

EQUIVALENCE MASSE – ENERGIE ET LOIS DE CONSERVATION EN RELATIVITE RESTREINTE

1. - INTRODUCTION

Pour le grand public la relation $E = mc^2$ est la plus célèbre équation de toute la physique. Cependant bien peu de personnes en connaissent la signification et encore moins la démonstration. Cette conséquence de la nouvelle vision de l'espace – temps proposée par Albert Einstein en juin 1905 est un additif que ce dernier avait envoyé aux « *Annalen der Physik* » et qui est paru dans cette revue en septembre de la même année : elle amène à considérer que l'énergie possède de l'inertie.

2. – PREMIER EXEMPLE PROPOSE PAR A. EINSTEIN

Pour introduire notre sujet développons une expérience de pensée qui a été proposée par Einstein lui-même en 1906. Son objectif est de suggérer que l'énergie doit être associée à une certaine quantité de masse inertielle¹ équivalente. Supposons qu'un flash d'énergie électromagnétique E soit émis à partir d'une extrémité d'une boîte de masse M et de longueur L qui est isolée de son environnement et initialement au repos. D'après la théorie de Maxwell le rayonnement transporte une quantité de mouvement $p = E/c$. Sachant que, dans le référentiel de la boîte, la quantité de mouvement totale du système était nulle avant l'émission et qu'elle doit le rester, la boîte doit acquérir une quantité de mouvement égale à $-p$. De ce fait la boîte recule avec une vitesse v , telle que :

$$Mv = -E/c \quad \Rightarrow \quad v = -E/Mc$$

Après s'être déplacé pendant un temps² $\Delta t = L/c$, le rayonnement frappe l'autre extrémité de la boîte et lui transmet une impulsion égale et opposée à celle qu'il lui a donné au départ, ce qui amène de nouveau la boîte au repos. Ainsi, le résultat final de ce processus est de déplacer la boîte d'une distance Δx :

$$\Delta x = v\Delta t = -EL/Mc^2$$

Mais le système étudié étant isolé, le centre de masse de la boîte et de son contenu ne peut pas s'être déplacé. Nous supposons alors que le rayonnement a transporté avec lui l'équivalent d'une masse inertielle m , de telle sorte que³ :

$$mL + M\Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta x = -Lm/M$$

Rassemblant les deux dernières équations, nous obtenons :

¹ L'inertie d'un corps manifeste la résistance de ce dernier à tout changement dans les caractéristiques de son mouvement. La grandeur qui quantifie cette opposition est la masse inertielle du corps. Ceci est développé dans le paragraphe 4.

² On suppose ici que le déplacement de la boîte, pendant Δt , est négligeable. On peut montrer qu'en tenant compte de ce déplacement ET de la diminution de l'inertie de la boîte pendant Δt on retrouve notre résultat.

³ Ici le centre de masse est le barycentre d'un objet de masse m se déplaçant de L et d'un autre de masse M se déplaçant de Δx .

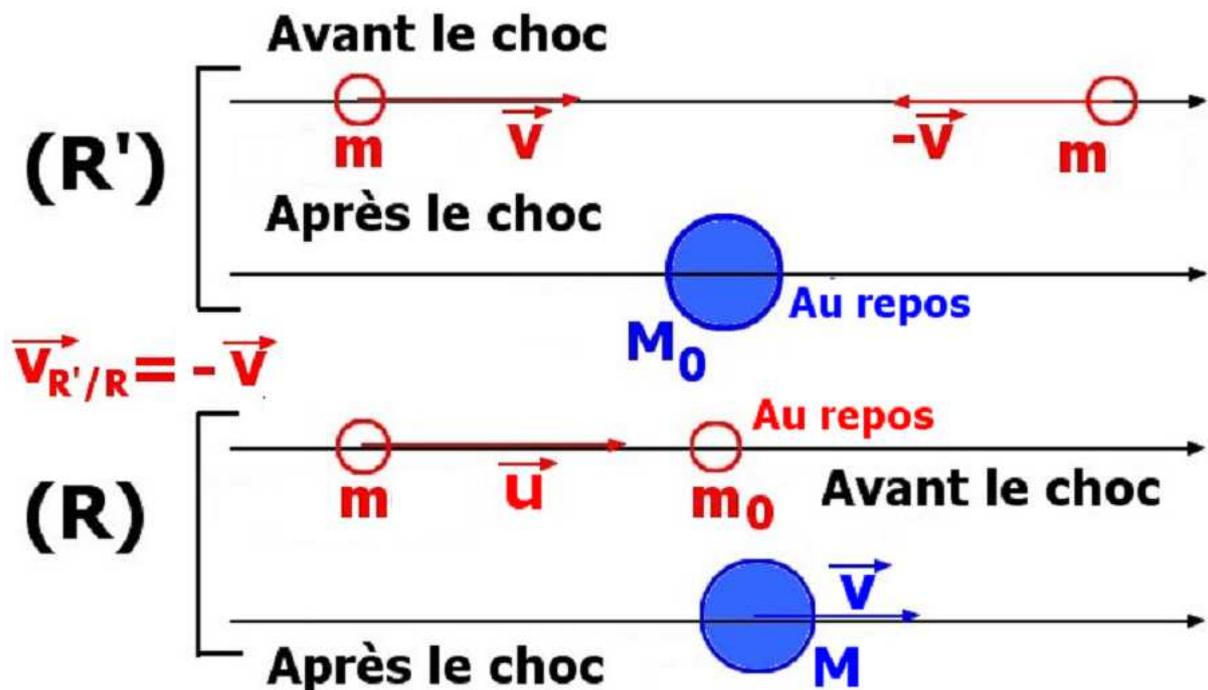
$$-EL/Mc^2 = -Lm/M \Rightarrow E = mc^2$$

Lorsque le rayonnement est émis depuis une extrémité de la boîte d'Einstein, celle-ci subit alors une diminution de sa masse d'inertie d'une quantité E/c^2 . De même, l'absorption du rayonnement à l'autre extrémité entraîne une augmentation de l'inertie de la boîte. Une fois que l'énergie a été absorbée, elle perd son identité en tant qu'énergie électromagnétique et devient finalement un complément de l'énergie thermique de la boîte.

Bien que le calcul que nous avons développé - et qui est un peu différent de la version originale d'Einstein - détermine uniquement l'inertie associée à l'énergie électromagnétique, on montre sans difficulté que les conséquences sont beaucoup plus larges que cela et nous sommes rapidement conduit à l'idée que l'énergie sous toutes ses formes possède une masse inertielle équivalente définie par cette équation qui constitue alors un principe général : l'énergie, quelle que soit sa forme, possède de l'inertie !

3. - EXPRESSION DE LA MASSE INERTIELLE RELATIVISTE

On va tout d'abord montrer⁴ sur un exemple de mécanique des chocs la dépendance de l'inertie (masse inertielle) d'un objet avec sa vitesse selon le référentiel d'étude à partir de l'expérience suivante :



Considérons du point de vue de deux référentiels différents (R) et (R') un choc inélastique, ou parfaitement mou, de deux particules identiques se déplaçant dans des sens opposés sur une même ligne et qui forment, après la collision, une particule unique.

⁴ Cet exemple s'inspire de celui que l'on trouve dans l'ouvrage « Special relativity » de JG Taylor - Oxford University Press - 1975 page 48 et suivantes. D'autres ouvrages ont des approches avoisinantes.

Le premier schéma représente le choc dans le référentiel (**R'**) du centre de masse des deux particules. Le second représente le même événement vu depuis le référentiel (**R**) attaché à la particule de droite avant le choc. (**R'**) se déplace donc dans (**R**) vers la gauche à la vitesse $-\vec{v}$.

Dans (**R'**) les deux objets ont alors des vitesses de même module v et de même masse m . L'expérience de pensée d'Einstein que nous avons présentée dans le premier paragraphe nous avait montré que pour garder la loi de conservation de la quantité de mouvement il était nécessaire de donner une nouvelle propriété à l'énergie : une inertie. Ici les deux corps en mouvement possède de l'énergie cinétique et, en accord avec ce qui précède, nous affectons à cette dernière une inertie. De ce fait nous pouvons associer à chacun des objets une masse inertielle « généralisée » qui va dépendre de leur vitesse. Pour simplifier la formulation des équations, nous noterons cette quantité du type m par la simple lettre **m**. Nous définirons alors une expression relativiste de la quantité de mouvement en s'appuyant sur celle de la mécanique newtonienne mais nous garderons à l'esprit que l'inertie intervenant dans cette expression est une fonction de la vitesse de l'objet :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Après le choc inélastique vu de (**R'**) le corps unique formé sera au repos dans (**R'**) et aura donc une masse \mathbf{M}_0^5 ($V = 0$).

Dans le référentiel (**R**) nous avons pour cette même loi de conservation :

$$m \cdot \vec{u} + m_0 \cdot \vec{0} = M \cdot \vec{v} \Rightarrow m \cdot u = M \cdot v \quad (1)$$

Nous pouvons également écrire une loi de conservation « généralisée » de la masse inertielle qui tient compte de la dépendance de cette dernière avec la vitesse :

$$M + m_0 = M \quad (2)$$

Formons le rapport terme à terme des relations (1) et (2) :

$$\frac{m \cdot u}{m + m_0} = \frac{M \cdot v}{M} \Rightarrow v = \frac{m \cdot u}{m + m_0} \Rightarrow m \cdot v + m_0 \cdot v = m \cdot u$$

$$m \cdot (u - v) = m_0 \cdot v \Rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{v}{u - v}$$

Utilisons ici la loi relativiste d'addition des vitesses pour exprimer la vitesse u de l'objet de gauche dans le référentiel (**R**) en fonction de sa vitesse v dans le référentiel (**R**) sachant que $\vec{v}_{R/R'} = \vec{v}$ de module \mathbf{v} .

⁵ L'indice 0 sera ajouté à la grandeur désignant la masse de l'objet chaque fois que nous nous placerons dans le référentiel de repos de ce dernier.

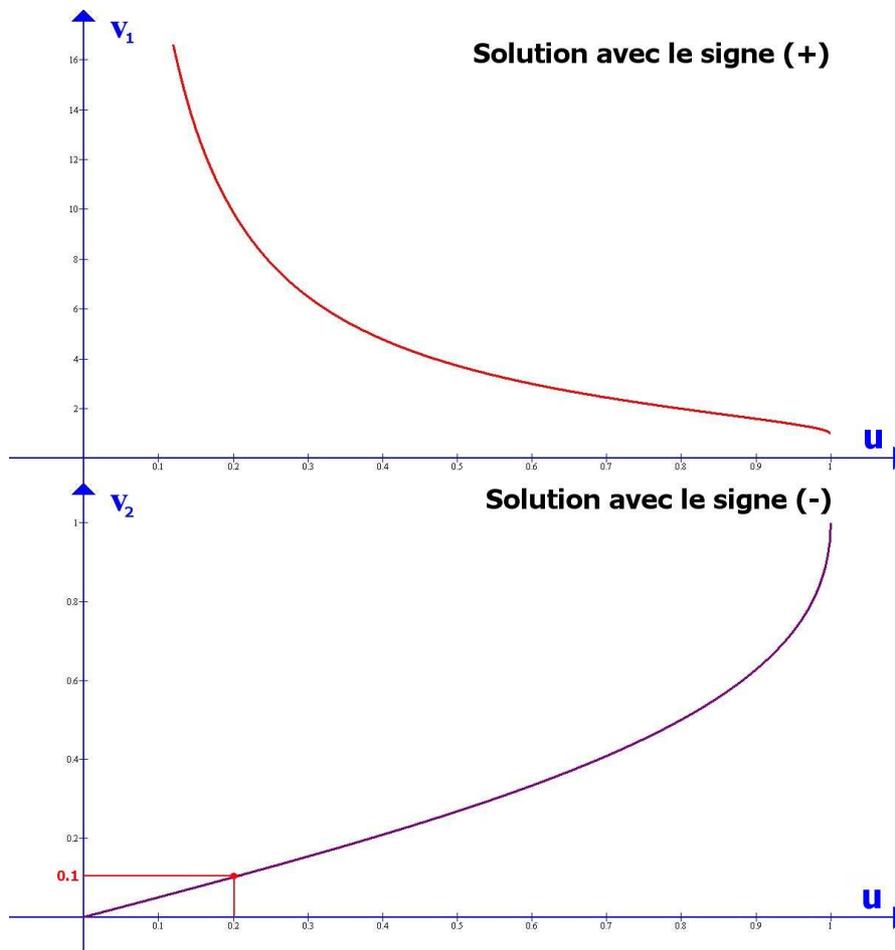
$$u = \frac{2v}{1+v^2/c^2} \Rightarrow \frac{2v}{u} = 1 + v^2/c^2 \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} - \frac{2v}{u} + 1 = 0$$

$$v^2 - \frac{2c^2}{u} \cdot v + c^2 = 0$$

On a ici une équation du 2° degré en v. Après calcul du discriminant réduit on obtient deux solutions en v :

$$v_{12} = \frac{c^2}{u} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{u}\right)^2 - c^2} = \frac{c^2}{u} \pm \frac{c^2}{u} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{c^2}{u} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right)$$

Quelle solution conserver ? Pour répondre à la question traçons les deux fonctions correspondantes $v_1 = f(u)$ pour le signe (+) et $v_2 = g(u)$ pour le signe (-).



Nous voyons immédiatement que le signe (+) ne convient pas car, pour de faible valeur de u, la vitesse v tend vers l'infini. De plus pour les faibles valeurs de u sur le second graphique, on retrouve sensiblement la loi classique $v_2 = u/2$.

Formons maintenant la quantité $(u - v)$ en remplaçant v par l'expression précédente de v_1 :

$$u - v = u - \frac{c^2}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right) = \frac{c^2 u^2}{c^2 u} - \frac{c^2}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)$$

$$u - v = \frac{c^2}{u} \left(\frac{u^2}{c^2} - 1 + \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right) = \frac{c^2}{u} \left(\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \right)$$

Après développement et regroupement des différents termes :

$$u - v = \frac{c^2}{u} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)$$

$$u - v = \underbrace{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdot \frac{c^2}{u}}_v \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)$$

On obtient finalement :

$$u - v = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdot v$$

Nous pouvons maintenant évaluer la quantité \mathbf{m}/\mathbf{m}_0 :

$$\frac{m}{m_0} = \frac{v}{u - v} = \frac{v}{v \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}$$

La démonstration précédente était faite sur une situation particulière (choc inélastique entre deux particules). On peut se demander si dans d'autres circonstances (choc élastique, plus de deux objets, directions quelconques des mouvements ...etc.) cette relation reste valable. On démontre en effet que l'expression trouvée pour \mathbf{m} est bien la définition correcte de la masse inertielle relativiste de n'importe quel objet. On doit donc l'utiliser dans les équations de la dynamique et dans l'écriture des différentes lois de conservation.

4. – REMARQUES A PROPOS DU CONCEPT DE MASSE EN RR

Il est important ici d'insister sur les renouvellements apportés par la RR en ce qui concerne le concept de masse. Pour cela il est nécessaire de développer quelques remarques à propos des quantités exprimant « des masses » dans les expressions précédentes.

En mécanique newtonienne elle est introduite pour désigner la « quantité de matière » contenue dans un objet. Sa première manifestation est pour nous, terriens, dans l'existence de son poids. Si Galilée en est resté à cette caractérisation de la pesanteur (terrestre) en considérant que le

poids est une donnée intrinsèque d'un objet, Newton a généralisé sa signification avec la loi de l'attraction universelle qui sépare le système étudié en deux entités : « l'émetteur » qui est à l'origine d'une force de gravitation et « le récepteur » qui en ressent les effets⁶. On attache aux deux objets une masse dite gravitationnelle m_g .

Mais Newton a également introduit la notion de masse à partir d'un point de vue totalement différent : il s'agit de celui relatif au comportement dynamique d'un objet soumis à une force. Galilée puis Descartes l'avaient déjà remarqué : plus la « quantité de matière » contenue dans un objet est importante, plus il est difficile de modifier son état de mouvement. Cette propriété du corps qui s'oppose à un tel changement est appelée « l'inertie » du corps ou sa « masse inertielle » m_i .

A priori on a affaire ici à deux approches bien distinctes : d'une part la définition d'une quantité m_g liée à un phénomène physique bien particulier, la gravitation, et, d'autre part, celle d'une autre quantité m_i attachée au comportement très général de tout corps dont on veut modifier l'état de mouvement sous l'action d'une force de n'importe quelle origine.

On s'est très tôt demandé quelle était la relation existant entre m_g et m_i . Il est « facile » en principe⁷ de trouver ce lien en étudiant le mouvement d'un corps dans un champ gravitationnel ; on constate alors que le rapport m_g/m_i est constant quels que soit le corps et le champ gravitationnel. On appelle quelquefois cette propriété « principe d'équivalence faible ».

Inexplicable en mécanique classique, cette question et la recherche de sa réponse se posa très tôt à A. Einstein qui, dès 1907, posa l'équivalence entre masse inertielle et masse gravitationnelle.

Ainsi à ce propos il écrit⁸ : « **Dans ce qui précède, on a supposé sans le dire que ce genre de variation de masse peut être mesuré avec l'instrument habituellement utilisé pour la mesure des masses, la balance ; donc que la relation $M = \mu + E_0/c^2$ [selon nos notations on écrirait $m = m_0 + E/c^2$, avec E énergie totale du corps intégrant son énergie cinétique, son énergie potentielle et éventuellement l'énergie attachée à des forces non conservatives. On aborde cette question un peu plus bas] s'applique non seulement à la masse inertielle, mais aussi à la masse gravitationnelle ; en d'autres termes, que l'inertie et la pesanteur d'un système sont en toutes circonstances exactement proportionnelles.** »

⁶ En vertu du principe d'action et de réaction la relation est symétrique et « l'émetteur » est également un « récepteur » immergé dans le champ gravitationnel de l'autre objet qui devient alors un « émetteur ». On peut également dire que chaque corps de masse M crée un champ gravitationnel dans lequel un corps d'épreuve de masse m subit une force et réciproquement.

⁷ Cette facilité n'est que de principe car les expériences de vérification sont extrêmement délicates à monter et à conduire.

⁸ « Du principe de relativité et des conséquences tirées de celui-ci » dans *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* 1907 vol IV (traduit en français dans les Oeuvres Choieses Vol. 2)

Ça n'est qu'avec la relativité générale⁹ (RG), qui est une théorie de la gravitation, que le savant donnera une réponse à cette interrogation datant de plus de deux siècles.

Mais même en RR il est nécessaire de rénover cette notion d'inertie car la première loi de Newton ne peut plus être vraie : l'existence d'une vitesse limite c entraîne qu'un corps soumis à une force constante ne peut plus subir une accélération constante qui lui donnerait au bout d'un certain temps une vitesse supérieure à c . Pour éviter ce comportement il est donc indispensable que l'inertie du corps d'épreuve augmente avec sa vitesse au fur et à mesure que cette dernière approche c d'une manière asymptotique.

Cependant il faut garder à l'esprit que la masse désignant la « quantité de matière » constituant un corps n'est pas obsolète en RR. C'est une constante relative à ce corps : elle est appelée tout simplement la masse du corps ou, pour être plus clair, sa masse au repos pour insister sur l'idée qu'on peut la mesurer uniquement lorsque l'objet est au repos dans le référentiel du laboratoire.

La quantité m a bien la dimension d'une masse et s'exprime donc en kilogramme mais elle n'a pas le même statut physique que m_0 . Il est abusif de tenir compte de la partie variable avec la vitesse de l'inertie dans la définition de la masse comme on le faisait autrefois : il est donc nécessaire de définir, d'une part, son inertie ou masse inertielle m qui est variable et, d'autre part, sa masse, ou masse au repos¹⁰ m_0 qui est constante et caractéristique du corps considéré.

Ainsi en appliquant une force sur un corps, on augmente simultanément son inertie – donc sa masse inertielle – et son énergie en lui transférant de l'énergie cinétique. Ceci est l'objet du paragraphe suivant.

5. – ENERGIE RELATIVISTE TOTALE D'UN CORPS EN MOUVEMENT

Reprenons l'expression relativiste de l'inertie m d'un objet déterminé ayant une vitesse v dans un référentiel (**R**) quelconque :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \cdot \gamma$$

Pour de faible vitesse v devant c nous pouvons écrire :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \right)$$

⁹ A. Einstein se lança sur la piste d'une théorie de la gravitation conforme avec les exigences de la RR en 1907 et proposa une forme achevée de sa RG à la fin de l'année 1915.

¹⁰ Aujourd'hui il est fréquent de trouver dans la littérature en rapport avec la RR la simple appellation de « masse » d'un corps, qui est un invariant relativiste, sans l'ajout de « au repos » qui est considéré comme superflu. On ne suivra pas ici ce choix pour faire clairement la différence entre l'inertie du corps en mouvement sa masse dans son référentiel de repos.

Multiplions les deux membres par c^2 et regroupons les termes différemment :

$$[m - m_0].c^2 \approx \frac{1}{2}.m_0.v^2$$

Nous retrouvons ici l'expression classique de l'énergie cinétique. En RR cette différence $(m - m_0).c^2$ représente toujours l'énergie cinétique E_c de la particule mais elle ne peut plus s'écrire $\frac{1}{2}.mv^2$. On a alors :

$$[m - m_0].c^2 = E_c$$

La quantité $m.c^2$ est appelée par définition **l'énergie totale E** de la particule. On peut alors écrire :

$$E = m.c^2 = m_0.\gamma.c^2 = m_0.c^2 + E_c$$

$m_0.c^2$ est appelée énergie de repos de la particule. En mécanique newtonienne ce terme n'existe pas car la loi de conservation de la masse (Lavoisier) ne permet pas de le mettre en évidence et le zéro de l'énergie cinétique est simplement atteint pour une vitesse nulle. A la fin du XIX^o siècle la découverte de la radioactivité a permis d'identifier des transformations de masse en énergie dans les phénomènes de désintégrations nucléaires explicables grâce à la RR.

L'expression précédente peut également s'écrire :

$$E_c = m_0.(\gamma - 1).c^2$$

On a donc, en RR, les relations suivantes :

$$m = \gamma m_0$$

$$\vec{p} = m.\vec{v} = \gamma m_0.\vec{v}$$

$$E = m.c^2 = \gamma.m_0.c^2 = m_0.c^2 + E_c$$

$$E_c = (\gamma - 1).m_0.c^2$$

$$\text{avec } \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{et} \quad \beta = v/c$$

On peut écrire une relation très importante en RR en combinant ces différentes expressions. Formons la quantité $E^2 - p^2c^2$:

$$E^2 - p^2c^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 - \gamma^2 m_0^2 \beta^2 c^4 = \gamma^2 m_0^2 c^4 .(1 - \beta^2)$$

On sait que $(1 - \beta^2) = 1/\gamma^2$. Donc :

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2 c^4 = E_0^2$$

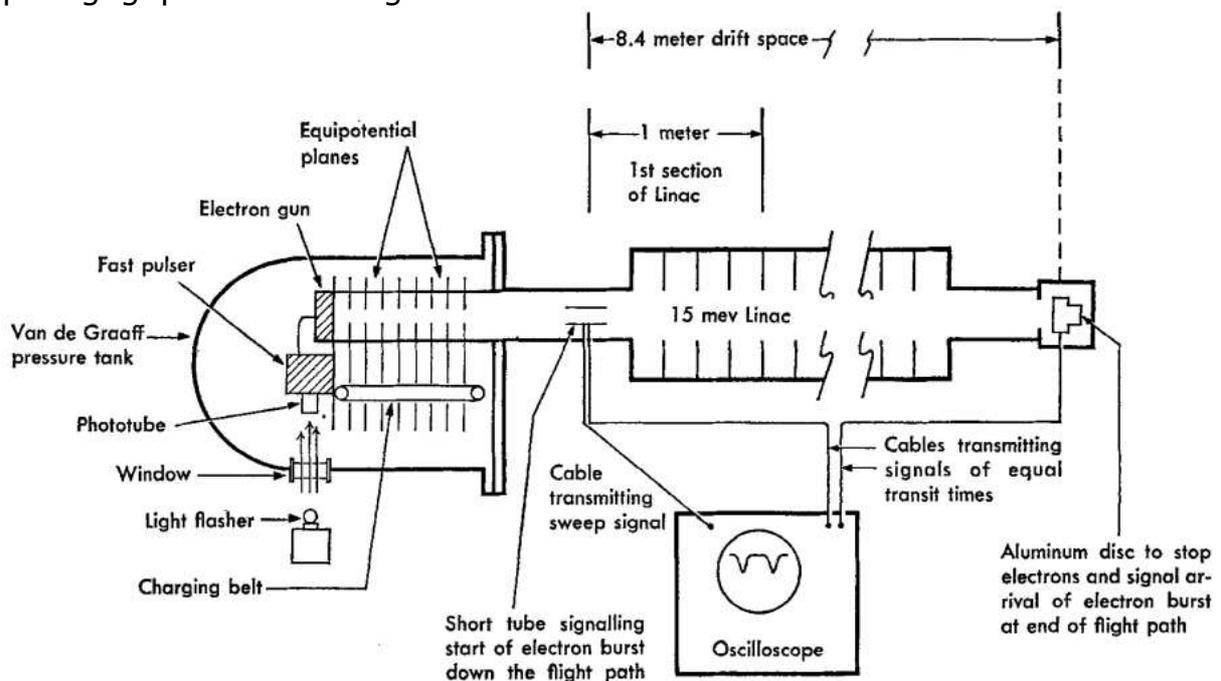
La quantité $(E^2 - p^2c^2)$ est donc un invariant relativiste égal à l'énergie de repos au carré.

6. -EXEMPLE DE MISE EN OEUVRE DE L'EXPRESSION DE E_C EN RR

Considérons une particule de charge q placée dans un champ électrique accélérateur \vec{E} associé à une différence de potentiel $U = U_2 - U_1$. Dans le référentiel du laboratoire (\mathbf{R}) sa vitesse à un instant t_1 est v_1 et à un instant t_2 , v_2 (v_1 et $v_2 < c$ bien entendu). La variation relativiste de son énergie cinétique est alors :

$$\Delta E_C = E_{C2} - E_{C1} = m_0 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot c^2 = q \cdot U = q \cdot (U_2 - U_1)$$

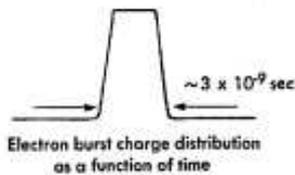
La vérification expérimentale¹¹ de cette formule, avec γ_1 et U_1 nuls, a été réalisée en 1964 par William Bertozzi dans un but essentiellement pédagogique. Le montage était le suivant¹² :



On peut lire dans l'article de W. Bertozzi : « **Un faisceau pulsé d'électrons est injecté à partir d'un générateur électrostatique Van de Graaff dans un accélérateur linéaire d'électrons (LINAC). Un générateur d'impulsions utilisant un thyatron rapide placé à l'extrémité haute tension du générateur Van de Graaff excite périodiquement 120 fois par seconde le canon à électrons pour émettre des électrons regroupés dans une impulsion de 3 ns. Ce générateur d'impulsions est déclenché à partir d'une cellule photoélectrique qui est excitée par un flash lumineux produit à l'extérieur de l'enceinte du Van de Graaff. Les électrons sortent de ce dernier en paquets dont la forme dans le temps est sensiblement trapézoïdale.**

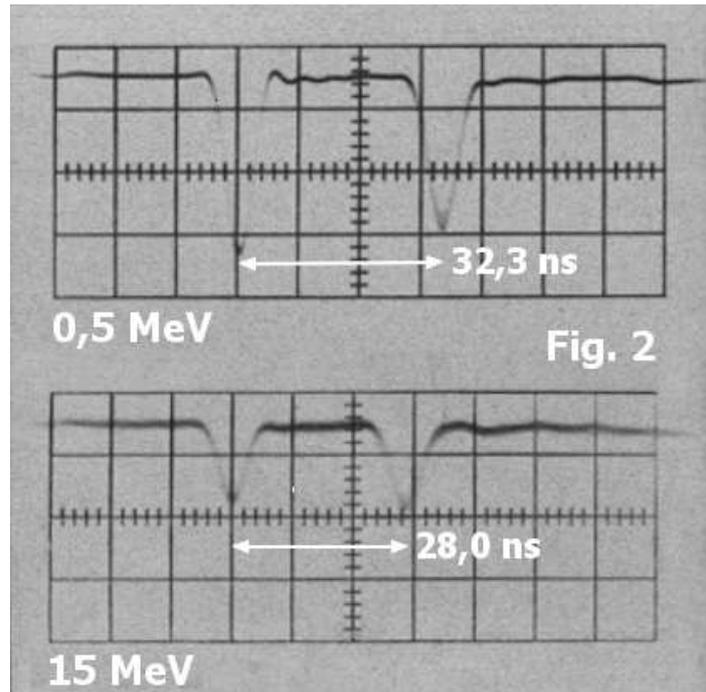
¹¹ Sur le site du CLEA <http://clea-astro.eu/lunap/Relativite/relativite-restreinte-principes-et-applications> on trouvera le film qui a été réalisé par le MIT sur cette expérience. Le sous-titrage est disponible à la même URL.

¹² L'étude présentée ici s'inspire de l'article de W. Bertozzi paru dans l'AJP (1964 – vol 32 n° 7)



Un court tube métallique isolé (environ 10 cm de long) est situé entre le Van de Graaff et l'accélérateur linéaire. Ce tube recueille quelques électrons dans chaque paquet passant à travers lui et une impulsion de tension est produite, signalant le début de la salve le long de la trajectoire de vol (le tube métallique sous vide qui forme le Linac). A

l'extrémité de l'accélérateur linéaire les électrons sont arrêtés dans un disque d'aluminium. La charge reçue par ce dernier produit un second signal. La mesure de l'intervalle de temps entre ces deux signaux donne le temps nécessaire pour que la salve d'électrons traverse la longueur de 8,4 m du tube de l'accélérateur linéaire. Ce temps de vol est déterminé à partir de l'écart entre ces deux signaux affichés sur un oscilloscope. Les deux signaux, l'un en provenance du début et l'autre de la fin de la trajectoire de vol, sont transmis le long de deux câbles distincts ayant des temps de propagation égaux. Les signaux électriques sont ensuite additionnés en conservant leur écart relatif dans le temps et sont connectés sur l'entrée unique d'un oscilloscope Tektronix 581. Des photographies de son écran pour différentes énergies utilisées dans cette expérience sont présentées dans la figure 2. [ici incomplète] »



On y voit l'écart mesuré des signaux et la durée qui en résulte pour le faisceau traversant les 8,4 m de vol. Une division horizontale représente, après étalonnage, 9,8 ns. W. Bertozzi propose ensuite dans son article un tableau contenant les intervalles de temps pour cinq valeurs de la tension appliquée au Linac auxquelles correspondent cinq valeurs d'énergie cinétique exprimées en MeV¹³ (Méga électron-volt).

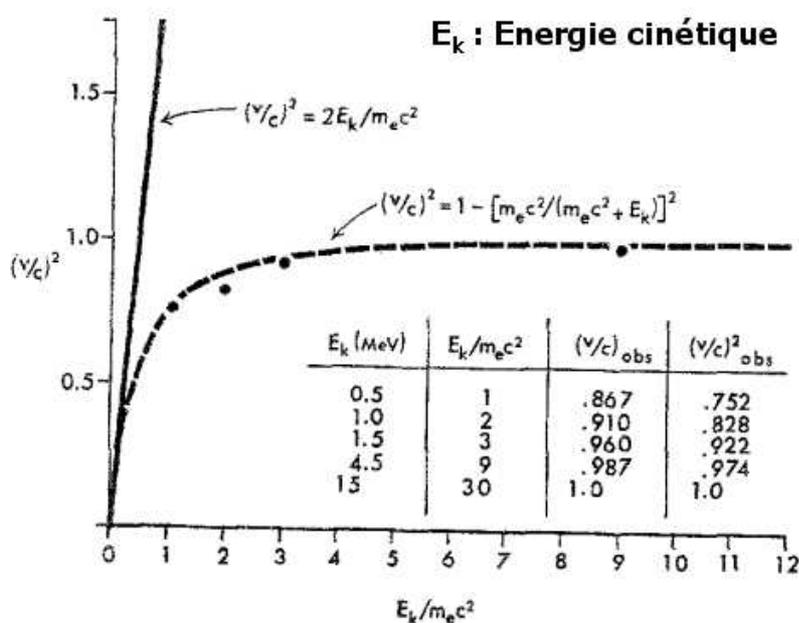
Expérience	E _c (MeV)	Ecart en division	Ecart en ns
a	0,5	3,30	3,23
b	1,0	3,14	3,08
c	1,5	2,98	2,92
d	4,5	2,90	2,84
e	15	2,86	2,80

Ce tableau demande quelques explications. Les trois premières lignes correspondent à l'utilisation exclusive du générateur Van de Graaff situé avant le premier détecteur de passage des électrons. En traversant ce dernier les particules ont déjà acquis leur vitesse de croisière et traversent

¹³ On trouvera en annexe 1 quelques explications sur l'utilisation de cette unité d'énergie.

les 8,4 m avec une vitesse constante. Pour les deux dernières lignes, en rouge, on a mis en route le Linac : pour 4,5 MeV Bertozzi active le premier mètre de l'accélérateur linéaire alors que pour obtenir une énergie cinétique de 15 MeV il utilise la totalité du dispositif. Bertozzi écrit dans son article : « **Dans cette expérience de 4,5 MeV, la vitesse des électrons s'est modifiée le long du premier mètre de la trajectoire de vol (en ce que l'énergie a augmenté de 1,5 MeV à 4,5 MeV sur cette distance) et est restée constante par la suite. Ainsi, l'expression $8,4/t$ ne définit qu'une vitesse moyenne. Cependant, l'utilisation de l'approximation $v_{4,5} \approx 8,4/t$ se justifie par le résultat final.**

Pour l'expérience à 15 MeV, l'énergie des électrons a été en constante augmentation sur l'essentiel de la trajectoire. Cependant, à partir de la mesure du temps [sur l'oscilloscope], on peut voir que le temps de vol est à peu près le même que celui du parcours à 4,5 MeV et on peut en conclure que $v_{15} \approx v_{4,5}$; autrement dit, la vitesse des électrons n'augmente plus sensiblement. En effet, les résultats indiquent clairement que, bien que l'énergie des électrons augmente, leur vitesse se rapproche d'une valeur limite, 3.10^8 m/s. »



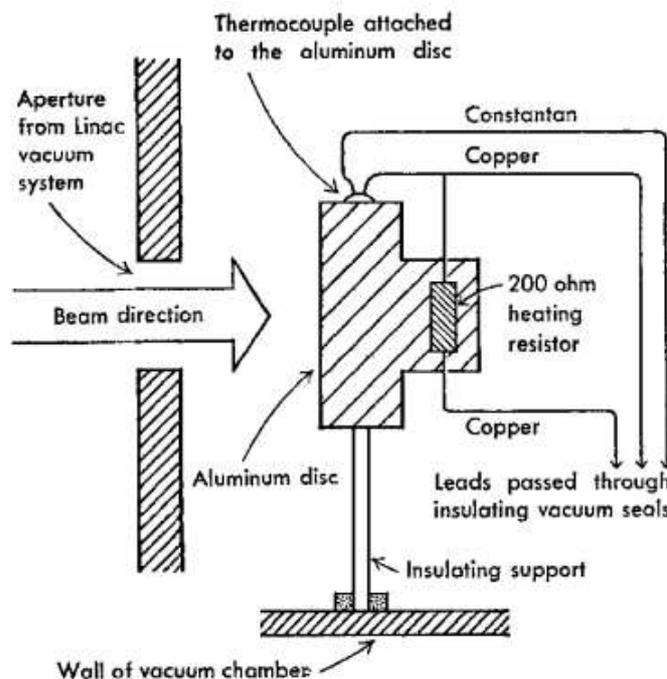
Bertozzi présente alors dans son article un graphique représentant, d'une part, les courbes correspondant à la prévision newtonienne et à la prévision relativiste et, d'autre part, les points expérimentaux. Les mesures sont en excellent accord avec l'expression tirée des travaux d'Albert Einstein.

Mais l'expérience de W. Bertozzi ne s'arrête pas là et il est intéressant ici de détailler cette partie complémentaire de son expérience qui est la plupart du temps passée sous silence dans les présentations publiées.

L'étude précédente mesure bien directement la vitesse mais fournit la valeur de l'énergie cinétique des électrons uniquement par un calcul utilisant la différence de potentiel accélératrice du Van de Graaff et/ou du Linac. Il écrit alors : « **Il convient cependant de noter que l'utilisation d'une mesure de tension ou de champ nécessite [pour être utilisée dans le calcul de l'énergie cinétique] la connaissance préalable que la force exercée sur une particule chargée dans la direction de son mouvement sous l'action d'un champ électrique est indépendante de la vitesse de la particule chargée. En outre, il est clair que les électrons perdent de l'énergie par induction de courants dans les parois lorsqu'ils se déplacent le long du tuyau métallique du Linac. On peut montrer à partir de la théorie électromagnétique que ces pertes sont négligeables, mais**

c'est beaucoup moins satisfaisante qu'une preuve expérimentale. Il a donc été décidé de faire une mesure directe de l'énergie cinétique. »

C'est ici qu'intervient le second rôle du disque d'aluminium placé à l'extrémité du Linac pour collecter les électrons. L'article se poursuit et on peut y lire : **« Lorsque les électrons sont arrêtés dans le disque d'aluminium l'essentiel de leur énergie cinétique est perdu sous forme de chaleur au profit de l'aluminium, ce qui entraîne une augmentation de sa température. (Seule une très petite fraction de l'énergie de l'électron s'échappe sous forme de rayons X). Le gain d'énergie total au profit du disque est proportionnel à sa variation de température si les mesures sont effectuées en un temps court par rapport à la constante de temps thermique mesurée. L'énergie communiquée au disque a été déterminée par calorimétrie et, dans le même temps, le nombre d'électrons transportant cette énergie a été déterminé en mesurant la charge collectée sur le disque. Le courant produit par un thermocouple fixé au disque a entraîné la déviation d'un galvanomètre, ce qui permet de connaître l'augmentation de température. Etant donné que l'intervalle de temps pendant lequel la charge a été recueillie était typiquement d'environ 7 min, alors que la constante de temps thermique du disque était d'environ 50 min, les pertes de chaleur au cours de la mesure ont été négligeables. Le module du thermocouple a été étalonné en faisant passer un courant dans une résistance de 200 ohms également implantée dans le disque. Un courant de 24 mA circulant pendant 133 s a entraîné une déviation de 19 divisions du galvanomètre. De cette manière, chaque graduation de l'échelle du galvanomètre était équivalente à environ 0,80 joule d'énergie absorbée par le disque d'aluminium. »**



On peut vérifier ce résultat en calculant l'énergie thermique W_{th} produite par la résistance. On a :

$$W_{th} = R.I^2.t = 200 \times (24.10^{-3})^2 \times 133 = 15,3 J$$

Donc pour chaque division le galvanomètre indique une énergie w_{th} de :

$$w_{th} = W_{th}/n = 15,3/19 \cong 0,8 J / div$$

Le texte continue : **« Le courant du faisceau pénétrant dans le disque a été utilisé pour charger un condensateur. Un relais permet de le décharger lorsque sa tension atteint une valeur d'environ 1V et chaque décharge du condensateur a été enregistrée dans un compteur. La quantité de charge électrique représentée par chaque unité du compteur**

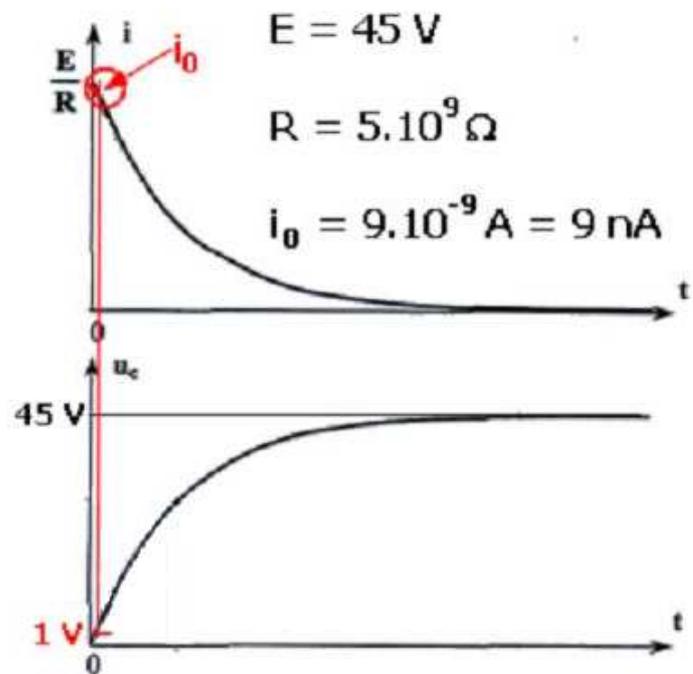
a été déterminée en permettant à la charge de parvenir sur le disque à partir d'une batterie de 45V mise en série avec une résistance de $5 \cdot 10^9$ ohms. En 15 min, 106 clics de comptage ont été observés correspondant à un étalonnage de $7,6 \cdot 10^{-8}$ C par unité de comptage. »

La aussi on peut reprendre les calculs de W. Bertozzi. Mais auparavant il faut décrypter sa méthode expérimentale car il ne donne là dessus aucun détail. En utilisant une source de tension de 45V tout en se limitant à une tension de charge de 1V – rappelons qu'il y a alors décharge du condensateur par un contact de relais lorsque cette valeur est atteinte – on peut considérer que l'intensité circulant pour y parvenir est pratiquement constante et égale à i_0 dont la valeur (voir figure ci contre) est de l'ordre de $E/R = 45/9 \cdot 10^9 = 9$ nA.

Calculons maintenant le temps qu'il faut pour arriver à cette tension de 1V. Sachant qu'il faut 15 min pour charger le condensateur 106 fois jusqu'à 1V, il est facile de calculer qu'une seule charge nécessite une durée $t = 15 \times 60 / 106 = 8,5$ s.

Sachant que $q = i_0 \cdot t$ on peut déduire des calculs précédents la valeur de la charge accumulée sur le disque d'aluminium nécessaire pour atteindre une tension de 1V (correspondant à une unité de comptage) aux bornes du condensateur.

$$q = 9 \cdot 10^{-9} \times 8,5 = 7,6 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$



On retrouve ici la valeur donnée par W. Bertozzi.

Il est maintenant possible d'exploiter ces données. Bertozzi réalise alors deux expériences : l'une pour une tension d'accélération de 1,5 MV et l'autre avec 4,5 MV. Dans les deux cas, l'expérimentateur se fixe une charge accumulée sur le disque correspondant à un comptage de 80 impulsions fournies par le cycle charge/décharge du condensateur, c'est à dire $80 \times 7,6 \cdot 10^{-8} = 6,1 \cdot 10^{-6}$ C. Les mesures correspondant à la lecture du galvanomètre placé derrière le thermocouple donnent respectivement 12,5 et 36,5 divisions, ce qui correspond à $0,8 \times 12,5 = 10$ J et $0,8 \times 36,5 = 29,2$ J. L'énergie, exprimée en eV, des faisceaux utilisés peut alors être calculée :

Pour $E_c = 1,5$ MeV on a :

$$E_{c_c} = q \cdot U_c \Rightarrow U_c = E_{c_c} / q = 10 / 6,1 \cdot 10^{-6} = 1,6 \text{ MV} \Rightarrow E_{c_c} = 1,6 \text{ MeV}$$

Pour $E_c = 4,5$ MeV on a :

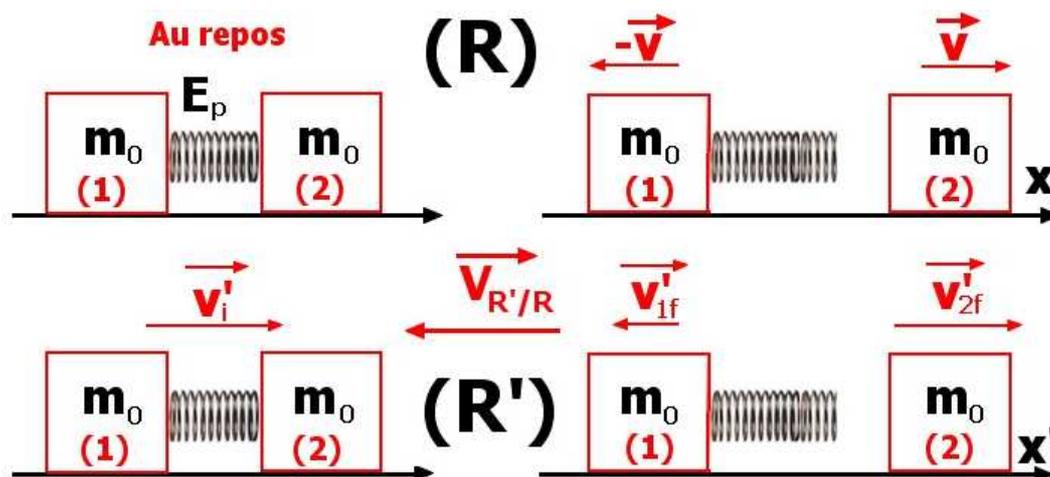
$$E_{c_d} = q \cdot U_d \Rightarrow U_d = E_{c_d} / q = 29,2 / 6,1 \cdot 10^{-6} = 4,8 \text{ MV} \Rightarrow E_{c_d} = 4,8 \text{ MeV}$$

Comme l'écrit Bertozzi : « **Ceux-ci** [les résultats] **sont en accord avec les énergies attendues aux erreurs expérimentales (environ 10%) près pour chacune de ces mesures.** »

7. –GENERALISATION DE L'EXPRESSION DE L'ENERGIE TOTALE

Les calculs précédents concernent l'énergie d'un système en mouvement dans le référentiel d'étude et dont l'état interne n'est pas modifié (température constante, distances entre les sous-systèmes constantes ...etc.). On peut se demander ce qu'il en est de l'énergie totale d'un système dont les paramètres d'état sont modifiés.

Pour illustrer cette question étudions le dispositif suivant¹⁴ : soit deux objets de masse au repos m_0 reliés par un ressort mis en pression et bloqué par un dispositif quelconque. L'ensemble est alors au repos dans le référentiel **(R)** et sa quantité de mouvement est nulle. A un instant initial on libère le ressort. Les deux objets vont alors s'éloigner l'un de l'autre : (1) part vers la gauche avec la vitesse $-\vec{v}$ et (2) vers la droite avec la vitesse \vec{v} . En effet ceci est exigé par la conservation de la quantité de mouvement du système.



Considérons un autre observateur au repos dans un référentiel **(R')** qui se déplace par rapport à **(R)** à la vitesse $\vec{V}_{R'/R}$ dirigée vers la gauche et de valeur algébrique que l'on notera simplement $-V$. Calculons les valeurs algébriques des différentes vitesses dans **(R')** : v'_i est tout simplement égale à V . Pour v'_{1f} et v'_{2f} nous utilisons la loi relativiste de composition des vitesses. Cela nous donne :

$$\text{Dans } (R') : \quad v'_i = V \quad v'_{1f} = \frac{-v + V}{1 - v.V/c^2} \quad \text{et} \quad v'_{2f} = \frac{v + V}{1 + v.V/c^2}$$

Calculons maintenant les quantités de mouvement des objets (1) et (2) dans le référentiel **(R')** à partir des expressions de leurs vitesses obtenues ci dessus :

¹⁴ Cette expérience de pensée s'inspire de l'exemple étudié page 136 du livre de James H. Smith « Introduction à la relativité » (InterEditions – 1979)

$$p'_{1f} = \gamma \cdot m_0 \cdot v'_{1f} = \frac{m_0 \cdot \left[\frac{-v + V}{1 - v \cdot V / c^2} \right]}{\sqrt{1 - \left[(-v + V)^2 / (c^2 \cdot (1 - v \cdot V / c^2)^2 \right]}}$$

Tout calcul fait nous obtenons pour p'_{1f} et p'_{2f} après avoir posé $\beta = v/c$ et $B = V/c$:

$$p'_{1f} = \frac{m_0 \cdot c \cdot (-\beta + B)}{\sqrt{(1 - \beta^2)} \cdot \sqrt{(1 - B^2)}}$$

$$p'_{2f} = \frac{m_0 \cdot c \cdot (\beta + B)}{\sqrt{(1 - \beta^2)} \cdot \sqrt{(1 - B^2)}}$$

La conservation de la quantité de mouvement exige que $p'_i = p'_{1f} + p'_{2f}$.
Calculons le terme de droite de cette égalité :

$$p'_{1f} + p'_{2f} = \frac{m_0 \cdot c \cdot (-\beta + B)}{\sqrt{(1 - \beta^2)} \cdot \sqrt{(1 - B^2)}} + \frac{m_0 \cdot c \cdot (\beta + B)}{\sqrt{(1 - \beta^2)} \cdot \sqrt{(1 - B^2)}}$$

$$p'_{1f} + p'_{2f} = \frac{m_0 \cdot c \cdot (-\beta + B) + m_0 \cdot c \cdot (\beta + B)}{\sqrt{(1 - \beta^2)} \cdot \sqrt{(1 - B^2)}} = \frac{2m_0 \cdot c \cdot B}{\sqrt{(1 - \beta^2)} \cdot \sqrt{(1 - B^2)}}$$

La quantité de mouvement de départ p'_i devrait être égale à cette dernière expression qui est différente de celle obtenue en ne tenant compte que de la masse au repos des deux objets (comme en physique classique). On trouve qu'elle est égale à la quantité de mouvement d'une masse $M_0 \neq 2m_0$ ayant cette même vitesse V dans (\mathbf{R}') .

Vérifions le et calculons la masse au repos M_0 du système initiale en fonction de celle du système final $2m_0$:

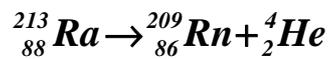
$$p'_i \neq \frac{2m_0 \cdot c \cdot B}{\sqrt{(1 - B^2)}} \quad \text{mais} \quad p'_i = \gamma \cdot M_0 \cdot V = \gamma \cdot M_0 \cdot c \cdot B = \frac{M_0 \cdot c \cdot B}{\sqrt{(1 - B^2)}}$$

$$p'_i = \frac{2m_0 \cdot c \cdot B}{\sqrt{(1 - B^2)} \cdot \sqrt{(1 - \beta^2)}} \Rightarrow M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \geq 2m_0$$

La masse inertielle totale du système de départ est donc supérieure à la somme des masses des deux objets qui le constituent. Ceci correspond au fait qu'il faut tenir compte de l'équivalence masse-énergie et affecter l'énergie potentielle élastique E_p du ressort d'une inertie correspondant à une masse inertielle égale à E_p/c^2 . On a alors :

$$\frac{E_p}{c^2} = M_0 - 2m_0$$

Cet exemple s'apparente à la désintégration spontanée d'une particule instable : on constate bien que la masse au repos du noyau initial est supérieure à la somme des masses des noyaux produits. Voyons ça sur un exemple : la désintégration d'un noyau de radium 213 donnant une particule α et un noyau de radon 209 :



Une table de constantes nous donne pour les masses au repos des différents noyaux, en unité de masse atomique¹⁵ :

$$m_{\text{Ra}213} = 213,000384 \text{ u}$$

$$m_{\text{Rn}209} = 208,990415 \text{ u}$$

$$m_{\text{He}4} = 4,002603 \text{ u}$$

On peut alors vérifier que :

$$213,000384 > 208,990415 + 4,002603 = 212,993018$$

Insistons encore sur le fait que l'énergie relativiste totale d'un système doit intégrer toutes les formes d'énergie le concernant. De même la quantité $E_0 = m_0 \cdot c^2$, l'énergie totale d'un corps au repos, représente aussi la somme de toutes les énergies « internes », (énergie thermique, énergie nucléaire, énergie chimique) et des énergies potentielles (électrique, gravitationnelle, élastique) qui lui sont attachées.

Un ressort bandé a une masse au repos¹⁶ égale à celle qu'il possède lorsque aucune force ne s'applique sur lui à laquelle vient s'ajouter l'inertie de l'énergie potentielle élastique emmagasinée : une montre mécanique à ressort est plus « lourde » lorsqu'elle est remontée que lorsque elle est arrêtée ! On peut dire la même chose à propos de la masse d'un certain volume de glace et de celle de l'eau de fusion obtenue après réchauffage. Cependant il n'est pas possible de mettre expérimentalement en évidence ces différences, ces dernières étant beaucoup trop faibles.

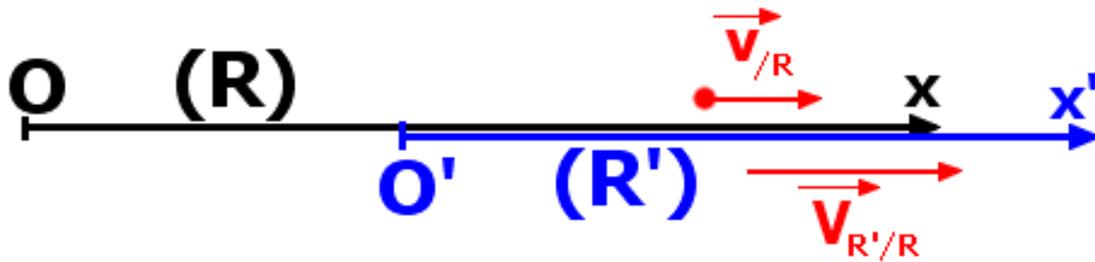
8. – ÉNERGIE ET QUANTITÉ DE MOUVEMENT DANS UNE TL

Comment se transforme l'énergie et la quantité de mouvement dans une transformation de Lorentz (TL), c'est à dire quelles relations existent entre leurs expressions dans deux référentiels **(R)** et **(R')** en mouvement relatif ?

¹⁵ L'unité de masse atomique (symbole u) n'appartient pas au système international. Elle est définie comme 1/12 de la masse d'un atome du nucléide ${}^{12}\text{C}$, non lié, au repos et dans son état fondamental. Exprimé en MeV/c^2 nous avons $1\text{u} = 931,494028 \text{ MeV}/c^2$. Remarquons que la masse d'un proton est de 1,0073 u et que celle d'un neutron est de 1,0087 u. Ces valeurs ne sont pas entières car la masse de l'atome de C^{12} est inférieure à la somme des masses individuelles des six neutrons et des six protons le constituant (défaut de masse).

¹⁶ On considère ici une expérience de pensée dans laquelle on pèserait le ressort dans les deux états. En vertu du principe d'équivalence masse – énergie la différence entre les résultats serait positive bien que non mesurable en réalité.

Considérons une particule de masse au repos m_0 se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_{/R} = \vec{v}$ dans (R) . Le référentiel (R') est en mouvement par rapport à (R) à la vitesse $\vec{V}_{R'/R} = \vec{V}$.



Dans (R) la particule a une quantité de mouvement \vec{p} et une énergie E . Dans (R') ces grandeurs deviennent \vec{p}' et E' . En s'appuyant sur la loi relativiste de composition des vitesses pour exprimer \mathbf{v}' dans (R') en fonction de \mathbf{v} et \mathbf{V} on peut, après quelques calculs sans difficulté, montrer que (ici \vec{p} et \vec{p}' n'ont qu'une composante, p_x , que l'on notera donc p) :

$$\begin{cases} p' = \gamma (p - vE/c^2) \\ E' = \gamma (E - vp) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

On peut réécrire ces expressions d'une manière un peu différente :

$$\begin{cases} cp' = \gamma (cp - \beta E) \\ E' = \gamma (E - \beta cp) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \beta = v/c$$

Rappelons la TL pour les coordonnées¹⁷ :

$$\begin{cases} ct' = \gamma (ct - \beta x) \\ x' = \gamma (x - \beta ct) \end{cases}$$

On voit donc que (p,E) se transforme, suite à une TL, de la même façon que (t,x) .

Formons la quantité $E'^2 - p'^2 c^2$ en élevant au carré chaque équation des TL relative au couple (p,E) :

$$\begin{cases} p'^2 c^2 = \gamma^2 (pc - \beta E)^2 \\ E'^2 = \gamma^2 (E - \beta pc)^2 \end{cases}$$

Soustrayons la seconde de la première :

$$E'^2 - p'^2 c^2 = \gamma^2 \left((E - \beta pc)^2 - (pc - \beta E)^2 \right)$$

¹⁷ Là encore nous considérons qu'il n'y a qu'une seule coordonnée spatiale pertinente, x .

donc :

$$\begin{aligned} E'^2 - p'^2 c^2 &= \gamma^2 (E^2 - 2E\beta pc + \beta^2 p^2 c^2 - c^2 p^2 + 2pc\beta E - \beta^2 E^2) \\ &= \gamma^2 (E^2 - \beta^2 E^2 + 2pc\beta E - 2E\beta pc - c^2 p^2 + \beta^2 p^2 c^2) \\ &= \gamma^2 ((1 - \beta^2) \cdot (E^2 - p^2 c^2)) = \gamma^2 / \gamma^2 \cdot (E^2 - p^2 c^2) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc finalement :

$$E'^2 - p'^2 c^2 = E^2 - p^2 c^2 = \text{constante}$$

Comme on pouvait s'y attendre la quantité $E^2 - p^2 c^2$ est donc un invariant comme l'est la quantité $c^2 t^2 - x^2$, les grandeurs y intervenant respectant la TL. Nous avons rencontré précédemment cette expression au paragraphe 5 et montré que :

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 = E_0^2$$

La constante exprimant cet invariant est donc égale à l'énergie de repos de la particule élevée au carré.

Pour illustrer la mise en oeuvre de ces relations considérons une situation particulière. Soit une particule, ayant dans un certain référentiel (**R'**), une énergie totale E' de 5 MeV et une quantité de mouvement p' de 3 GeV/c (donc le produit cp vaut 3 MeV). Cherchons les grandeurs suivantes :

- Son énergie E dans un référentiel (**R**) dans lequel sa quantité de mouvement p est égale à 4 GeV/c.
- Sa masse au repos m_0
- La vitesse relative des deux référentiels (**R**) et (**R'**)

La relation $E^2 - p^2 c^2 = cste$ nous permet d'écrire :

$$E^2 - p^2 c^2 = E'^2 - p'^2 c^2 \Rightarrow E^2 = E'^2 - p'^2 c^2 + p^2 c^2 = E'^2 - c^2 (p'^2 - p^2)$$

Numériquement on obtient $E^2 = 5^2 - (3^2 - 4^2) = 32 \Rightarrow \mathbf{E = 5,66 GeV}$

La constante étant $m_0^2 c^4$ nous obtenons : $m_0^2 = (E/c^2)^2 - (p/c)^2$

Numériquement cela nous donne $m_0^2 = 5,66^2 - 4^2 = 32 - 16 = 16$.

Finalement $\mathbf{m_0 = 4 GeV/c^2}$

Nous savons que $E = \gamma m_0 c^2 \Rightarrow \gamma = E/m_0 c^2 = 5,66 / 4 = 1,41$.

Donc $\beta = 0,71$. De même $E' = \gamma' m_0 c^2 \Rightarrow \gamma' = E'/m_0 c^2 = 5 / 4 = 1,25$. On a alors $\beta' = 0,6$.

Nous pouvons définir un B de (**R**)/(**R'**) avec la loi relativiste de composition des vitesses tel que :

$$B = (\beta - \beta') / (1 - \beta\beta') = 0,187 \Rightarrow \mathbf{V = 0,187c}$$

9. - ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT DANS UN DIAGRAMME

9-1. - Diagrammes liés à la TL

E et \vec{p} obéissant à la TL on peut, comme x et ct, les placer dans un diagramme. On peut utiliser les trois types de diagramme déjà étudiés dans un autre chapitre : Minkowski, Lorentz ou Loedel.

Retrouvons sur un diagramme de Loedel l'invariance de la quantité $E^2 - p^2c^2$.

Sur le schéma de droite nous avons dans le triangle MBF qui est rectangle en B :

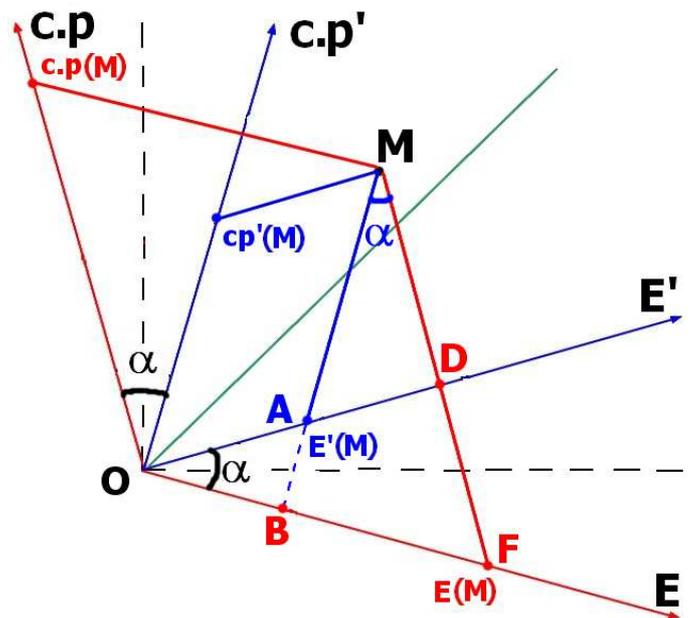
$$\mathbf{MF^2 = MB^2 + BF^2}$$

Par construction du diagramme nous pouvons écrire :

$$\mathbf{MF = cp}$$

$$\mathbf{MB = cp' + AB = cp' + E' \cdot \sin(\alpha)}$$

$$\mathbf{BF = E - OB = E - E' \cdot \cos(\alpha)}$$



Développons en fonction de E, E', cp et cp' l'expression de MF^2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{c^2p^2} &= \mathbf{[cp' + E' \cdot \sin(\alpha)]^2 + [E - E' \cdot \cos(\alpha)]^2} \\ &= \mathbf{c^2p'^2 + 2cp'E' \sin(\alpha) + E'^2 \sin^2(\alpha) + E^2 - 2EE' \cos(\alpha) + E'^2 \cos^2(\alpha)} \\ &= \mathbf{c^2p'^2 + 2E'[cp' \sin(\alpha) - E \cos(\alpha)] + E'^2 [\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)] + E^2} \\ &= \mathbf{c^2p'^2 + 2E'[cp' \sin(\alpha) - E \cos(\alpha)] + E'^2 + E^2} \end{aligned}$$

Sur le diagramme la quantité $cp' \sin(\alpha)$ est représentée par le segment AD dans le triangle MAD et $E \cos(\alpha)$ par le segment OD dans le triangle ODF.

$$\text{Donc : } \mathbf{cp' \sin(\alpha) - E \cos(\alpha) = AD - OD = -OA = -E'}$$

$$\mathbf{c^2p^2 = c^2p'^2 + 2E'[cp' \sin(\alpha) - E \cos(\alpha)] + E'^2 + E^2}$$

$$\mathbf{c^2p^2 = c^2p'^2 - 2E'^2 + E'^2 + E^2 = c^2p'^2 - E'^2 + E^2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E^2 - c^2p^2 = E'^2 - c^2p'^2} \quad \mathbf{CQFD}$$

Cette démonstration confirme le caractère quadri-vectoriel de la quantité $(\vec{p}, E/c)$. Cependant on a peu recours à la mise en oeuvre d'un diagramme de ce type pour traiter des questions énergétiques car ces dernières concernent rarement des changements de référentiel. On peut cependant l'utiliser pour traiter la dernière question de l'exercice précédent demandant la vitesse relative des référentiels (R) et (R') . En effet on sait que $\sin(\alpha) = \beta$, α étant l'angle entre les axes du diagramme de Loedel.

Sur le diagramme nous avons déjà constaté que $OA = OD - AD$, c'est à dire que $\mathbf{E' = E \cdot \cos(\alpha) - cp' \cdot \sin(\alpha)}$. Donc :

$$E' = E \cdot \sqrt{1 - \beta^2} - cp' \cdot \beta \Rightarrow E' + cp' \beta = E \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$(E' + cp' \beta)^2 = E^2 \cdot (1 - \beta^2)$$

$$E'^2 + 2E' cp' \cdot \beta + c^2 p'^2 \beta^2 = E^2 - \beta^2 \cdot E^2$$

$$(E^2 + c^2 p'^2) \beta^2 + 2E' cp' \cdot \beta + E'^2 - E^2 = 0$$

On a donc une équation du second degré en β dont il faut trouver les racines. Auparavant remplaçons les grandeurs énergie et quantité de mouvement par les données numériques du problème qu'on rappelle : $E = 5,66 \text{ MeV}$, $E' = 5 \text{ MeV}$, $p = 4 \text{ MeV}/c$ et $p' = 3 \text{ MeV}/c$

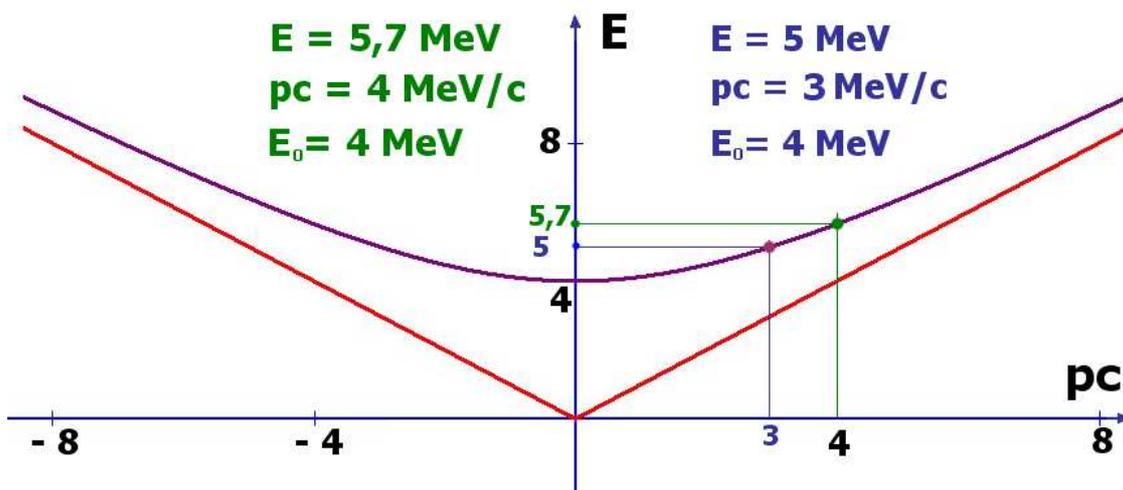
$$(32 + 9)\beta^2 + 2 \times 5 \times 3\beta + 25 - 32 = 0 \Rightarrow 41\beta^2 + 30\beta - 7 = 0$$

Après résolution on obtient comme racine positif $\beta = 0,185$, résultat conforme à nos calculs précédents. Donc $\mathbf{V = 0,185c}$

9-2. - Diagramme (énergie, impulsion)

On peut également tracer un diagramme représentant, dans un référentiel donné, l'évolution de l'énergie en fonction de la quantité de mouvement. Sur ce diagramme le point représentatif des grandeurs caractéristiques de la particule étudiée va se trouver sur une branche de l'hyperbole d'équation $E^2 - c^2 p^2 = E_0^2$.

Représentons ce diagramme dans le cas de l'exemple étudié précédemment. Il permet de déterminer graphiquement le couple (E, pc) , mesuré dans n'importe quel référentiel, d'un particule d'énergie de repos E_0 égale à 4 MeV.



10. - EXEMPLES DE MISE EN OEUVRE DES NOTIONS PRECEDENTES

10-1. - Défaut de masse

La mise en évidence la plus connue de l'équivalence entre masse et énergie est relative au noyau d'un atome. Un tel objet se compose d'un certain nombre de protons et de neutrons, particules ayant environ la même masse, le neutron étant électriquement neutre et le proton ayant

une charge électrique $+e$ de grandeur égale mais de signe contraire à celle de l'électron. Un noyau se compose de Z protons et de N neutrons, où Z est le nombre atomique correspondant au rang de l'élément considéré dans le tableau périodique. Étant donné qu'un atome est électriquement neutre il aura alors Z électrons en orbite autour du noyau, ce qui lui donne ses propriétés chimiques. De plus, la somme $(N + Z)$ est appelée nombre de masse et est habituellement désignée par A . On a donc $N = (A - Z)$. On sait depuis le début du XX^e siècle que pour un même élément (une valeur particulière de Z) il existe plusieurs sortes d'atomes qui se distinguent les uns des autres par une valeur de N différente : ce sont les isotopes de l'élément Z . Si le symbole chimique de l'élément est X un isotope particulier de cet élément a pour symbole ${}^A_Z X$. La première idée que l'on peut avoir pour « fabriquer » un noyau de l'élément ${}^A_Z X$ est de prendre Z protons, $(A - Z)$ neutrons et de les associer. Pour cela il faut vaincre les répulsions électrostatiques entre les protons mais, lorsque la distance inter-nucléons devient inférieure à quelques fermis ($1 \text{ F} = 10^{-15} \text{ m}$), les forces nucléaires attractives entrent en jeu et assurent la cohésion du noyau. On appellera alors **énergie de liaison** du noyau au repos ${}^A_Z X$ l'énergie minimum qu'il faut lui fournir pour séparer les Z protons et les $(A - Z)$ neutrons qui le composent.

En vertu du principe d'équivalence masse – énergie et de sa conservation on peut écrire, avec M , m_p et m_n désignant respectivement la masse du noyau, du proton et du neutron et E_l l'énergie de liaison :

$$M.c^2 + E_l = Z.m_p.c^2 + (A - Z).m_n.c^2$$

Donc :

$$E_l = Z.m_p.c^2 + (A - Z).m_n.c^2 - M.c^2 = [Z.m_p + (A - Z).m_n - M]c^2$$

Cette grandeur E_l est toujours positive car on sait que, du fait de la cohésion du noyau sous l'action des forces nucléaires, il faut lui fournir de l'énergie pour le dissocier.

En exprimant E_l en eV et les masses en eV/c^2 nous avons :

$$E_l = Z.m_p + (A - Z).m_n - M$$

Calculons, par exemple, l'énergie de liaison d'un noyau de ${}^{235}_{92}\text{U}$ qui a 92 protons (masse du proton : $938,25 \text{ MeV}/c^2$) et 147 neutrons (masse du neutron : $939,55 \text{ MeV}/c^2$) et dont la masse totale au repos est de $218,94 \text{ GeV}/c^2$:

$$E_l = 92 \times 938,25 + (235 - 92) \times 939,55 - 218940 = 1,73 \text{ GeV}$$

Cette énergie de liaison peut-elle être récupérée ? Bien entendu elle ne peut l'être directement puisque les noyaux étant déjà disponibles en édifices constitués nous ne pouvons plus les construire pour produire de l'énergie. Comme en chimie, il est nécessaire de réaliser des réactions nucléaires de telle façon que le bilan énergétique final soit positif. Pour

cela il faut que le(s) produit(s) obtenu(s) possèd(en)t une énergie de liaison plus importante que le(s) noyau(x) de départ. Prenons comme exemple la réaction nucléaire de la synthèse du noyau d'oxygène 16 :



Le bilan de la réaction nous donne pour l'énergie de liaison E_l :

$$E_l = (m_{\text{He}} + m_{\text{C}} - m_{\text{O}}) \cdot c^2 - E_{\gamma}$$

$$E_l + E_{\gamma} = (m_{\text{He}} + m_{\text{C}} - m_{\text{O}}) \cdot c^2$$

La quantité E_{γ} a été placée dans le membre de gauche du bilan puisque cette énergie est disponible après la réaction.

$$E_l + E_{\gamma} = 3727,3 + 11174,6 - 14894,7 = -7,20 \text{ MeV}$$

Le signe (-) indique que la réaction est exoénergétique. L'énergie libérée est disponible sous forme cinétique pour le noyau d'O¹⁶ formé.

10-2. – Désintégration de particules

Le bestiaire de particules découvert durant le XX^e siècle est très riche. La plupart de celles mises en évidence sont instables et vont se désintégrer en plusieurs autres qui, éventuellement, peuvent à leur tour se désintégrer. Cette transformation obéit bien entendu aux lois de conservation¹⁸ de la quantité de mouvement relativiste et de conservation de la masse-énergie¹⁹.

On a déjà eu l'occasion de rencontrer de telles réactions lors de l'étude des travaux de Frisch et Smith²⁰ à propos des muons formés durant le déroulement des chaînes de désintégration des rayons cosmiques. On sait que le muon provient de la désintégration d'une autre particule, le pion. C'est en 1947 que Powell, Lattès et Occhialini (Université de Bristol) découvrent les premiers mésons : les pions π^+ et π^- . Pour y parvenir, ils ont opéré à haute altitude en utilisant un nouveau type de détecteurs : une pellicule photographique munie d'une émulsion spécialement conçue pour ce type d'expérience. Après avoir récupéré leur matériel, la lecture sous microscope de ces enregistrements a révélé la présence de traces de particules chargées émises par une particule primaire captée et se désintégrant très rapidement. Cette dernière s'arrêtait donc dans l'émulsion en émettant une particule secondaire déjà connue²¹ : le muon. Elle fut alors dénommée méson π , appellation abandonnée aujourd'hui au profit de pion. L'étude de la trace du muon montra qu'elle avait toujours la même longueur ce qui prouvait que la désintégration du pion était une

¹⁸ On peut bien entendu ramener ces deux lois à une seule, la loi de conservation de la quadri-impulsion, dans l'espace quadri-dimensionnel.

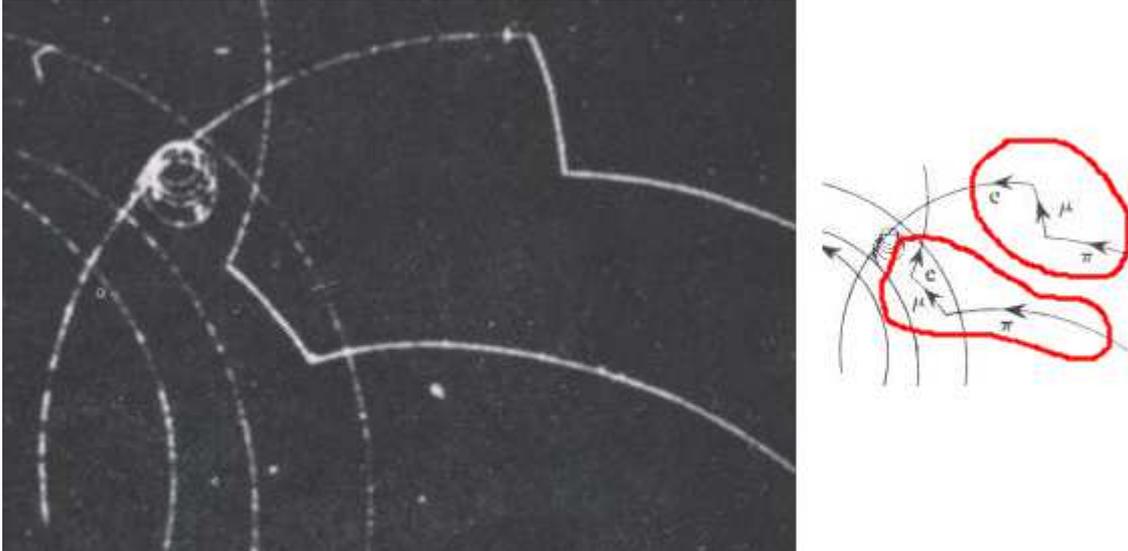
¹⁹ Il existe d'autres lois de conservation (charge électrique, moment cinétique, nombre leptonique, nombre baryonique ...) mais nous n'y feront pas appel ici. On peut également désigner cette loi de conservation par l'expression « conservation de l'énergie totale ».

²⁰ Voir le lien <http://clea-astro.eu/lunap/Relativite/relativite-restreinte-principes-et-applications>

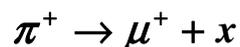
²¹ Rappelons que le muon - appelé autrefois méson μ - fut découvert en 1938 par C. Anderson qui travaillait avec une chambre de Wilson.

réaction dont les produits se limitaient à deux particules²². Le deuxième produit de désintégration était invisible car neutre.

Etudions cette désintégration sur l'enregistrement fourni par une chambre à bulles²³. On a placé sur la droite le schéma annoté de deux désintégrations de pion.



On y voit un pion positif arriver par la droite, s'arrêter et se désintégrer en donnant une nouvelle particule chargée, un muon positif, qui elle même se désintègre un peu plus tard en donnant un positon e^+ . Ces désintégrations peuvent éventuellement donner une ou plusieurs particules neutres qui ne laissent pas de trace dans une chambre à bulles. Or dans le cas qui nous intéresse la quantité de mouvement du μ^+ est toujours la même (comme on le montre un peu plus loin), les produits de la désintégration ne peuvent donc pas être plus de deux, comme déjà indiqué. On écrira alors la désintégration du π^+ selon l'équation suivante :



x représente une éventuelle particule neutre invisible sur le cliché. Pour connaître les propriétés de cette dernière calculons le bilan énergétique relativiste. Sa formulation est donnée en supposant que l'énergie est exprimée en MeV, la masse au repos²⁴ en MeV/c^2 et la quantité de mouvement en MeV/c :

$$\sqrt{m_\pi^2 + p_\pi^2} = \sqrt{m_\mu^2 + p_\mu^2} + \sqrt{m_x^2 + p_x^2}$$

Le pion se désintégrant après avoir été arrêté dans l'hydrogène²⁵ liquide de la chambre à bulles, nous avons $p_\pi = 0$. La relation précédente devient :

²² Voir la démonstration un peu plus loin.

²³ Voir en annexe 2 quelques développements sur le principe et le fonctionnement d'une telle installation.

²⁴ On écrira ici les masses au repos en omettant le 0 en indice pour ne pas surcharger l'écriture ; par exemple m_μ représente aurait été écrit précédemment $m_{0\mu}$.

²⁵ Les premières chambres à bulles utilisaient de l'hydrogène liquide mais, par la suite, on le remplaça par du propane.

$$m_{\pi} = \sqrt{m_{\mu}^2 + p_{\mu}^2} + \sqrt{m_x^2 + p_x^2}$$

On a également conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{0} = \vec{p}_{\mu} + \vec{p}_x \Rightarrow \vec{p}_{\mu} = -\vec{p}_x \Rightarrow p_{\mu} = p_x = p$$

En remplaçant dans l'équation précédente nous obtenons :

$$m_{\pi} = \sqrt{m_{\mu}^2 + p^2} + \sqrt{m_x^2 + p^2}$$

Les masses m_{π} , m_{μ} et m_x étant fixées on en déduit que dans une désintégration à deux secondaires il en est de même de p . On a donc ici un résultat important qui s'énonce comme suit : dans une désintégration dans laquelle le primaire est au repos et qui donne deux secondaires, les quantités de mouvement de ces derniers sont égales et opposées et ont une valeur parfaitement fixée par les masses au repos des particules participantes. Il en est alors de même de leur énergie dont le spectre ne possède qu'une seule raie.

Les masses aux repos des deux particules π et μ sont $m_{\pi} = 139,6$ MeV et $m_{\mu} = 105,7$ MeV. L'étalonnage de la chambre à bulles a permis également de déterminer la quantité de mouvement d'une particule à partir de la connaissance du rayon de courbure de sa trajectoire. Dans le cas présent on obtient pour p_{μ} , donc pour p , une valeur de 29,7 MeV/c. On peut alors écrire :

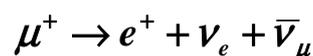
$$139,57 \approx \sqrt{105,66^2 + 29,7^2} + \sqrt{m_x^2 + 29,74^2}$$

$$139,57 - 109,8 \approx \sqrt{m_x^2 + 29,74^2}$$

$$886 \approx m_x^2 + 884 \Rightarrow m_x \approx 1,4 \text{ MeV}$$

On obtient ici une masse au repos extrêmement faible qui ne correspond à aucune particule neutre connue. De plus, avec les incertitudes de mesure, cet objet recherché pourrait avoir une masse nulle. Les particules neutres pouvant être candidates sont peu nombreuses : il faut exclure le photon car la loi de conservation du moment cinétique total l'interdit. Le moment cinétique total est la somme du moment cinétique orbital et des moments cinétiques intrinsèques ou spin. En appliquant ici les lois de composition des spins on peut montrer qu'un π^+ (spin nul) ne peut pas donner un μ^+ (spin de $1/2$) associé à un photon (spin de 1). Il ne nous reste donc comme candidat pouvant convenir que le neutrino (spin $1/2$).

Intéressons nous maintenant au muon positif formé lors de la désintégration du pion. Il va donner un positon accompagné de deux neutrinos selon l'équation réactionnelle suivante :



Les lois de conservation nous permettent d'écrire :

$$\sqrt{m_\mu^2 + p_\mu^2} = \sqrt{m_e^2 + p_e^2} + \sqrt{m_\nu^2 + p_\nu^2} + \sqrt{m_{\bar{\nu}}^2 + p_{\bar{\nu}}^2}$$

$$\vec{0} = \vec{p}_e + \vec{p}_\nu + \vec{p}_{\bar{\nu}}$$

Mais pour un neutrino et un antineutrino on a²⁶ $m_\nu = m_{\bar{\nu}} = 0$. De plus le muon étant au repos on a $p_\mu = 0$. Donc l'équation énergétique devient :

$$m_\mu = \sqrt{m_e^2 + p_e^2} + p_\nu + p_{\bar{\nu}}$$

On doit donc résoudre un système de deux équations mais on a trois inconnues, p_e, p_ν et $p_{\bar{\nu}}$. Ceci entraîne que les quantités de mouvement et l'énergie vont se répartir d'une manière aléatoire selon un spectre continu.

Cherchons comment ce dernier se répartit et plus particulièrement quelle est la quantité de mouvement maximum de l'électron produit. L'équation de conservation de \vec{p} nous permet d'écrire $\vec{p}_e = -(\vec{p}_\nu + \vec{p}_{\bar{\nu}})$. La valeur maximum de p est obtenue lorsque les trois vecteurs sont colinéaires, ce qui entraîne que, en module, nous avons $p_{e_{max}} = p_\nu + p_{\bar{\nu}}$. On a alors :

$$m_\mu = \sqrt{m_e^2 + p_{e_{max}}^2} + p_{e_{max}}$$

$$m_\mu - p_{e_{max}} = \sqrt{m_e^2 + p_{e_{max}}^2}$$

Elevons au carré les deux membres de l'équation et regroupons les termes en tenant compte du fait que $m_e \ll m_\mu \approx 200m_e$:

$$(m_\mu - p_{e_{max}})^2 = m_e^2 + p_{e_{max}}^2 \Rightarrow m_\mu^2 - 2m_\mu p_{e_{max}} + p_{e_{max}}^2 = m_e^2 + p_{e_{max}}^2$$

$$2m_\mu p_{e_{max}} = m_\mu^2 - m_e^2 \approx m_\mu^2 \Rightarrow p_{e_{max}} \approx \frac{m_\mu}{2} = \frac{106}{2} = 53 \text{ MeV}/c$$

Cette expression donne la valeur maximum de la quantité de mouvement de l'électron et donc de son énergie puisque $m_e^2 \ll p_{e_{max}}^2$. Cette valeur théorique est tout à fait conforme à ce que donne l'expérience.

10-3. – Effet Compton

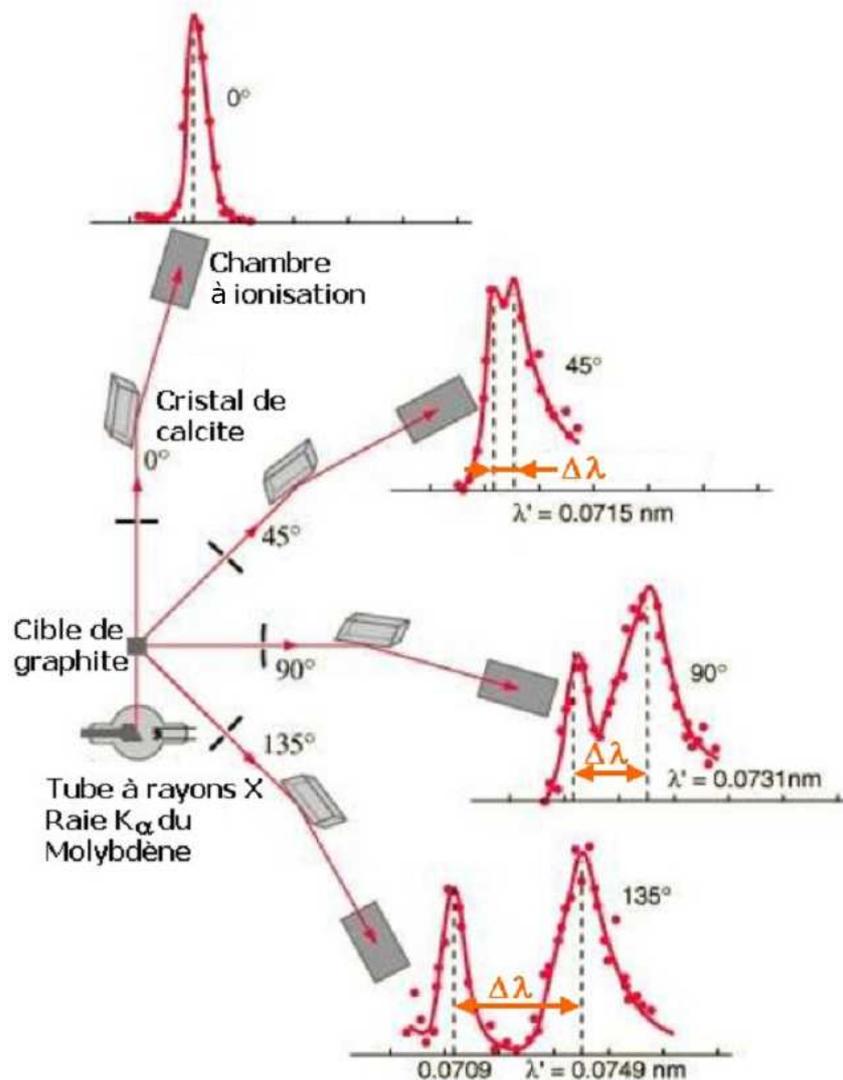
De tous les phénomènes mettant en évidence les propriétés corpusculaires des photons, l'effet Compton est peut-être le plus convaincant. Il s'agit de la collision d'un photon avec un électron libre qui, en pratique, est un électron faiblement lié à un atome, de sorte qu'on peut le dire effectivement libre.

²⁶ Le neutrino a très certainement une masse non nulle mais, dans les expériences décrites ici, elle reste négligeable devant celle des autres particules intervenantes.

Etude expérimentale

L'étude systématique par Compton de ce phénomène au cours des années 1919-1923, à l'aide de photons X, lui valut le prix Nobel de physique de 1927. En pratique il a procédé de la manière suivante.

Une cible de graphite est bombardée par des rayons X monochromatiques provenant d'une tube dont l'anode est en molybdène. La longueur d'onde du rayonnement diffusé est mesurée avec un spectromètre rotatif de Bragg utilisant un cristal de calcite. L'intensité de ce même rayonnement est déterminée par une chambre à ionisation mobile qui génère un courant d'intensité proportionnelle à celle des rayons X. Compton a mesuré la dépendance des intensités des rayons X en fonction de leur longueur d'onde pour trois angles de diffusion différents : 45° , 90° et 135° . La courbe de l'intensité mesurée expérimentalement en fonction des différentes longueurs d'onde observées par Compton pour les trois angles de diffusion montre deux pics : l'un à la longueur d'onde λ_i des rayons X incidents et l'autre à une longueur d'onde supérieure λ_f . Le schéma de l'expérience et les résultats obtenus sont résumés dans le schéma suivant²⁷ :



²⁷ Ce schéma est tiré de l'excellent diaporama « Introduction à la physique moderne » (I. Deloncle & O. Perdereau) que l'on trouvera sur <http://www.in2p3.fr/actions/formation/PhyAuDet10/IntroMecaQuantique.pdf>

Etude théorique

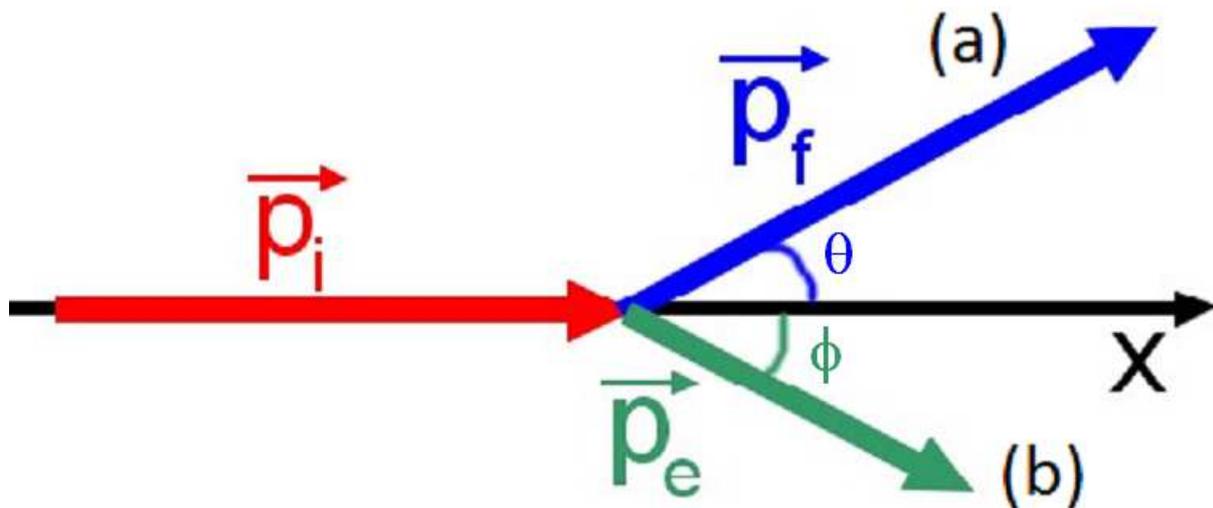
Plusieurs résultats de cette expérience doivent être expliqués :

- La présence de deux pics dans le spectre du rayonnement diffusé.
- La relation entre l'écart $\Delta\lambda$ observé et l'angle de diffusion

Si on s'intéresse à l'électron diffusé – ce que n'a pas fait A. Compton dans son expérience – il faut aussi justifier théoriquement :

- L'énergie de l'électron diffusé à la fin de l'expérience.
- L'angle de diffusion de l'électron Compton

A. Compton considère dans son étude que la collision est élastique et donc que l'énergie initiale du photon incident se retrouve intégralement dans l'énergie cinétique de recul de l'électron et dans l'énergie rayonnante du photon diffusé. Cette dernière a donc une valeur inférieure - et donc la longueur d'onde correspondante est plus grande - que celle du photon incident.



Le processus de diffusion lors de l'effet Compton est alors une collision essentiellement relativiste et peut être décrite de la façon suivante : un photon d'énergie E_i frappe un électron au repos (masse m_e) qui se déplace ensuite dans la direction (b), faisant un angle θ avec l'axe Ox. De son côté le photon est diffusé dans la direction (a) qui fait un angle ϕ avec l'axe Ox. Il possède une d'énergie E_f .

Les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement nous donne les équations suivantes :

$$E_i + m_e \cdot c^2 = E_f + E_e$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f + \vec{p}_e \Rightarrow (E_i / c) \cdot \vec{u}_i = (E_f / c) \cdot \vec{u}_f + \vec{p}_e$$

E_e et \vec{p}_e sont l'énergie et l'impulsion de l'électron de recul et \vec{u}_i et \vec{u}_f sont les vecteurs unitaires selon les directions de propagation respectives du photon incident et du photon diffusé. Si nous nous intéressons à ce dernier et non pas à l'électron nous pouvons alors écrire :

$$(E_i - E_f) + m_e \cdot c^2 = E_e$$

$$E_i \cdot \vec{u}_i - E_f \cdot \vec{u}_f = c \cdot \vec{p}_e$$

Elevons au carré ses deux équations :

$$(E_i - E_f)^2 + 2 \cdot (E_i - E_f) \cdot m_e \cdot c^2 + m_e^2 \cdot c^4 = E_e^2$$

$$E_i^2 - 2 \cdot E_i \cdot E_f \cdot \cos \theta + E_f^2 = c^2 \cdot p^2$$

Soustrayons maintenant les deux résultats l'un de l'autre après développement :

$$2 \cdot E_i \cdot E_f \cdot (1 - \cos \theta) - 2 \cdot (E_i - E_f) \cdot m_e \cdot c^2 = 0$$

$$2 \cdot E_i \cdot E_f \cdot (1 - \cos \theta) = 2 \cdot (E_i - E_f) \cdot m_e \cdot c^2$$

Après division des deux membres par $E_i \cdot E_f$ et simplification par deux nous avons :

$$1/m_e \cdot c^2 \cdot (1 - \cos \theta) = 1/E_f - 1/E_i$$

Nous savons qu'il existe entre l'énergie E d'un photon et sa longueur d'onde λ une relation $E = h \cdot \nu = h \cdot c / \lambda$ avec h représentant la constante de Planck.

Donc, finalement :
$$\Delta \lambda = \lambda_f - \lambda_i = (h/m_e \cdot c) \cdot (1 - \cos \theta)$$

Compton a donc établi expérimentalement que la dépendance angulaire du décalage en longueur d'onde du rayon X était conforme à l'équation précédente (*).

Le processus physique de l'effet Compton peut être décrit de la façon suivante. Le photon incident est diffusé dans le milieu par un électron pratiquement libre. L'énergie du photon étant très supérieure à l'énergie de liaison de l'électron, on peut alors négliger cette dernière. Le photon diffusé dispose d'une énergie égale à celle de l'incident à laquelle il faut retrancher l'énergie cinétique de recul de l'électron. On a bien alors $\lambda_f > \lambda_i$. Que se passe-t-il si le photon est diffusé par l'un des électrons internes d'un atome. Disposant d'une énergie de liaison qui n'est plus négligeable devant celle du photon incident, cet électron peut ne pas être éjecté. La diffusion est alors causée par tout l'atome dont la masse est plusieurs milliers de fois supérieure à m_e . Il en sera de même de $\Delta \lambda$ et on aura pratiquement $\lambda_f \approx \lambda_i$. On observera ce phénomène dans le pic du spectre de même longueur d'onde que celle du photon incident.

Il restait, cependant, un point important à démontrer : la nature balistique de la collision. Pour cela il fallait prouver que l'électron de recul apparaissait **en même temps** que le photon, et dans une direction (a) définie de manière unique par la dynamique relativiste. Cette dernière

caractéristique a été démontré de façon convaincante par Cross et Ramsey en 1950, en utilisant des photons incidents ayant une énergie bien définie de 2,6 MeV.

L'expérience a bien sûr confirmé celle de Compton : l'angle entre la direction du photon diffusé et celle de l'électron incident avait la valeur théorique avec un excellent accord. Mais, de plus, la coïncidence temporelle entre les particules intervenant dans un processus de diffusion Compton a été établi comme étant plus faible que 10 ps. Bien que 10 ps ne soit pas particulièrement court à l'échelle de temps des processus atomiques, l'association étroite d'un électron à chaque photon diffusé est clairement démontré par ce résultat.

11. -CONCLUSION

Pour des questions de simplicité mathématique nous avons présenté les notions dynamiques relativistes en distinguant, d'une part, leurs trois composantes spatiales et, d'autre part, leur composante temporelle. Ecrivons complètement ces dernières ci-dessous en explicitant toutes composantes et écrivons les transformations de Lorentz pour les coordonnées d'un événement pour les comparer :

$$\left\{ \begin{array}{l} p'_x = \gamma(p_x - vE/c^2) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ E' = \gamma(E - vp_x) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{array} \right.$$

On constate que la première série d'équations ressemble fortement à celle exprimant les transformations de Lorentz pour l'espace et le temps. En considérant les composantes de la quantité de mouvement pour tenir un rôle analogue à celui des coordonnées de position, la comparaison avec les transformation de Lorentz montre que le terme E/c^2 est l'analogue de t . Nous pouvons alors écrire que les trois composantes du vecteur quantité de mouvement se transforment comme les trois composantes du vecteur position et l'énergie totale - qui est un scalaire - se transforme comme la coordonnée de temps.

Une conséquence immédiate en RR de la forme des transformations de Lorentz pour les coordonnées est l'invariance de l'intervalle d'espace-temps ds élevé au carré : $ds^2 = c^2t^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$. L'élément correspondant de notre comparaison est le terme $E^2 - c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ qui est invariant, comme on l'a déjà montré précédemment, et égal à l'énergie de repos E_0 au carré.

En mécanique newtonienne les transformations de Galilée nous disent que le temps est indépendant des coordonnées spatiales et de la vitesse relative des référentiels d'étude. De même, nous considérons que la quantité de mouvement et l'énergie d'un système sont des quantités essentiellement différentes bien que liées. Mais en relativité restreinte nous avons vu comment ces notions, que ce soient cinématiques ou

dynamiques, sont imbriquées. La détermination du temps s'écoulant dans un référentiel (**R'**) nécessite de connaître à la fois la position et l'heure dans un autre référentiel (**R**). De même la détermination de l'énergie du système dans (**R**) implique à la fois la connaissance de l'énergie et de la quantité de mouvement dans l'autre référentiel (**R'**).

Pour ces différentes raisons il est tout à fait approprié, pour améliorer notre description formelle des choses, de travailler dans une seule structure de dimension quatre plutôt que dans une structure spatiale tridimensionnelle prenant différents aspects à des moments différents. Dans le document consacré aux diagrammes d'espace-temps nous avons déjà utilisé cette unification dans la description des événements. Il est donc beaucoup efficace, aussi bien pour la cinématique que pour la dynamique, de travailler avec l'espace-temps de Minkowski de dimension 4. Mathématiquement c'est un espace affine pseudo-euclidien dont chaque point correspond à ce que l'on appelle un événement. On lui associe un espace vectoriel dans lequel sont définis des quadri-vecteurs appelés également 4-vecteurs. On aura ainsi une 4-vitesse, une 4-accélération, une 4-impulsion ... etc.

D'une manière générale toute grandeur dont les quatre composantes obéissent aux transformations de Lorentz²⁸ lorsqu'on change de référentiel pourra être associée à un 4-vecteur dans l'espace-temps de Minkowski. Ce dernier est également muni d'une métrique²⁹ particulière appelée « métrique de Minkowski » qui permet d'étendre la notion de distance à un espace quadri-dimensionnel en appliquant le théorème de Pythagore généralisé. Dans un espace tridimensionnel habituel associé à un repère orthonormé cette métrique prend la forme d'un intervalle élémentaire d'espace-temps séparant deux événements infiniment proches et que nous connaissons sous sa forme différentielle :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Cette façon de représenter le cadre relativiste de nos expériences est formellement performante et peut être très utile dans la manipulation des concepts physiques³⁰. Mais cela signifie alors une bonne maîtrise de l'algèbre matricielle et de l'analyse tensorielle. Il n'est cependant pas nécessaire, dans une première approche de la relativité restreinte, d'aller ici plus loin avec ces outils car ils ne sont pas indispensables et n'ajoutent rien à l'essentiel de la relativité. Cependant si l'on souhaite aborder sérieusement la relativité générale il devient obligatoire d'être à l'aise dans la manipulation de ces techniques mathématiques.

Pierre MAGNIEN
06 octobre 2015

²⁸ Remarquons que certaines grandeurs importantes ne peuvent pas être associées à un 4-vecteur. C'est le cas, par exemple, du champ électrique \vec{E} . Cependant les équations de Maxwell sont invariantes sous les transformations de Lorentz mais en faire la démonstration il est nécessaire de leur donner une forme tensorielle dans un espace-temps de Minkowski. Un tenseur est un objet mathématique plus complexe qu'un 4-vecteur.

²⁹ Un espace métrique est un ensemble dans lequel on peut définir la distance entre deux points.

³⁰ C'est le cas en particulier en électromagnétisme relativiste.

ANNEXE 1 : eV et unités dérivées

Si on place une charge électrique q dans un champ électrique uniforme \vec{E} elle sera accélérée et acquerra le long d'un chemin AB entre lesquels existe une différence de potentiel U une énergie cinétique $E_c = qU$. Si q est égale à $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C et $U = 1$ V la particule emmagasine alors une énergie cinétique $E_c = 1,6 \times 10^{-19}$ J. Cette quantité définit l'électron-volt (eV) comme nouvelle unité d'énergie. Donnons un exemple d'utilisation.

Le LHC accélère un faisceau de protons jusqu'à leur donner une énergie cinétique individuelle de 7 TeV³¹ (7×10^{12} eV). Chaque faisceau de protons contient 2808 paquets, chacun étant composé d'environ 10^{11} protons. L'énergie d'un faisceau est donc :

$$E_f = 7 \cdot 10^{12} \times 2808 \times 10^{11} \approx 20000 \times 10^{23} = 2 \cdot 10^{27} \text{ eV} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ J} = 300 \text{ MJ}$$

L'énergie totale de chaque faisceau est donc d'environ 300 MJ, ce qui correspond à l'énergie d'un train de 400 tonnes lancé à 150 km/h ! Une telle énergie suffirait à faire fondre environ 500 kg de cuivre. Mais le gigantisme de l'installation ne s'arrête pas là puisque l'énergie totale stockée dans les aimants du LHC est près de 30 fois plus élevée (11 GJ).

On a démontré dans ce qui précède plusieurs relations que l'on rappelle ici :

$$E = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 \Rightarrow \gamma \cdot m_0 = E/c^2$$

$$\vec{p} = \gamma m_0 \cdot \vec{v} \Rightarrow p = (\gamma\beta) \cdot m_0 \cdot c$$

La masse relativiste étant le rapport d'une énergie divisée par le carré de la vitesse de la lumière on pourra exprimer son unité, si l'énergie est exprimée en eV, en eV/c^2 . L'expression $p = \gamma m_0 v$ permet également d'affecter à la quantité de mouvement une unité basée sur l'eV. En effet, comme on peut le voir ci dessus, on peut écrire $p = (\gamma\beta) \cdot m_0 \cdot c$. Si m_0 est en MeV/c^2 alors p aura comme unité le MeV/c . L'invariant $E^2 - p^2 c^2$ pourra alors s'écrire $E^2 - p^2$ si on utilise les unités précédemment définies.

Remarque : Le joule étant mal adapté en microphysique, les unités pouvant être utilisées pour déterminer la valeur d'une énergie sont nombreuses et leur choix dépend en général du domaine concerné et de l'importance des énergies mises en jeu. On peut dresser le tableau suivant :

Formule	Unité d'énergie	Equivalence
USI	Joule (J)	[J] = M.L ² T ⁻²
$E = eU$	électron-volt (eV)	1 eV = $1,602 \cdot 10^{-19}$ J
$E = kT$	kelvin (K)	1 K = $1,381 \cdot 10^{-23}$ J
$E = h\nu$	hertz (Hz)	1 Hz = $6,625 \cdot 10^{-34}$ J

Il y en a d'autres mais moins utilisées : en effet à une énergie on peut également associer un nombre d'onde $E/(hc)$, une longueur d'onde (hc/E)

³¹ Une telle énergie correspond à plusieurs fois l'énergie cinétique d'un moustique en vol, ce qui, pour une particule 10 000 milliards de fois plus petite que l'insecte en question, est considérable !

ou une masse (E/c^2) exprimée en unité de masse atomique. Ces unités un peu particulières s'appuient sur des formules faisant intervenir des constantes³² fondamentales.

- e (charge électrique élémentaire) = $1,602 \cdot 10^{-19}$ C
- k (constante de Boltzmann) = $1,381 \cdot 10^{-23}$ J/K
- h (constante de Planck) = $6,663 \cdot 10^{-34}$ J.s
- c (vitesse de la lumière) = $2,997\,924\,580 \cdot 10^8$ m/s
- u_{ma} (unité de masse atomique) = $1,661 \cdot 10^{-27}$ kg

³² On les donne ici avec 4 chiffres significatifs mais on les connaît avec beaucoup plus. La vitesse de la lumière l'est avec une incertitude nulle puisque sa valeur est fixée par définition.

ANNEXE 2 : LES CHAMBRES A BULLES

1. -HISTORIQUE DES DETECTEURS PRECEDENTS LA CHAMBRE A BULLES

L'ancêtre de la chambre à bulles est la chambre à brouillard inventée par Charles Wilson en 1911³³. Son principe est simple : dans une enceinte close contenant un gaz saturé de vapeur et en équilibre avec un excès de liquide correspondant on effectue une brutale augmentation de volume rendant la vapeur sursaturante. En l'absence de poussières la condensation des gouttelettes de liquide débute sur les ions du gaz dont l'apparition est provoquée par le passage de particules électrisées. Si à ce moment précis on prend une photographie de la chambre on obtient un document sur lequel la trajectoire des particules l'ayant traversée est matérialisée par l'alignement des gouttelettes.

Les chambres de Wilson ont été utilisées d'une manière intensive pour l'étude des rayons cosmiques à partir de 1932 après qu'on les ait améliorées en commandant l'expansion du gaz à l'aide de l'impulsion fournie par un compteur Geiger Muller déclenché en coïncidence avec le phénomène que l'on voulait étudier.

2. -PRINCIPE DE LA CHAMBRE A BULLES

Le principe de la chambre à bulle est le même que celui de la chambre de Wilson mais travaille avec un liquide – souvent de l'hydrogène - dont la température est maintenue au voisinage de sa température d'ébullition. A l'instant où les particules pénètrent dans l'enceinte, un piston comprimant la vapeur surmontant le liquide, se relève, diminuant ainsi la pression. Le liquide se trouve alors dans un état surchauffé métastable que les particules chargées vont venir bousculer. Le long de la ligne suivie les atomes rencontrés vont être ionisés, créant des germes qui matérialisent les trajectoires. Elle a été inventée par Donald Glaser en 1952 qui, pour cela, a obtenu le Prix Nobel de physique en 1960.

Pour obtenir les caractéristiques des particules ayant laissé des traces dans le liquide on place la chambre dans un champ magnétique uniforme. La détermination de la quantité de mouvement des particules chargées s'appuie sur le fait que la trajectoire d'une particule de charge q placée dans un champ magnétique homogène \vec{B} est un cercle, dont le rayon R est proportionnel à la composante de l'impulsion \vec{p}_\perp perpendiculaire à \vec{B} : on peut écrire :

$$p_\perp = q.B.R$$

Pour $|q| = e$ nous avons :

$$p_\perp = e.B.R$$

Si p est exprimé en eV/c , nous multiplions l'expression précédente par c/e et obtenons :

$$p_\perp = c.B.R = c.B.R = 3.10^8 .B.R$$

³³ On trouvera des compléments d'informations à l'adresse http://fr.wikipedia.org/wiki/Chambre_à_brouillard

avec B en tesla et R en mètre. Pour p exprimé en MeV/c la relation devient :

$$p_{\perp} = 300.B.R$$

Mesurant R on peut alors remonter à la quantité de mouvement de la particule.

Les chambres à bulles ont été utilisées jusqu'à la fin des années 1980 et une des plus « célèbres » d'entre elles est Gargamelle, installée au CERN.



GARGAMELLE

Elle a été construite³⁴ pour détecter les neutrinos et mesurait 4,8 mètres de longueur pour 2 mètres de diamètre. Elle pesait 1000 tonnes et contenait environ 12 m³ de liquide dense, le fréon (CF₃Br).

Alimentée tout d'abord par un faisceau de neutrinos muoniques fournis par le Synchrotron à Protons (PS) du CERN entre 1970 et 1976, elle fut ensuite déplacée auprès du Super Synchrotron à Protons (SSP) qui l'alimenta en faisceaux de neutrinos jusqu'en 1979.

Comme les neutrinos ne sont pas chargés, ils ne laissent aucune trace dans les détecteurs. Le fréon utilisé dans Gargamelle permettait d'observer toutes les particules chargées interagissant avec les neutrinos et mettait donc indirectement en évidence les propriétés de ces derniers. L'utilisation du fréon, au lieu de celle plus fréquente de l'hydrogène liquide, augmentait la probabilité de détecter des interactions avec les neutrinos. Gargamelle a participé à plusieurs expériences importantes : mise en évidence expérimentale des quarks et confirmation de la théorie prévoyant l'existence des courants neutres. Sur ce dernier point on cherchait la confirmation de la description théorique de l'interaction faible dans un formalisme semblable à celui de l'interaction électromagnétique ou de l'interaction forte. Pour cela il était nécessaire d'introduire théoriquement un troisième boson vecteur massif de charge électrique nulle et porteur de cette interaction³⁵ : le Z⁰. C'est la mise en évidence de cette particule avec la chambre à bulle Gargamelle qui fut réalisée en 1973.

L'enveloppe externe de la chambre a été installée dans le jardin du *Microcosm* au CERN après son arrêt en 1989 du fait de l'apparition de fissures dans l'enveloppe.

Aujourd'hui ce matériel est obsolète mais les clichés réalisés et toujours disponibles permettent de travailler facilement avec des élèves de lycée.

³⁴ Son étude a été menée à Saclay par A. Lagarrigue, auteur d'une réforme ambitieuse des programmes de sciences physiques au lycée aux débuts des années 1970.

³⁵ Les deux autres bosons vecteur, le W⁺ et le W⁻, ont été découverts au CERN en 1984

3. –COMPARAISON AVEC D'AUTRES DETECTEURS

Bien qu'aujourd'hui les chambres à bulles aient été abandonnées au profit de détecteurs numériques beaucoup plus performants il est intéressant de les comparer aux autres dispositifs disponibles dans le dernier quart du XX^e siècle. Pour cela on peut les classer dans un tableau, comme le fait, en 1973, Georges Charpak dans un article³⁶ :

Détecteurs visuels	Résolution spatiale	Résolution temporelle	Fréquence de répétition	Observations
Chambres à brouillard à détente	0,3 mm	1/10 s	1/mn	Milieu gazeux
à diffusion	0,3 mm	∞	continu	Milieu gazeux
Emulsions photographiques	1 μ m	∞	continu	Milieu d'interaction imposé par l'émulsion. Peut accepter un faible pourcentage de charges additionnelles
Chambres à bulles	70 μ m à 1 mm	1 ms	1/s	Le milieu d'interaction peut être choisi à volonté de l'hydrogène aux liquides lourds
Chambres à étincelles	0,2 mm à 1 mm	1 μ s	10/s	La précision dépend de l'angle d'incidence
Hodoscopes à tubes de verre	1 cm	1 μ s	10/s	De récents développements utilisent des tubes de plastique flexibles
Chambres à streamers	0,2 mm à 1 mm	1 μ s	10/s	
Détecteurs digitaux				
Compteurs Geiger	1 cm	1 μ s	10 ⁴ /s	La résolution spatiale est égale à la taille du détecteur
Compteurs proportionnels	1 cm	1 μ s	10 ⁵ /s	
Compteurs à scintillations		1 ns	10 ⁷ /s	
Chambres à étincelles automatiques	0,2 mm	1 μ s	100/s	La précision dépend de l'angle d'incidence
Chambres proportionnelles	0,2 mm	20 ns	10 ⁶ /s/cm ²	Adapté à des détecteurs de très grande surface
Chambres à dérive	0,05 mm à 0,5 mm	5 ns	10 ⁶ /s/cm ²	

En s'appuyant sur ce tableau, il écrit également dans cet article :

« La chambre à bulles s'est imposée en raison des qualités suivantes :

On peut la remplir de n'importe quel liquide. Cette propriété capitale a permis de développer les chambres géantes à hydrogène liquide. Sur le plan de l'art de l'ingénieur, ce n'est pas sans orgueil que les physiciens de cette branche peuvent contempler ces monstres contenant plusieurs mètres cubes d'hydrogène liquide et dont la détente contrôlée permet de mesurer des trajectoires avec cette précision assez extraordinaire : une centaine de microns.

On peut examiner tous les détails d'une interaction autour du point de production. La longueur de radiation (10m) est suffisamment grande pour que la plupart des traces produites soient peu perturbées dans leur trajectoire et puissent donc être mesurées avec précision. La chambre est en général déclenchée toutes les secondes. Elle est sensible pendant 1 ms environ. On prépare les faisceaux pour que la chambre reçoive pendant son temps de sensibilité la quantité maximum de particules qu'on peut examiner sur un cliché : vingt traces.

Un défaut majeur de la chambre, qui sera peut-être la raison de sa disparition, est qu'elle n'a pas de mémoire, contrairement à la chambre de Wilson par exemple. On ne peut pas la déclencher sur un phénomène sélectionné d'avance par des compteurs. Elle est donc limitée uniquement aux phénomènes dont la probabilité de production n'est pas trop petite pour qu'ils soient vus dans une

³⁶ JOURNAL DE PHYSIQUE Colloque C10, supplément au no 11-12, T34, Nov.-Déc. 1973, page C10-73

expérience typique de chambre à bulles : 1 million de clichés avec vingt traces ayant une longueur de 1 m environ, soit 60 événements pour une section efficace de $1 \mu\text{b}^{37}$. »

Ce texte montre bien l'évolution en marche des détecteurs de particules à cette époque et donne déjà les raisons de la disparition des chambres à bulles au profit de dispositifs plus performants et plus souples d'emploi.

3. - EXPLOITATION DE CLICHES DE CHAMBRE A BULLES

Le programme de physique mis en oeuvre entre 1980 et 1993 - suite aux travaux de la commission Lagarrigue - abordait l'étude des collisions élastiques et inélastiques des particule élémentaires en s'appuyant sur des clichés réalisés dans des chambres à bulles. Le BUP a publié plusieurs études sur le sujet et la suite de ce paragraphe s'appuie essentiellement sur le travail³⁸ remarquable de Christophe Lagoute, disponible dans un article du BUP n° 929 (12/2010), page 1201 et suivante. Le logiciel développé par l'auteur peut ainsi :

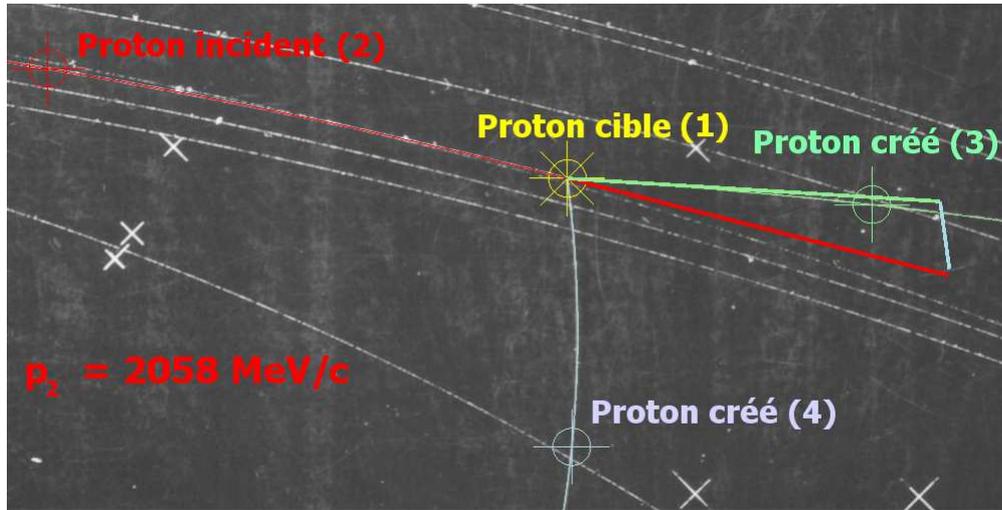
- charger un cliché de collisions : par exemple dans notre première étude un proton au repos diffuse un autre proton dont la quantité de mouvement est connue.
- Tracer les trajectoires de toutes les particules participant à l'événement étudié et en déterminer automatiquement les rayons de courbure
- Tracer les vecteurs quantité de mouvement de ces particules pour vérifier sa conservation et découvrir éventuellement l'existence d'un particule produit neutre n'ayant pas laissé de trace sur le cliché.
- Récapituler dans un tableau toutes les caractéristiques de la collision après avoir choisi les particules en interaction :
 - o Rayon de courbure de chaque trace
 - o Charge électrique, baryonique et leptonique de chaque particule
 - o Quantité de mouvement
 - o Masse au repos
 - o Energie cinétique
 - o Energie totale

Mettons en oeuvre ces étapes sur le cliché³⁹ suivant correspondant à la diffusion d'un proton incident par un proton cible au repos du liquide contenu dans la chambre.

³⁷ Le barn (symbole b) est une unité du SI employée en physique subatomique pour exprimer les sections efficaces. Sa valeur est de 10^{-28} m^2 .

³⁸ On trouvera sur la page Internet de M. Lagoute <http://ch.lagoute.free.fr/> des documents ainsi qu'un logiciel libre d'utilisation appelé « collisions.exe » permettant d'exploiter pleinement les clichés fournis.

³⁹ Sur les clichés disponibles ici le champ magnétique est perpendiculaire au plan de la plaque photographique ; les trajectoires des particules sont donc entièrement dans ce plan.



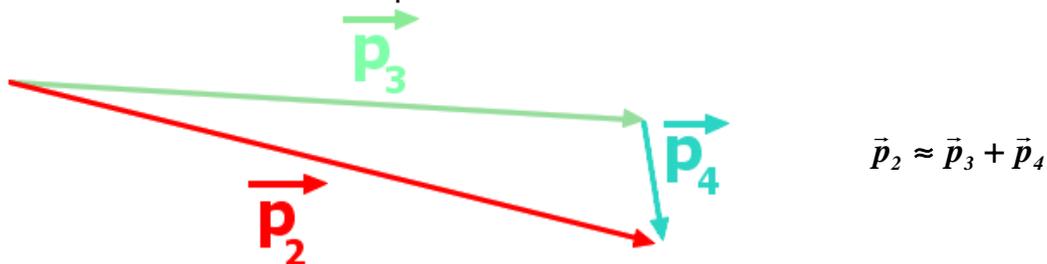
Les résultats de ce travail préalable est alors disponible dans un tableau de synthèse, comme on peut le voir ci dessous :

Particule	Type de particule	Q	B	L	R	P	M	Ek	E	Quantité de mouvement de la particule incidente
Incidente	Proton	1	1	0	8602,2	2058	938,25	1323,5	2261,8	2058 MeV
Cible	Proton	1	1	0	0	0	938,25	0	938,25	Rapport P/(QR) en MeV/(c.Q.pixel)
		2	2	0		2058		1323,5	3200	
Produite 3	Proton	1	1	0	8165,5	1953,5	938,25	1228,9	2167,2	
Produite 4	Proton	1	1	0	1502,2	359,39	938,25	66,477	1004,7	
Complémentaire										
		2	2	0		2054,5		1295,4	3171,9	

Le module des quantités de mouvement est calculé à partir de la détermination – réalisée par le logiciel - des rayons de courbures (ici notés R et exprimés en pixels). Nous savons que la particule incidente à une impulsion p_2 de 2058 MeV/c. Or nous avons montré précédemment que $p = 300.R.B = \alpha.R$, ce qui nous permet de déterminer la constante α noté, dans le tableau, « Rapport P/(QR) » :

$$p_2 = k.R_2 \Rightarrow k = p_2 / R_2 = 2058 / 8602,2 = 0,2392$$

On peut alors calculer p_3 et p_4 , comme indiqué dans le tableau. Ayant tracé sur le cliché les tangentes aux trajectoires au point de collision on peut donc déterminer le triangle des vecteurs de quantité de mouvement pour vérifier la conservation de cette dernière sans avoir à introduire une particule neutre supplémentaire invisible sur le cliché. On a ci dessous une reprise de ce triangle qui est tracé sur le cliché par le logiciel « collisions.exe » comme on peut le voir sur le cliché ci-dessus.



On peut conduire, grâce au logiciel, une étude énergétique pour vérifier que nous avons bien affaire à une collision élastique⁴⁰. On voit dans le tableau les colonnes E_k (énergie cinétique relativiste) et E (énergie totale). Le calcul de ces quantités s'appuie sur la relation $E^2 = E_0^2 + p^2$, E_0 étant l'énergie de repos⁴¹ qui vaut $938,25 \text{ MeV}/c^2$ pour un proton et la relation $E_k = E - E_0$.

Pour le proton incident cela nous donne, comme indiqué dans le tableau :

$$E_2 = \sqrt{2058^2 + 938,25^2} = 2261,8 \text{ MeV}$$

Après calcul de la même façon de E_3 et E_4 nous sommes les énergies avant puis après la collision pour obtenir :

$$E_{ini} = E_1 + E_2 = 2261,8 + 938,25 = 3200 \text{ MeV}$$

$$E_{fin} = E_3 + E_4 = 2167,2 + 1004,7 = 3171,9 \text{ MeV}$$

L'écart est faible ($\Delta E = 28,1 \text{ MeV}$, $\Delta E/E = 1/100$) et aux erreurs expérimentales près on obtient $E_{ini} \approx E_{fin}$. Ceci confirme bien que nous avons ici une collision élastique.

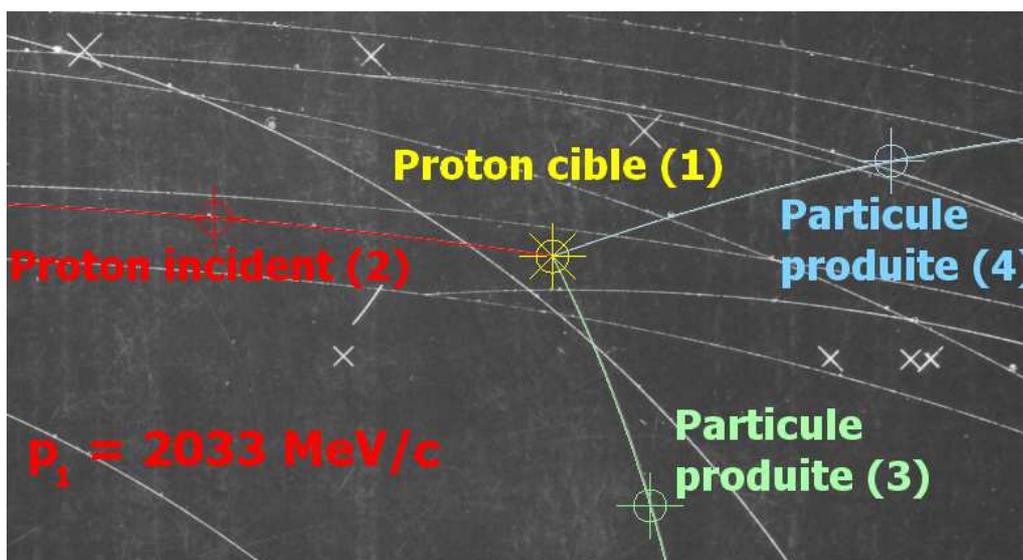
En mécanique classique, où $E_k = p^2/2m$ avec $m = 938,25 \text{ MeV}$ et pas d'énergie de repos, on obtient pour E_{ini} et E_{fin} :

$$E_{ini} = E_1 + E_2 = 0 + 2257,1 = 2257,1 \text{ MeV}$$

$$E_{fin} = E_3 + E_4 = 2033,7 + 68,8 = 2102,5 \text{ MeV}$$

Ici l'écart est nettement plus important ($\Delta E = 154,6 \text{ MeV}$, $\Delta E/E = 7/100$) et on ne peut plus écrire $E_{ini} \approx E_{fin}$, ce qui infirme la mécanique classique.

Considérons un autre événement dont l'étude oblige à introduire une troisième particule produite.



⁴⁰ Les particules produites étant de même nature et en même quantité que celles qui interagissent, la collision ne peut être qu'élastique.

⁴¹ C'est aussi celle du proton cible (1) qui est initialement au repos. Donc $E_1 = E_0$

La première étape consiste bien entendu à identifier les particules produites (3) et (4). Elles sont chargées positivement⁴² et nous pouvons envisager en premier lieu que ce sont également des protons. Le tableau correspondant à ce choix est alors le suivant :

Particule	Type de particule	Q	B	L	R	P	M	Ek	E	Quantité de mouvement de la particule incidente
Incidente	Proton	1	1	0	8645,2	2033	938,25	1300,8	2239,1	2033 MeV
Cible	Proton	1	1	0	0	0	938,25	0	938,25	Rapport P/(QR) en MeV/(c.Q.pixel) 0,2351601
		2	2	0		2033		1300,8	3177,3	
Produite 3	Proton	1	1	0	2217,7	521,52	938,25	135,2	1073,5	
Produite 4	Proton	1	1	0	3626,1	852,72	938,25	329,6	1267,8	
Complémentaire										
		2	2	0		1051,3		464,8	2341,3	

Le bilan énergétique qui devrait être équilibré (interaction élastique pour le choix réalisé) ne l'est pas. Cette piste n'est donc pas la bonne. On doit alors se diriger vers une collision inélastique avec une deuxième particule produite positive mais différente du proton et une troisième particule neutre invisible sur le cliché. Il faut, de plus, respecter les lois de conservation⁴³ de la charge baryonique B et de la charge leptonique L affichées dans le tableau : la somme des charges doit être conservée avant et après la collision. On fait alors plusieurs essais en respectant tout d'abord cette nécessité sur les charges électriques.

Choisissons, par exemple, un positon et un neutrino.

Particule	Type de particule	Q	B	L	R	P	M	Ek	E	Quantité de mouvement de la particule incidente
Incidente	Proton	1	1	0	8645,2	2033	938,25	1300,8	2239,1	2033 MeV
Cible	Proton	1	1	0	0	0	938,25	0	938,25	Rapport P/(QR) en MeV/(c.Q.pixel) 0,2351601
		2	2	0		2033		1300,8	3177,3	
Produite 3	Proton	1	1	0	2217,7	521,52	938,25	135,2	1073,5	
Produite 4	Positron	1	0	-1	3626,1	852,72	0,511	852,21	852,72	
Complémentaire	Neutrino	0	0	1	0	982,39	0	982,39	982,39	
		2	1	0		2033		1969,8	2908,6	

Comme le logiciel s'appuie sur la conservation de la quantité de mouvement pour déterminer celle de la particule neutre invisible, le calcul fait est « rigoureusement » exact (2033 MeV/c avant et 2033 MeV/c après). Mais il en découle une forte approximation sur le calcul de l'énergie totale, les incertitudes expérimentales étant entièrement reportées sur cette dernière . Cependant le rejet de ce choix ne s'appuie pas sur cette différence (elle fait tout de même 268,7 MeV !) mais sur la constatation qu'il n'y a pas conservation de la charge baryonique.

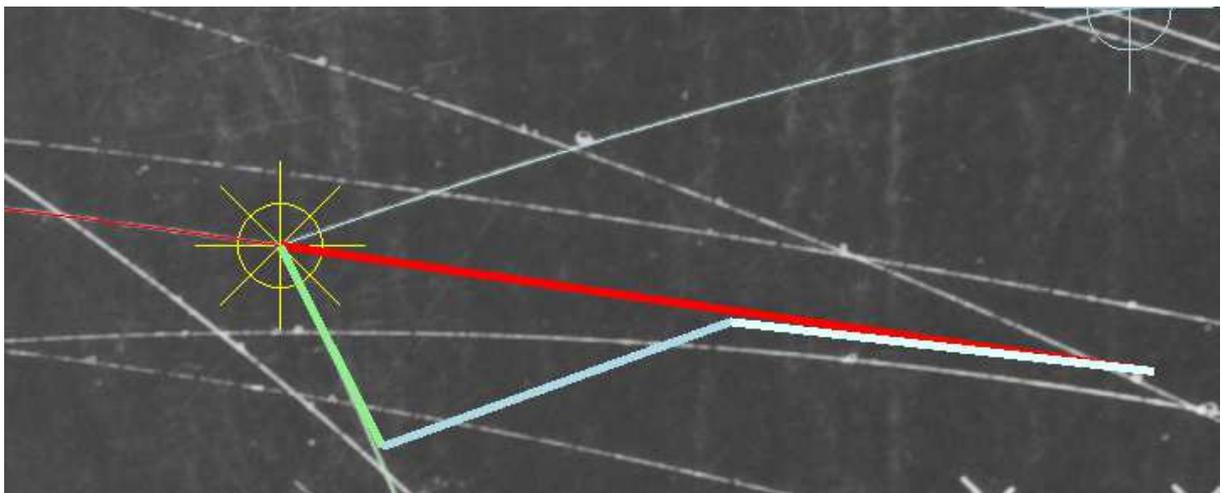
⁴² La courbure de leurs trajectoires est dans le même sens que celle de la particule (1).

⁴³ Les concepts de charges baryonique et leptonique sont purement quantiques.

Faisons un dernier essai en prenant pour particule (4) un pion π^+ et pour particule neutre un neutron. On obtient alors un nouveau tableau visible ci dessous.

Particule	Type de particule	Q	B	L	R	P	M	Ek	E	Quantité de mouvement de la particule incidente
Incidente	Proton	1	1	0	8645,2	2033	938,25	1300,8	2239,1	2033 MeV
Cible	Proton	1	1	0	0	0	938,25	0	938,25	Rapport P/(QR) en MeV/(c.Q.pixel) 0,2351601
		2	2	0		2033		1300,8	3177,3	
Produite 3	Proton	1	1	0	2217,7	521,52	938,25	135,2	1073,5	
Produite 4	Pion+	1	0	0	3626,1	852,72	139,6	724,47	864,07	
Complémentaire	Neutron	0	1	0	0	982,39	939,55	419,8	1359,4	
		2	2	0		2033		1279,5	3296,9	

On observe que toutes les lois de conservation retenues sont respectées mais avec une certaine approximation pour l'énergie. Le diagramme des quantités de mouvement relativiste est également disponible (celle du neutron, \vec{p}_5 , est tracée en blanc) :



Cependant, ici l'égalité $\vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \vec{p}_5$ est posée à priori et est utilisée pour la construction et la détermination de \vec{p}_5 qui est alors déduit de $\vec{p}_5 = \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4$, les quantités de mouvement du membre de droite étant déterminées expérimentalement à partir de la mesure du rayon de courbure des trajectoires correspondantes. Or cette détermination se fait avec une précision de l'ordre de 2%. On pourrait donc construire d'autres triangles tout aussi valables. Cette dispersion a bien entendu une influence sur le calcul des énergies et la qualité de la vérification de la loi de conservation correspondante.