LE PARADOXE DES DEUX TRAINS

Énoncé du paradoxe

Détaillons tout d'abord le problème dans les termes où il est souvent présenté. On dispose de deux voies de chemins de fer parallèles et infiniment longues. Entre les deux existe un quai sur lequel stationne un observateur (I) au repos par rapport à la voie. Sur les deux lignes roulent dans des sens contraires deux trains (A) et (B) dont la vitesse, en module, a la même valeur v par rapport aux voies, donc par rapport à (I).

Pour un l'observateur (I) le temps s'écoulant dans (A) et (B) est dilaté d'un facteur γ qui est le même pour les deux puisque (v^2/c^2) a la même valeur. Le temps s'écoule donc de la même façon, par rapport à (I), dans (A) et (B) mais plus lentement que pour lui même.

Les trains (A) et (B) étant en mouvement l'un par rapport à l'autre, pour un observateur du train (A) [ou (B)] le temps s'écoulant dans le train (B) [ou (A)] le fait en étant dilaté.

Le paradoxe serait donc le suivant : d'un côté on constate que le temps s'écoule « de la même façon » dans les deux trains (A) et (B) et de l'autre le temps s'écoule « plus lentement » dans l'un que dans l'autre. La solution du paradoxe serait alors de remettre en cause le second postulat d'Einstein.

Solution du paradoxe

Il faut tout d'abord en revenir au sens profond de la relativité restreinte (RR). Pour cela appuyons nous sur le livre de ***Jean-Marie Vigoureux « l'univers en perspective : relativité restreinte »*** chez ***Ellipse***. La présentation suivante emprunte l'essentiel de son propos à cet ouvrage[1].

Une propriété fondamentale de la RR est que la dilatation des durées et la contraction des longueurs **entre deux observateurs** sont des effets réciproques. Si nous avons deux observateurs en mouvement relatif, chacun de ceux-ci voit l'horloge de l'autre tourner plus lentement. En RR les phénomènes surprenants observés ne sont pas des propriétés de l'observateur lui même (ici de (I) sur le quai et celui dans le train (A) ou (B) ou des observateurs dans le train (A) et dans le train (B)) mais une **propriété de la relation existante entre ces deux l'observateurs munis chacun d'une horloge**. Cette réciprocité fondamentale doit se comprendre comme un effet de « perspective dynamique » généralisant la perspective statique. Pour celle-ci, lorsqu'on observe une personne éloignée, elle paraît plus petite mais, pour cette dernière, le premier observateur lui paraît aussi plus petit. Donc, lorsque deux personnes sont éloignées l'une de l'autre, chacune paraît plus petite à l'autre.

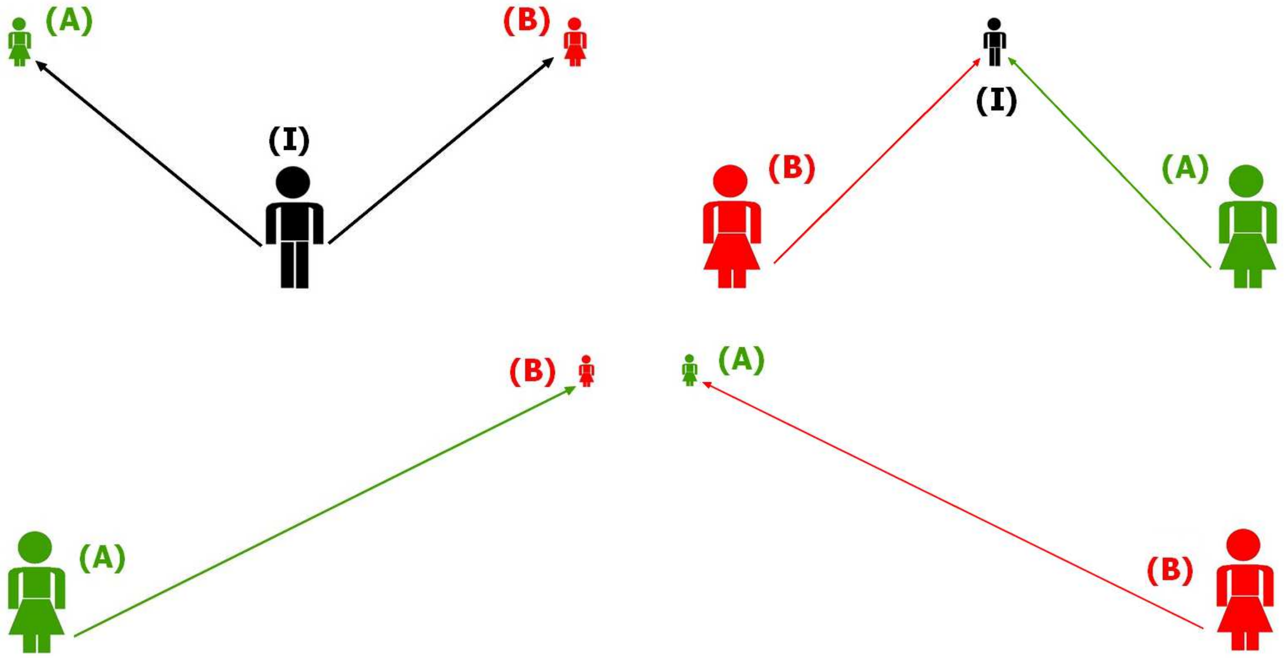
Pour la « perspective dynamique » nous avons un phénomène du même type : si j'observe une personne en mouvement par rapport à moi j'observe que son horloge tourne plus lentement que la mienne mais, pour lui, d'une manière

1 On s'inspire ici d'extraits que l'on retrouvera essentiellement entre les pages 91 et 98 de l'ouvrage de M. Vigoureux.

tout à fait réciproque, c'est ma propre horloge qui tourne moins vite. Dans cette « perspective dynamique », lorsque deux observateurs sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, le premier se déplace tout autant par rapport au second que le second se déplace par rapport au premier.

En perspective statique un dessinateur doit représenter les objets et les personnages d'autant plus petits qu'ils sont plus éloignés de lui pour avoir une description cohérente de la réalité. Cependant ceci ne veut pas dire que le personnage du premier plan est **réellement** plus grand que celui de l'arrière plan. Le résultat relativiste est tout à fait similaire : pour décrire les phénomènes de la nature d'une manière cohérente il est nécessaire de leur attribuer des durées propres – c'est dire mesurées sur des horloges au repos par rapport aux lieux où se déroulent les phénomènes - d'autant plus courtes[2] qu'ils sont attachés à des référentiels se déplaçant plus rapidement par rapport à celui de l'observateur.

Dans le cas qui nous intéresse ici il faudrait donc, en perspective statique, faire l'analogie suivante. Considérons trois observateurs (I), (A) et (B). Les deux derniers sont éloignés de (I) et placés symétriquement par rapport à ce dernier. Pour (I), (A) et (B) sont de même taille mais nettement plus petits que lui même. Mais pour (A), s'il regarde (B), il va lui trouver une taille beaucoup plus faible que la sienne. Il en ira de même pour (B) qui regarde (A). On constate ici clairement que si les relations qui existent entre [(I) et (A)] d'un côté et [(I) et (B)] de l'autre sont les mêmes – pour (I), (A) et (B) ont la même (petite) taille – mais ceci ne permet absolument pas de dire que dans la relation entre (A) et (B) les deux ont la même taille. On peut illustrer cela avec les schémas suivants :



Il n'y a là aucun paradoxe en perspective statique et on doit en convenir

2 Remarquons cependant que, en perspective statique, plus un objet est loin plus il paraît petit alors qu'en perspective dynamique plus un objet va vite plus la durée d'un phénomène paraît grande.

également en « perspective dynamique ».

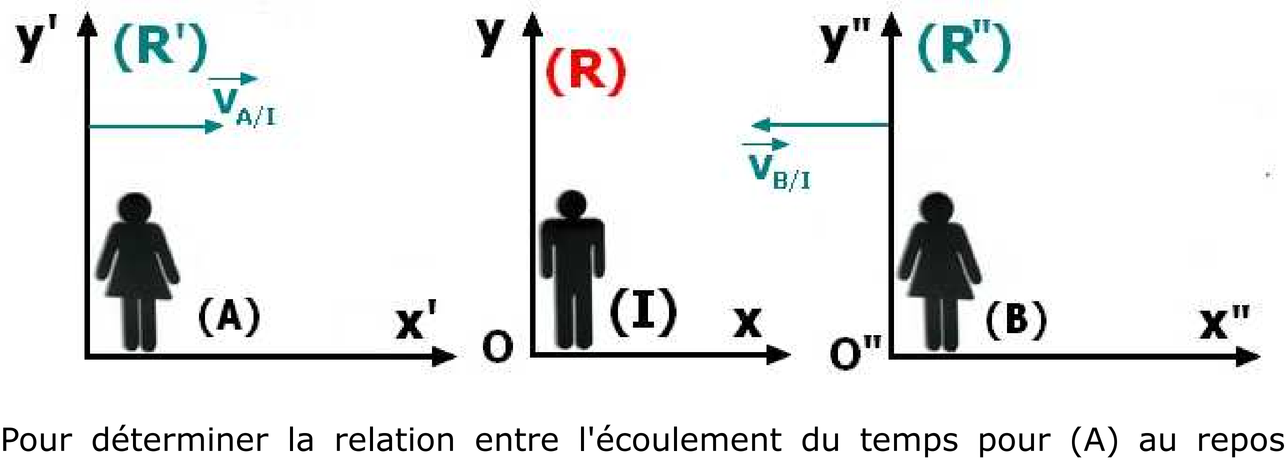
Montrons maintenant par le calcul que le paradoxe n'est bien qu'apparent. Pour cela il est tout d'abord indispensable de définir clairement les référentiels et les observateurs qui leur sont attachés.

- Soit **(R)** le référentiel lié aux voies et au quai, **(R')** celui qui est lié au train (A) et **(R")** celui lié au train (B).
- Soit v la vitesse de (A) dans le référentiel **(R)**, -v celle de (B) dans le même référentiel et V la vitesse de (B) dans **(R')** (donc la vitesse de (A) dans **(R")** est –V.

Soit deux événements E_1 et E_2 se produisant aux instants t'_1 et t'_2 en un même lieu de (A) où se trouve notre observateur qui est donc au repos dans **(R')**. L'intervalle de temps $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ mesuré sur l'horloge H_A est donc un temps propre. Pour (I), au repos dans **(R)**, E_1 et E_2 se déroulent en des lieux différents au temps t_1 et t_2. L'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ est alors une durée impropre. Entre $\Delta t'$ et Δt nous avons donc la relation de dilatation du temps telle que :

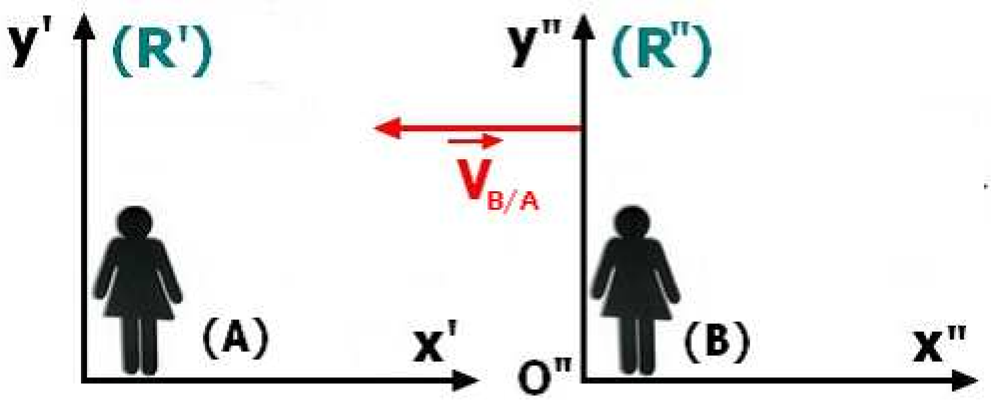
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 + v^2/c^2}}$$

On peut faire le même raisonnement entre (I) et (B). On obtient alors la même relation entre Δt et $\Delta t'$ puisque la vitesse de (B) dans **(R)** est la même, au signe près, que celle de (A) dans **(R)**. Le schéma ci dessous représente un des choix possibles – ici on se place du point de vue de (I) - avec le mouvement de (B) et de (A) vue de (I).



Pour déterminer la relation entre l'écoulement du temps pour (A) au repos dans **(R')** et celui du temps pour (B) au repos dans **(R")** il faut déjà connaître la vitesse $V_{B/A}$ de (B) dans **(R')** [ou la vitesse $V_{A/B}$ de (A) dans **(R")**]. Pour obtenir cette vitesse on utilise la loi relativiste de composition des vitesses en sachant que $v_{B/I} = -v_{A/I} = v$.

Le schéma ci dessous représente un des deux choix possibles avec le mouvement de (B) vu de (A).



Donc :
$$V_{B/A} = \frac{v_{B/I} - v_{I/A}}{1 - \frac{v_{B/I} . v_{I/A}}{c^2}} = \frac{2v}{1 + v^2/c^2} < 2v$$

On peut illustrer tout ceci avec une application numérique en prenant par exemple v = 3c/5.

En reprenant les explications précédentes et les expressions attenantes nous avons, en notant V la vitesse $V_{B/A}$ de (B) dans **(R')** :

Pour les relations {(R),(R')}[3] ou {(R),(R")}, le facteur γ_1 est donné par :

$$\Delta t_{(R)} = \gamma_1 . \Delta t_{(R')} = \gamma_1 . \Delta t_{(R'')} \quad avec \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (3/5)^2}} = 5/4 = 10/8$$

Pour la relation {(R'),(R")} le facteur γ_2 est donné par :

$$V = \frac{2v}{1 + v^2/c^2} = \frac{2.(3/5).c}{1 + (3/5)^2} = \frac{15}{17}.c$$

$$\Delta t_{(R')} = \gamma_2 . \Delta t_{(R'')} \quad avec \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (15/17)^2}} = 17/8$$

Les facteurs γ des différentes situations étudiées sont donc bien différents et confirment la nécessité, en relativité restreinte, de s'appuyer sur cette idée de « perspective dynamique » qui oblige à considérer, dans un calcul d'effet relativiste, que les résultats obtenus concernent **la relation** existant entre **deux observateurs** appartenant à deux référentiels en mouvement relatif. Ces résultats n'ont donc pas de sens si on les considère qu'en eux mêmes en oubliant qu'ils ne s'appliquent qu'à un ensemble indissociable de deux référentiels en relation de mouvement relatif.

Les conclusions déduites d'une de ces relations ne peuvent pas être étendues à un autre couple d'observateurs. Ici on a pu montrer que la relation entre (A) et (I) était la même que celle entre (B) et (I) uniquement parce que la vitesse de

[3] Cette notation indique la relation entre une horloge au repos dans (R) et une autre horloge au repos dans (R').

(A) et la vitesse de (B) par rapport à (I) avaient le même module. Mais la vitesse de (A) par rapport à (B) étant différente de la précédente, aucune extension des conclusions précédentes n'est possible. Le seul lien possible entre les deux situations est celui fourni par la loi relativiste de composition des vitesses utilisée ici.

Autre point important

Une autre caractéristique de la RR en lien avec la manière dont on considère le temps est souvent oubliée et il est nécessaire de la rappeler ici. En RR on ne tient pas compte du temps de propagation des informations dû à la vitesse finie des ondes électromagnétiques.

Considérons un observateur (A) au repos à l'origine (O) de son référentiel propre **(R)**. On réalise la mesure de l'intervalle de temps entre deux événements E_1 et E_2 se produisant à proximité d'un observateur (B) au repos dans **(R')** et en mouvement dans **(R)**. Dans ce référentiel, (B) est situé à une distance x_1, puis x_2, de (O). Dans ce même référentiel les mesures des instants où se produisent ces deux événements ne sont pas faites sur la seule horloge H_0 à côté de (A) mais sur H_{E1} et H_{E2} qui sont au repos dans **(R)** ET croisent exactement chacun des événements se produisant à côté de (B). Il faut en effet considérer que dans chaque référentiel il existe un réseau d'horloges réparties avec un pas aussi petit que nécessaire et que chaque événement y est daté par l'horloge coïncidente. Si c'est l'observateur situé à l'origine qui conduit les mesures on estime qu'il peut récupérer par la suite l'ensemble des informations temporelles récoltées et reconstituer a posteriori le déroulement des événements. On peut illustrer ça par les schémas suivants :

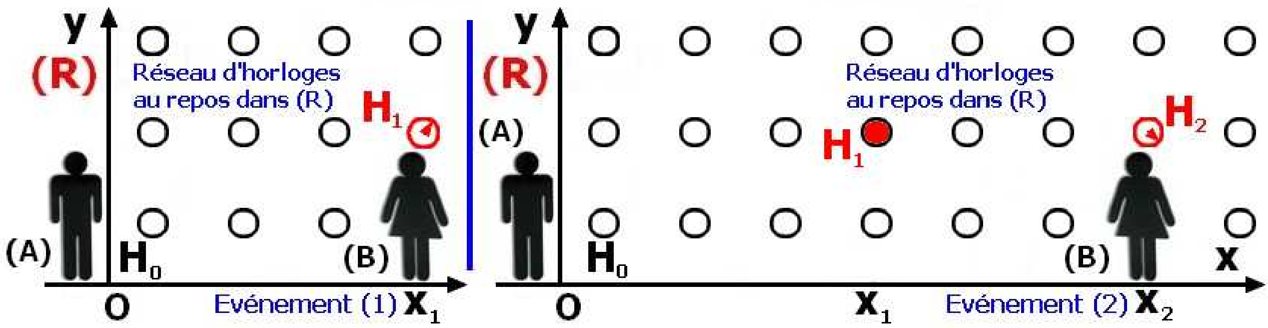


Schéma (a) : Manière correcte de considérer les mesures dans **(R)**

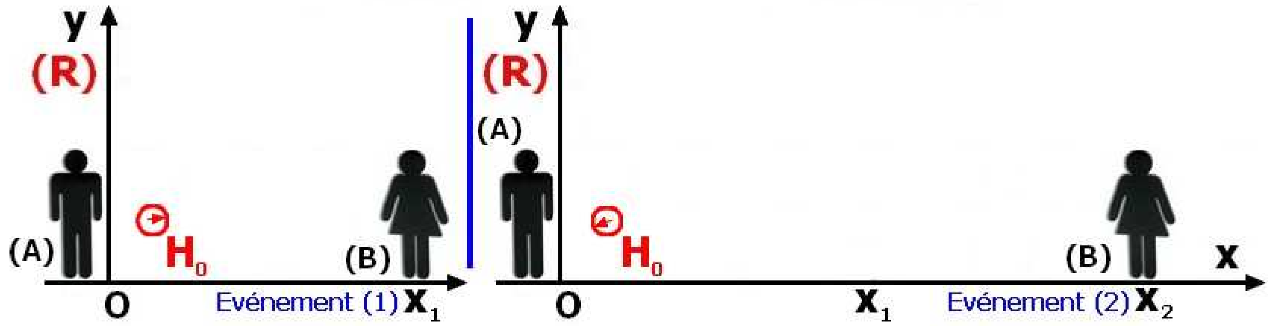


Schéma (b) : Manière incorrecte de considérer les mesures dans **(R)**

Pour ce dernier appelons t_{01} et t_{02} les instants enregistrés par H_0 sachant qu'ils

doivent compte du temps de propagation de la lumière depuis les lieux où se produisent les événements. De même nous appellerons t_1 et t_2 les instants fournis par les horloges H_1 et H_2 du schéma (a).
Nous pouvons exprimer t_{01} et t_{02} en fonction de t_1 et t_2. Pour cela nous écrivons :

$$t_{01} = t_1 + \frac{x_1}{c} = t_1 + \frac{v.t_1}{c}$$

$$t_{02} = t_2 + \frac{x_2}{c} = t_2 + \frac{v.t_2}{c}$$

$$(t_{02} - t_{01}) = (t_2 - t_1).(1 + v/c) = (t_2 - t_1).(1 + \beta)$$

$$\Delta t_0 = \Delta t.(1 + \beta)$$

On constate bien que la mesure de l'intervalle de temps par une seule horloge ne donne pas une valeur compatible avec ce que l'on attend. En réalité nous avons ici une relation qui est en rapport direct avec l'effet Doppler.

En effet nous connaissons la relation entre la mesure de l'intervalle de temps propre $\Delta t' = (t'_2 - t'_1)$ donné par l'horloge attaché à (B) et donc au repos dans **(R')** et l'intervalle de temps impropre $\Delta t = (t_2 - t_1)$ correspondant donné par les deux horloges H_1 et H_2. On a :

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\frac{\Delta t_0}{(1 + \beta)} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\Delta t_0 = \frac{(1 + \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}.\Delta t'$$

$$\Delta t_0 = \frac{\sqrt{(1 + \beta)}.\sqrt{(1 + \beta)}}{\sqrt{(1 + \beta)}.\sqrt{(1 - \beta)}}.\Delta t'$$

$$\Delta t_0 = \frac{\sqrt{(1 + \beta)}}{\sqrt{(1 - \beta)}}.\Delta t'$$

La dernière expression est bien celle de l'effet Doppler en RR exprimant la relation entre la période propre $\Delta t'$ d'un signal envoyé par un observateur (B) et Δt_0 la période de ce même signal reçu par un observateur (A) en mouvement par rapport au précédent.

Pierre MAGNIEN
12/04/2013