aborde la question d'un mouvement accéléré, la plupart des interlocuteurs pense qu'on est obligé de traiter le problème dans le cadre de la relativité générale. Or cette nécessité n'est en rien obligatoire. Cà n'est pas parce qu'Einstein a développé une nouvelle théorie, la relativité générale, fondée sur l'équivalence dynamique d'un laboratoire accéléré et d'un laboratoire dans un champ gravitationnel, qu'il faut penser que la relativité restreinte n'est pas compétente pour traiter des mouvements accélérées. Cette idée est fausse. Nous pouvons sans difficulté discuter d'un déplacement avec accélération dans le contexte des transformations de Lorentz.

Il est vrai que la formulation initiale de la relativité restreinte conduit à des affirmations claires sur le fonctionnement des horloges en mouvement uniforme mais ne contient pas de généralisations évidentes à propos des horloges accélérées. De plus, toutes les horloges accélérées ne se comportent pas de la même façon. L'horloge constituée par un cœur humain, par exemple, va certainement s'arrêter complètement si elle est exposée à une accélération de plusieurs dizaines de g[1] alors que celle constituée par une particule radio-active peut supporter une accélération[2] supérieure à 10^{20}g sans manifester aucun changement dans sa période de désintégration. Ainsi, pour n'importe quelle horloge qui n'est pas endommagée par l'accélération, les effets d'un voyage peuvent être calculés sans introduire la notion de champs gravitationnel équivalent. La relativité restreinte est tout à fait adaptée à de telles études et permet de prédire la différence d'âge entre les deux jumeaux après un voyage accéléré de l'explorateur.

POSITION DU PROBLEME

Nous allons considérer un jumeau-explorateur E partant pour une étoile située à une distance D, valeur mesurée dans le référentiel terrestre **(R)** du jumeau sédentaire S. Les différentes phases du voyage sont choisies de la façon suivante :

- Première moitié de l'aller : l'accélération de la fusée, mesurée par E dans son référentiel **(R')**, est constante et vaut a'_0
- Seconde moitié de l'aller : l'accélération de la fusée, mesurée par E, est constante et vaut $-a'_0$ (décélération)
- Première moitié du retour : l'accélération de la fusée, mesurée par E, est constante et vaut a'_0
- Seconde moitié du retour : l'accélération de la fusée, mesurée par E, est constante et vaut $-a'_0$ (décélération)

---

[1] Accélération de la pesanteur : $g \approx 10$ m/s^2

[2] On pourra lire à ce propos le paragraphe **H**. (« Effets sur la dilatation du temps de la décélération des mésons en vol. ») de l'article de Frisch et Smith paru dans l'AJP (volume 31 – page 342) intitulé « Mesure de la dilatation relativiste du temps utilisant les mésons-μ »

La symétrie de ces phases nous assure que E aura, en arrivant vers l'étoile, une vitesse égale à celle qu'il avait en partant de la Terre, c'est à dire nulle. Il peut alors effectuer son demi tour sans difficulté. Cette symétrie nous permettra également de ne travailler que le premier quart du voyage et de multiplier ensuite par quatre les différentes durées calculées pour obtenir celles du voyage complet aller / retour.

A partir des transformations de Lorentz on peut obtenir les coordonnées de la vitesse et de l'accélération de E dans le référentiel **(R)** de S par dérivation. On trouvera cette démonstration dans la plupart des ouvrages présentant la relativité restreinte. Dans le cas qui nous intéresse ici – E a une vitesse nulle dans son référentiel **(R')** et son mouvement s'effectue selon les axes communs Ox et Ox' – l'expression de l'accélération a dans **(R)** est donnée par l'expression :

$$a = \frac{dv}{dt} = (1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}.a'_0 \qquad (1)$$

A partir de là nous allons pouvoir rechercher la solution de notre problème en appliquant la notion de référentiel d'inertie instantané. En effet **(R')** n'est pas un référentiel d'inertie puisqu'il est accéléré. Nous devons donc considérer le référentiel propre de E instantané dans lequel le voyageur, à l'instant t mesuré dans **(R)**, a une vitesse nulle. Entre les instants t et t + dt nous pouvons y appliquer les relations de la relativité restreinte.

$$(1) \Rightarrow dv = (1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}.a'_0.dt = (1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}.a'_0.dt$$

$$(1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{3}{2}}.dv = a'_0.dt$$

Intégrons cette équation pour obtenir l'expression de v(t) en fonction du temps dans le référentiel **(R)** de S. Pour cela posons du = $(1 - v^2/c^2)^{-3/2}$dv. Nous avons alors, en intégrant du :

$$u = (1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}.v$$

$$d\left[(1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}.v\right] = a'_0.dt \quad \Rightarrow \quad (1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}.v = a'_0.t + K$$

Comme pour t = 0 on a v = 0, la constante d'intégration K est nulle et nous pouvons écrire l'expression de v(t), vitesse du voyageur dans le référentiel **(R)** du sédentaire, après élévation au carré, regroupement des termes en v^2 et extraction de v :

$$v(t)=\frac{a'_0.t}{\sqrt{(1+\frac{(a'_0.t)^2}{c^2})}} \qquad (2)$$

Pour obtenir la distance parcourue par E dans le repère **(R)** de S nous devons intégrer v(t) entre t = 0 et t :

$$x(t)=\int v(t).dt=\int \frac{a'_0.t}{\sqrt{(1+\frac{(a'_0.t)^2}{c^2})}}=\frac{c^2}{a'_0}.\sqrt{\left[1+(\frac{a'_0.t}{c})^2\right]}+K$$

Or pour t = 0 nous avons x = 0. La constante K vaut donc $-c^2/a'_0$ et x(t) est alors :

$$x(t)=\frac{c^2}{a'_0}.\left[\sqrt{1+(\frac{a'_0.t}{c})^2}-1\right]$$

Lorsque E arrive à mi chemin de l'étoile visée nous avons $x(t_1) = D/2$, donc :

$$\frac{D}{2}=\frac{c^2}{a'_0}.\left[\sqrt{1+(\frac{a'_0.t_1}{c})^2}-1\right]$$

On peut en déduire la valeur de t_1 qui est égale à :

$$t_1=\frac{D}{2.c}.\sqrt{1+\frac{4.c^2}{a'_0.D}}$$

Ceci constitue le quart de la durée totale du voyage aller / retour du voyageur mesurée dans le référentiel **(R)** du sédentaire. Donc la durée totale est :

$$\boxed{T=\frac{2.D}{c}.\sqrt{1+\frac{4.c^2}{a'_0.D}}}$$

Pour le voyageur, son intervalle infinitésimal de temps propre dt' est relié au temps impropre dt lorsqu'on se place dans son référentiel instantané d'inertie à l'instant t, par la relation :

$$dt=\frac{dt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t'=\int \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.dt$$

En remplaçant dans cette expression v(t) par ce que nous avons trouvé dans la relation (2) nous pouvons écrire, après réorganisation des termes :

$$t' = \int \frac{dt}{\sqrt{(1+(\frac{a'_0.t}{c})^2}} = \frac{a'_0}{c}.ln\left[\frac{a'_0}{c}.t + \sqrt{(1+\frac{(a'_0.t)^2}{c^2}}\right] + K$$

Les horloges de E et de S étant synchronisées à t = t' = 0 au départ nous avons K = 0.
Finalement :

$$t' = \frac{a'_0}{c}.ln\left[\frac{a'_0}{c}.t + \sqrt{(1+\frac{(a'_0.t)^2}{c^2}}\right]$$

Connaissant, pour la première phase du voyage, la valeur t = t_1 pour le sédentaire[3], nous pouvons déterminer la durée totale du voyage pour l'explorateur E. Elle est alors, en tenant compte qu'il faut multiplier par 4 l'expression précédente :

$$\boxed{T' = \frac{4.a'_0}{c}.ln\left[\frac{a'_0}{c}.t_1 + \sqrt{(1+\frac{(a'_0.t_1)^2}{c^2}}\right]}$$

On peut faire une application numérique en fixant les valeurs de D et de a'_0. Prenons, dans un système d'unités où les longueurs sont exprimées en Années de Lumière (A.L.), les vitesses en Années de Lumière par Année (A.L./A) et les accélérations en Années de Lumière par Année carrée (A.L./A^2).

- D = 8 A.L.
- $a'_0 = g \approx 10\ m/s^2 \approx 1$ A.L./A^2
- c = 1 A.L./A

Nous avons alors :

$$T = \frac{2\times 8}{1}\times\sqrt{1+\frac{4.1^2}{1\times 8}} = 16\times\sqrt{1,5} = 19,6ans$$

Pour calculer T' nous prendrons t_1 = T/4 = 4,9 ans

$$T' = \frac{4\times 1}{1}\times ln(\frac{1}{1}\times 4,9 + \sqrt{1+\frac{4,9^2}{1}}) = 4\times ln(4,9+\sqrt{25}) = 9,2ans$$

Comme prévu, le voyageur est donc plus jeune que son jumeau resté sur Terre.

Pierre MAGNIEN
19 septembre 2012

[3] Rappelons qu'on ne travaille que sur le quart du trajet et qu'on applique ensuite les symétries dans le temps du voyage.