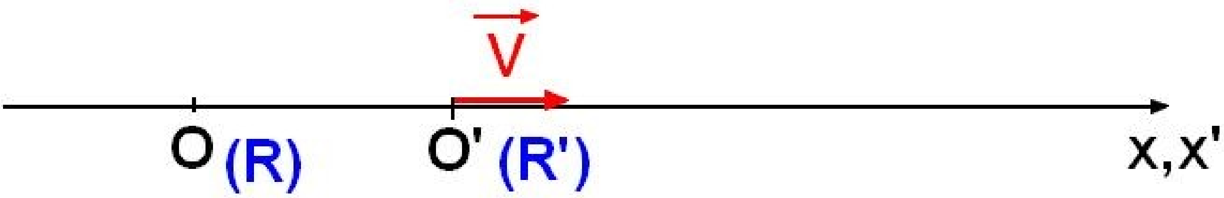
THEORIE DE LA RELATIVITE RESTREINTE : METHODE DU FACTEUR k

1. Introduction

Introduite par **Hermann Bondi**[1] (1919 / 2005) en 1964 dans son ouvrage « *Relativity and Common Sense* »[2] la méthode a pour objectif de faciliter la compréhension des phénomènes de dilatation du temps, de contraction des longueurs, de relativité de la simultanéité, sans introduire d'emblée la transformation de Lorentz. Cette dernière peut cependant être retrouvée à partir des calculs précédents.

L'intérêt de cette méthode réside également dans l'obtention des conséquences cinématiques fondamentales de la relativité restreinte sans introduire explicitement des systèmes complets de coordonnées. La principale simplification faite dans cette méthode est la suivante : on ne considère que des événements se produisant sur les axes, portés par la même



droite, Ox du repère **(R)** et O'x' du repère **(R')**, ce dernier étant en mouvement avec la vitesse **V** par rapport au premier ; on ne traite donc que des problèmes unidimensionnels.

Tous les raisonnements sont conduits à partir d'expériences de pensée consistant en échanges de signaux lumineux, c'est-à-dire avec émission, réflexion et réception d'impulsions lumineuses. Les différentes mesures de temps réalisées par les observateurs **(A)** et **(A')** sur leur propre horloge H_A et $H_{A'}$, respectivement au repos dans les repères **(R)** et **(R')**, nous permettront d'obtenir les conséquences cinématiques importantes de la relativité restreinte. Pour simplifier les calculs nous considérerons que H_A et $H_{A'}$ seront mises à 0 par chaque observateur à l'instant où les origines O et O' de **(R)** et **(R')** coïncident.

2. Éléments de base de la méthode

On s'appuiera dans la suite du texte sur les deux postulats de base d'Albert Einstein qui s'appliquent aux phénomènes physiques étudiés dans des référentiels inertiels ou galiléens. Un référentiel inertiel est un référentiel dans lequel tout objet sur lequel ne s'exerce aucune force est en mouvement de translation rectiligne uniforme. Ces deux postulats sont :

• **(P_1)** : Les lois de la physique ont la même forme dans tous les référentiels inertiels (principe de relativité).

---

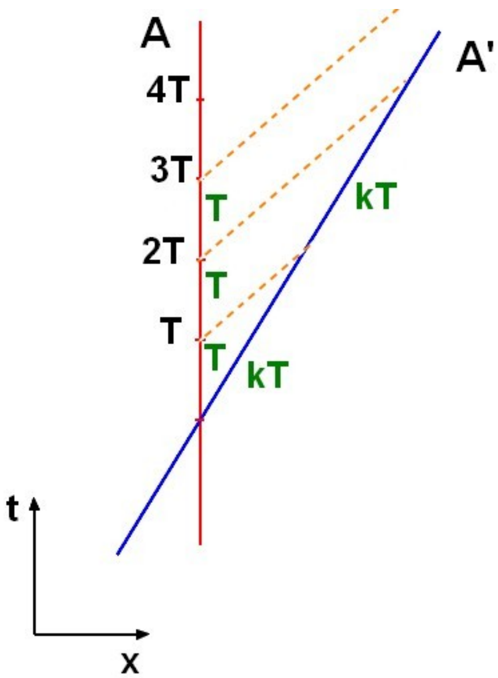
[1] Mathématicien et cosmologiste d'origine autrichienne, il a été naturalisé britannique en 1946. Avant la confirmation expérimentale de la théorie du Big Bang, il avait développé avec Fred Hoyle et Thomas Gold la théorie, aujourd'hui abandonnée, de l'univers stationnaire. Il a aussi contribué de façon significative au développement de la relativité générale.

[2] Disponible en version anglaise chez Dover Publications (1980) – Numéro ISBN : 978-0486240213

•**(P_2)** : La vitesse de propagation de la lumière dans le vide est la même dans tout référentiel inertiel. Elle est donc indépendante du mouvement de la source.

Le point de départ de la méthode est l'effet Doppler, d'après lequel la fréquence de la lumière captée par le récepteur est fonction du mouvement relatif de ce dernier par rapport à la source lumineuse. Ce mouvement s'effectue le long de la ligne commune Ox, O'x' et détermine ainsi l'effet Doppler longitudinal connu depuis le milieu du XIX^e siècle.

La variation de la fréquence détectée dans le repère **(R')** par rapport à celle mesurée dans **(R)**, dans lequel la source lumineuse est au repos, implique les raisonnements suivants : si depuis un point quelconque du référentiel lié à **(R)** un radar immobile émet des impulsions de courte durée et de période **T**, l'observateur lié au repère **(R')**, qui, supposons le, s'éloigne du radar à vitesse constante **V**, trouvera que l'intervalle de temps entre les signaux reçus sera différent bien que les horloges au repos dans chacun des deux repères soient identiques.



Pour simplifier, on parlera, au lieu de radar et de récepteur, de deux observateurs **(A)** et **(A')** immobiles respectivement dans **(R)** et **(R')**. Ainsi, lorsque l'observateur **(A)** enverra des signaux lumineux avec une période **T**, l'observateur **(A')** les recevra avec une période différente **T'** que nous exprimerons par rapport à **T** selon l'expression **T' = k.T**. Il apparaît ainsi le facteur **k** qui est à la base de la méthode étudiée. Soulignons que l'intervalle **T** est mesuré entre l'envoi du premier et du second signal par l'horloge de l'observateur **(A)** au repos dans **(R)** et que l'intervalle **k.T** est mesuré entre la réception du premier et du second signal par l'horloge de l'observateur **(A')** au repos dans **(R')**.

Les propriétés fondamentales d'homogénéité et d'isotropie de l'espace et du temps permettent d'admettre que le facteur **k** ne dépend ni des coordonnées de la source ou du récepteur, ni de l'instant de l'émission et de la réception du signal, ni de la direction de propagation des signaux électromagnétiques. En d'autres termes, la direction dans l'espace de l'axe commun xx' peut être choisie d'une manière totalement arbitraire. Ce coefficient **k** ne dépend pas non plus de l'intervalle de temps séparant des signaux émis successivement. Il ne dépend que de la vitesse relative **V** des observateurs **(A)** et **(A')**. En effet, comme on le sait déjà en mécanique classique, la variation de la fréquence de l'onde lumineuse due à l'effet Doppler ne dépend que de la vitesse du mouvement relatif[3]. Il faudrait donc écrire **k(V)**.

Il est également important de remarquer que **(A)**, que l'on considère ici au repos, ne jouit d'aucune propriété particulière : si **(A')** envoie tous

[3] En toute rigueur ceci n'est vrai, en mécanique classique, que si $V << c$ puisqu'on y considère que la lumière a besoin d'un milieu pour se propager.

les **T** secondes une impulsion lumineuse en direction de **(A)**, ce dernier les recevra tous les **kT** secondes. Il y a une symétrie parfaite entre les deux observateurs et la relation entre la période d'émission et celle de réception pour les deux observateurs est la même.

Prenons un exemple pour illustrer comment sont conduits les calculs intervenant dans cette méthode du coefficient **k**. Supposons que l'observateur **(A)** se trouve à l'origine du référentiel **(R)** et envoie des signaux lumineux vers l'observateur **(A')** situé à l'origine du repère **(R')**. Rappelons que le système **(R')** s'éloigne du repère **(R)**. Admettons que le premier signal soit envoyé par **(A)** à l'instant t_A, mesuré par H_A. Il n'est alors pas difficile de déterminer l'instant t_{1A} de la réception de ce signal par l'observateur **(A')**, toujours d'après l'horloge H_A de **(A)**. En effet le signal, cheminant à la célérité c, doit parcourir, au bout du temps t_{1A} :

•premièrement, le chemin $V.t_A$ qui séparait les observateurs **(A)** et **(A')** à l'instant t_A

•deuxièmement, la distance supplémentaire $\mathbf{V.(t_{1A} - t_A)}$ que parcourra l'observateur **(A')** entre t_A et t_{1A} tel que :

$$c.(t_{1A} - t_A) = V.t_A + V.(t_{1A} - t_A),$$

d'où :

$$\boxed{t_{1A} = c.t_A / (c - V)}$$

Le second signal est émis à l'instant **(t_A + T)** et il parviendra à **(A')**, selon l'horloge H_A, en t_{2A}, qui s'obtient à partir de la relation :

$$c.[t_{2A} - (t_A + T)] = V.(t_A + T) + V.[t_{2A} - (t_A + T)]$$

D'où :

$$\boxed{t_{2A} = c.(t + T) / (c - V)}$$

Formons la différence $\Delta t_A = (t_{2A} - t_{1A})$:

$$\boxed{\Delta t_A = (t_{2A} - t_{1A}) = c.T / (c - V)}$$

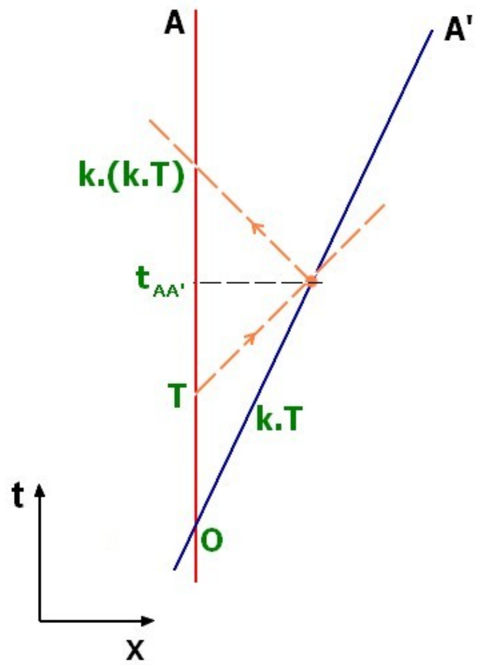
Elle représente l'intervalle de temps, mesuré par l'horloge H_A, entre les réceptions des signaux successifs par l'observateur **(A')**. Cependant, ce n'est pas l'expression pour **k**. Ce coefficient ne peut être connu qu'après avoir déterminé l'intervalle de temps séparant deux réceptions successives des signaux par l'observateur **(A')**, d'après son horloge $H_{A'}$. Il est donc très important de bien distinguer ce qui est déterminé par les horloges de l'observateur **(A)** de ce que fournissent celles qui accompagnent le mouvement de **(A')**.

3. Calcul du facteur k en fonction de V

Jusqu'ici nous nous sommes appuyés seulement sur l'homogénéité et l'isotropie de l'espace-temps. Dès maintenant, on utilisera très souvent la constance de la vitesse de la lumière dans le vide dans tous les référentiels d'inertie. Cette hypothèse entraîne l'équivalence de tous les observateurs inertiels par rapport à la propagation de la lumière.

Nous avons admis que les signaux envoyés par l'observateur **(A)** avec une période **T** parviennent à l'observateur **(A')** avec la période **k.T**, mesurée, bien sûr, avec l'horloge de **(A')**. En vertu de l'équivalence des observateurs inertiels, nous devons adopter l'hypothèse complémentaire que les signaux émis par **(A')** avec la période **T'** arrivent en **(A)** avec la période **k.T'**. C'est bien le résultat de l'application du principe de relativité **(P_1)** aux deux observateurs inertiels **(A)** et **(A')**.

Cherchons maintenant l'expression explicite du facteur **k** en fonction de la vitesse du mouvement relatif. Nous n'aurons besoin que de quelques expériences de pensée liées à l'émission, à la réception et à la réflexion des signaux lumineux. La réflexion peut d'ailleurs s'interpréter comme l'émission du signal par l'observateur dans le sens inverse au moment même de la réception du signal direct.



Supposons que le premier signal soit émis par l'observateur **(A)** vers **(A')** à l'instant où les deux repères **(R)** et **(R')** coïncident. Les observateurs **(A)** et **(A')**, attachés chacun à son référentiel, se trouvent à cet instant en un même point. La transmission de ce signal de **(A)** à **(A')**, tout comme celle du signal inverse de **(A')** à **(A)**, ne prend aucun temps et permet d'initialiser les deux horloges à t = 0. Au bout de l'intervalle de temps **T**, mesuré sur son horloge H_A, **(A)** envoie vers l'observateur **(A')** un signal lumineux. **(A')** reçoit ensuite ce signal à l'instant **k.T** mesuré sur son horloge $H_{A'}$. Après avoir reçu le second signal, l'observateur **(A')** envoie immédiatement un signal lumineux vers **(A)** (il pourrait aussi bien se servir de la réflexion sur un miroir). D'après l'horloge de l'observateur **(A')**, deux signaux successifs sont séparés par l'intervalle de temps **k.T**. Les retours des signaux de **(A')** vers **(A)** seront donc séparés par le même intervalle de temps. Mais l'observateur **(A)** ne les recevra pas dans l'intervalle de temps **k.T** ; pour lui, l'intervalle sera **k** fois plus grand c'est à dire **k^2.T**. On peut alors en conclure que, d'après l'observateur **(A)**, la propagation du second signal, envoyé à l'instant **T**, vers l'observateur **(A')**, et celle de son retour prendront une durée égale à **(k^2.T – T) = (k^2 – 1).T**. La vitesse de la lumière étant égale à c dans les deux sens - principe de départ (P_2)-, le temps mis par la lumière pour parcourir la distance de **(A)** à **(A')** – ou du retour – est égal à **(1/2).(k^2 – 1).T**. On en déduit alors que la distance entre **(A)** et **(A')** (fixée à l'instant de la réflexion) que l'on vient de déterminer avec la méthode du « radar » est égale à :

$$\boxed{d_{AA'} = (1/2).(k^2 - 1).T.c}$$

Nous avons donc déterminé la distance entre les observateurs **(A)** et **(A')** à l'instant de la réflexion du signal en **(A')**. Mais à quel instant cette réflexion a t - elle eu lieu selon l'horloge de **(A)** ? Remarquons qu'il s'agit de l'horloge attachée à l'observateur **(A)** et que l'événement – la réflexion au point **(A')** – se produit en un point éloigné de **(A)**. Dans ce cas la mesure directe de l'instant de réalisation de l'événement n'est plus possible et l'on doit ***attribuer*** à ce dernier une certain valeur temporelle. Or, rappelons le, la vitesse de la lumière est la même dans les deux sens. Le second signal a été envoyé à l'instant **T** et son retour est fixé à l'instant $\mathbf{k^2.T}$. On en déduit que l'instant de réflexion vaut alors $\mathbf{(1/2).(T + k^2.T)}$. Donc :

$$\boxed{t_{AA'} = (1/2).(k^2 + 1).T}$$

Résumons : à la fin de l'intervalle de temps $\mathbf{(1/2).(k^2 + 1).T}$, mesuré sur l'horloge H_A, l'observateur **(A')** s'est éloigné de l'observateur **(A)** de la distance $\mathbf{(1/2).(k^2 - 1).T.}c$. Ceci entraîne que la vitesse relative **V** des deux observateurs est égale à :

$$V = \frac{d_{AA'}}{t_{AA'}} = \frac{(1/2).(k^2 - 1).T.c}{(1/2).(k^2 + 1).T}$$

Si on note $\beta = V/c$ on obtient :

$$\beta = \frac{V}{c} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \qquad (1)$$

D'où l'on tire :

$$k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad (2)$$

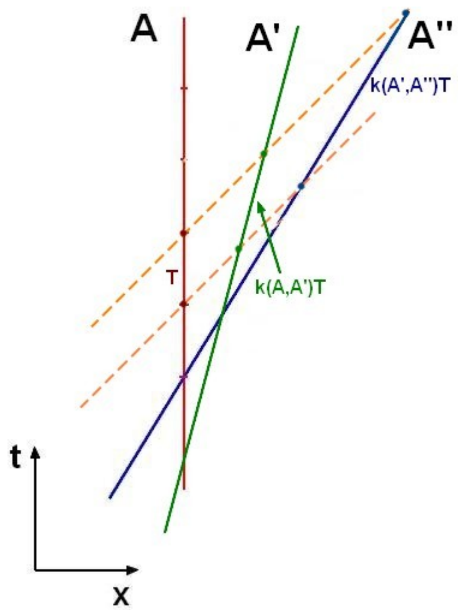
Si la vitesse relative **V** change de signe, le nombre **k** est remplacé par **1/k**, d'après la formule (2). Ainsi pour une même valeur absolue de la vitesse relative, à l'approche ou à l'éloignement de **(A)** et **(A')**, correspondent des valeurs inverses de **k**.

On peut dresser un tableau des différentes valeurs de **k** en fonction de celles de β et de **V** :

Grandeurs	Valeurs						
V	0	0,01c	0,1c	0,5c	0,9c	0,99c	0,999c
β	0	0,01	0,1	0,5	0,9	0,99	0,999
k	1	1,006	1,11	1,73	4,36	14,1	44,7

Remarquons que le facteur **k**, comme nous devions nous y attendre, représente bien l'effet Doppler – Fizeau en optique relativiste. En effet nous savons que l'expression de la fréquence ν, mesurée par un observateur **(A)** au repos, de la lumière émise par une source **(A')** en mouvement relatif est donnée par :

$$\nu = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.\nu' \qquad \text{Donc, comme } T = 1/\nu \qquad T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.T' = k.T'$$



Considérons maintenant le cas de trois repères **(R)**, **(R')** et **(R")** dont les origines respectives O, O' et O" sont occupées chacune par un observateur. Soit $\mathbf{k}_{(A,A')}$ le facteur caractérisant le couple d'observateurs **(A)** et **(A')**. Il ne dépend que de la vitesse relative **V** des repères **(R)** et **(R')**. Si la vitesse relative des repères **(R')** et **(R")** est **V'**, le facteur $\mathbf{k}_{(A',A'')}$ ne dépend que de **V'**. Peut-on trouver $\mathbf{k}_{(A,A'')}$ si $\mathbf{k}_{(A,A')}$ et $\mathbf{k}_{(A',A'')}$ sont connus ?

Supposons que l'observateur **(A)** envoie deux signaux lumineux séparés par l'intervalle de temps **T** mesuré à l'aide de sa propre horloge. L'observateur **(A')** les recevra séparés par l'intervalle $\mathbf{k}_{(A,A')}.\mathbf{T}$, comme on peut le déduire de la définition du facteur **k**. La détermination du temps s'effectue ici d'après les indications de l'horloge liée à **(A')**. L'observateur **(A")** est plus éloigné de **(A)** que **(A')** et les signaux, une fois **(A')** passé, se propagent vers **(A")**. Quand le premier signal de **(A)** arrive à l'observateur **(A')**, celui-ci, sans tarder, envoie lui-même un signal vers **(A")**. Les deux signaux – l'un émis directement par **(A)** et l'autre envoyé par **(A')** – se propagent maintenant ensemble vers **(A")** et forment en pratique un seul signal. L'observateur **(A')** effectue la même opération au moment de l'arrivée du second signal en provenance de **(A)**. De nouveau, il se propage de **(A')** vers **(A")** un signal « composite » formé de deux impulsions lumineuses : l'une envoyée par **(A)** et l'autre par **(A')**. **(A")** recevra donc deux signaux : d'une part, d'après son horloge, il trouvera pour l'intervalle de temps **T"** entre les arrivées de ces signaux l'expression suivante :

$$T''_1 = k_{(A,A'')}.T$$

D'autre part, les mêmes signaux envoyés par l'observateur **(A')** étaient séparés par l'intervalle de temps $\mathbf{k}_{(A,A')}.\mathbf{T}$. L'observateur **(A")** trouve que l'intervalle de temps entre les arrivées de ces signaux est alors égal à :

$$T''_2 = k_{(A',A'')}.k_{(A,A')}.T$$

Mais les signaux de **(A)** et de **(A')** ont voyagé ensemble et atteint **(A")** simultanément. On a alors :

$$\boxed{T''_1 = T''_2 \quad \rightarrow \quad k_{(A,A'')} = k_{(A,A')}.k_{(A',A'')}}$$

Le résultat obtenu est particulièrement simple. Si l'on connaît les facteurs **k** de deux couples de référentiels ayant un référentiel en commun, on peut déterminer le **k** inconnu des deux autres repères par simple produit des facteurs **k** connus.

On peut utiliser le calcul précédent pour retrouver la loi relativiste de composition des vitesses. Soit **V** la vitesse du repère **(R')** par rapport à **(R)** et **V'** celle de **(R")** par rapport à **(R')**. Quelle est la vitesse **W** de **(R")** par rapport à **(R)** ? Nous avons :

$$k_{(A,A')} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \text{ avec } \beta = \frac{V}{c}$$

$$k_{(A',A'')} = \sqrt{\frac{1+\beta'}{1-\beta'}} \text{ avec } \beta' = \frac{V'}{c}$$

$$k_{(A,A'')} = \sqrt{\frac{1+\beta''}{1-\beta''}} = k_{(A,A')}.k_{(A',A'')} \text{ avec } \beta'' = \frac{W}{c}$$

Tout calcul fait – un peu laborieux – on aboutit à :

$$\boxed{\beta'' = \frac{\beta+\beta'}{1+\beta.\beta'}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = \frac{V+V'}{1+\frac{V.V'}{c^2}}}$$

On a bien ici la formule relativiste de composition des vitesses.

4. Relativité de la simultanéité

Les raisonnements ci-dessus montrent clairement que les instants de réalisation des événements et les intervalles de temps entre ces derniers varient selon les observateurs. En effet,pour le vérifier, revenons à l'exemple étudié de l'échange des signaux lumineux entre les observateurs **(A)** et **(A')**. Rappelons que le premier échange des signaux se fait au moment où les observateurs se trouvent en un même point (origine des repères). Ce même instant correspond à la mise à zéro des horloges **(A)** et **(A')**. Ensuite **(A)** envoie un signal vers **(A')** à l'instant t = **T** d'après son horloge ; par définition, l'intervalle séparant les réceptions du premier et du second signal par l'observateur **(A')** est égal à **k.T**. Pourtant, l'observateur **(A)** ***attribuera*** à l'arrivée du signal en **(A')** l'instant **(1/2).(k^2 + 1).T**, mesuré sur son horloge. Donc, **(A)** est convaincu que les signaux séparés par l'intervalle de temps **T** arrivent en **(A')** avec un intervalle égal à **(1/2).(k^2 + 1).T**. On a déjà vu que d'après l'horloge de **(A')** le même intervalle est égal à **k.T.** Ainsi, les intervalles de temps séparant les mêmes événements – arrivée du premier et du second signal en **(A')** – sont différents : pour **(A')**, il est égal à **k.T** et à **(1/2).(k^2 + 1).T** pour **(A)**. On a donc trouvé, par conséquent, que l'instant de réalisation de l'événement « arrivée du second signal » est relatif, car il est égal à **k.T** pour **(A')** et à **(1/2).(k^2 + 1).T** pour **(A)**. L'intervalle de temps du couple d'événements diffère, lui aussi, pour **(A)** et **(A')**. Cela veut dire que l'instant de réalisation des événements et l'intervalle séparant ces événements sont des grandeurs relatives. On parlera ici de **<u>relativité de la simultanéité</u>**.

Ces quantités deviennent absolues dans le cas où l'on a :

$$k.T \approx (1/2).(k^2 + 1).T$$

Ceci est obtenu pour **k** ≈ 1 ou, comme on peut le déduire de l'expression (2), pour $\beta = V/c \rightarrow 0$, ce qui revient au même.

5. Notion de temps propre

La méthode du facteur **k** permet facilement d'établir la relation existant entre l'intervalle de temps d'un couple d'événements ayant lieu en un même point d'un repère (**temps propre**), et donc mesurés sur une même horloge, et l'intervalle de temps (**temps impropre**) du même couple d'événements mesuré par l'horloge d'un autre repère où les événements considérés se produisent en des points différents.

Revenons à l'échange de signaux lumineux avec réflexion. Si **(A)** émet des signaux séparés, d'après son horloge, par l'intervalle **T**, ils sont séparés par l'intervalle **k.T** d'après l'horloge de **(A')**. Nous avons déjà vu que du point de vue de **(A)**, cet intervalle est égal à $(1/2).(k^2 + 1).T$.

Le rapport entre ces deux grandeurs nous fournit justement la relation entre le temps propre $\Delta t_0 = k.T$ et le temps Δt mesuré par deux horloges d'un autre référentiel (la mesure par deux horloges est équivalente à l'attribution d'un instant à un événement éloigné de l'horloge d'une certaine distance). Ce rapport vaut :

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \frac{k.T}{\frac{1}{2}.(k^2 + 1).T} = \frac{2k}{k^2 + 1} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

où, dans la dernière expression, on se sert de la relation (1). L'intervalle de temps propre entre les événements est toujours minimal.

6. Contraction des longueurs

Soient deux points fixes dans le référentiel où l'observateur **(A')** est au repos. Supposons que ce soient les extrémités d'une règle. Admettons enfin que la règle s'éloigne de l'observateur **(A)** ; l'observateur **(A')** se trouve à l'extrémité la plus proche de **(A)**. N'oublions pas que la règle se déplace, dans le référentiel lié à **(A)**, dans la direction de la vitesse relative.

Pour mesurer la longueur de la règle, l'observateur **(A)** envoie un signal à l'instant t_1 (indiqué par son horloge) et attend le retour de ce signal après réflexion sur l'extrémité éloignée de la règle. Soit t_4 l'instant de cette arrivée, toujours sur l'horloge de **(A)**. L'instant de la réflexion est évidemment égal à $(1/2).(t_1 + t_4)$.

De façon analogue **(A)** envoie un signal vers l'extrémité proche à l'instant t_2 et on reçoit le retour à l'instant t_3. L'instant de réflexion du signal est évidemment égal à $(1/2).(t_2 + t_3)$. Pour que les deux réflexions soient simultanées selon l'horloge de **(A)** il est nécessaire que :

$$(1/2).(t_1 + t_4) = (1/2).(t_2 + t_3) \qquad (3)$$

Dans notre expérience de pensée cette égalité est assurée par un choix convenable des instants d'émission du premier et du second signal.
L'observateur **(A')**, situé sur l'extrémité proche de la règle, reçoit le premier signal de **(A)** à l'instant $\mathbf{k.t_1}$ (rappelons que les origines des temps de **(A)** et de **(A')** sont synchronisées lorsque les origines O et O' des deux repères **(R)** et **(R')** coïncident). Réfléchi sur l'extrémité éloignée de la règle, le signal qui arrive en **(A)** à l'instant t_4 est passé en **(A')** à l'instant $\mathbf{t' = t_4/k}$. En effet, le signal reçu par **(A')** à l'instant $\mathbf{t_4/k}$ atteindra **(A)** à l'instant $\mathbf{k.t' = k.(t_4/k) = t_4}$.

Du point de vue de l'observateur **(A')**, le double de la longueur l_0 de la règle est égale à l'intervalle de temps nécessaire à la lumière pour arriver à l'extrémité éloignée et revenir multiplié par la vitesse de la lumière c.
On a alors :

$$l_0 = \frac{1}{2}.(\frac{t_4}{k} - k.t_1).c \qquad (4)$$

La relation entre t_2 et t_3 découle de la définition du facteur **k** :

$$t_3 = k^2.t_2 \qquad (5)$$

La longueur de la règle mesurée par **(A)** est la différence des distances entre l'observateur **(A)** et les extrémités éloignée et proche de la règle, **<u>à condition que ces distances soient déterminées simultanément</u>**. L'égalité (3) assure cette condition. La distance entre **(A)** et l'extrémité éloignée de la règle est égale à $\mathbf{(1/2).(t_4 - t_1).c}$ et celle entre **(A)** et son extrémité proche vaut $\mathbf{(1/2).(t_3 - t_2).c}$. Donc, **(A)** attribue à la longueur l l'expression :

$$l = (1/2).[(t_4 - t_1) - (t_3 - t_2)].c \qquad (6)$$

Les expressions (4) à (6) vont nous permettre de trouver la relation entre l et l_0. La formule (3) donne $\mathbf{t_4 = t_2 + t_3 - t_1}$. En portant cette expression de t_4 dans le second membre de (4) et en utilisant (5), nous obtenons :

$$l_0 = \frac{1}{2}.(\frac{t_2 + t_3 - t_1}{k} - k.t_1).c$$

A partir de (5) nous pouvons remplacer t_3, puis réduire au même dénominateur et factoriser :

$$l_0 = \frac{c}{2}.\frac{(k^2 + 1)}{k}.(t_2 - t_1) \qquad (7)$$

Nous pouvons réorganiser la relation (6) :

$$l = (1/2).[(t_2 - t_1) + (t_4 - t_3)].c$$

Comme (3) nous donne ***$(t_2 - t_1) = (t_4 - t_3)$*** nous pouvons réécrire la relation précédente en y remplaçant $(t_4 - t_3)$ par $(t_2 - t_1)$:

$$l = (t_2 - t_1).c$$

En exprimant $(t_2 - t_1)$ à partir de la relation (7) nous obtenons :

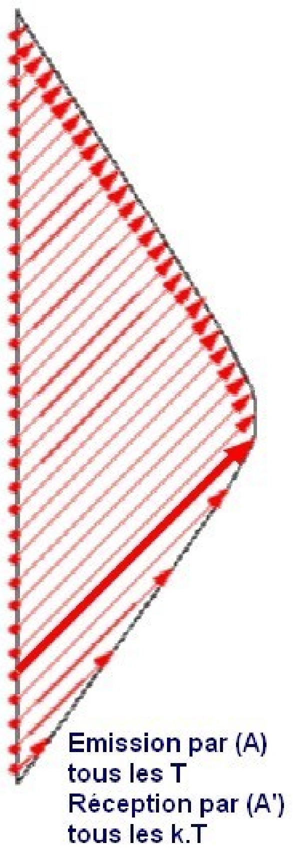
$$l = \frac{2.k}{(k^2 + 1)}.l_0$$

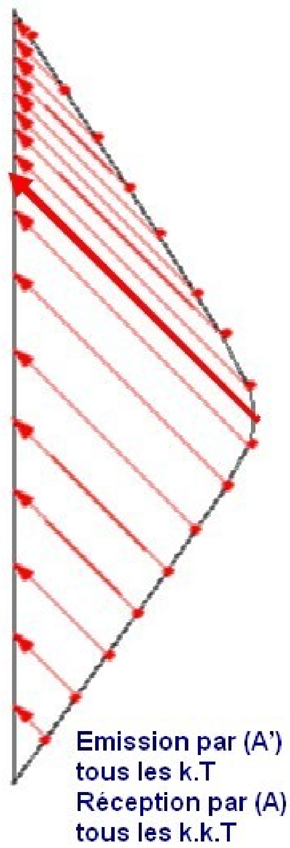
D'après la relation (2) nous obtenons l'expression bien connue :

$$\boxed{l = l_0.\sqrt{(1 - \beta^2)}}$$

7. Le voyageur de Langevin

Le « paradoxe »[4] du voyageur de Langevin a été développé, pour illustrer la relativité restreinte, par **Paul langevin** (1871 / 1946) en 1911 en s'appuyant sur un exemple déjà proposé par Albert Einstein.





Deux terriens[5] **(A)** et **(A')** se mettent d'accord pour organiser le voyage en fusée de **(A')** vers une étoile « lointaine » avec retour immédiat vers la Terre lorsque le but aura été atteint. La question est alors combien de temps aura duré le voyage pour **(A)** et pour **(A')** ? Sera t-il le même ou bien sera t-il différent ? La méthode du facteur **k** va nous permettre de répondre à la question. Pour nous y aider nous supposerons que pendant tout le périple, **(A)** devra envoyer des impulsions lumineuses en direction de **(A')** avec une période **T**. A la réception de chacun des signaux, **(A')** devra renvoyer à son tour des impulsions lumineuses de réponse.

[4] Le mot de paradoxe est en réalité excessif car, en relativité restreinte, la conclusion obtenue est tout à faite cohérente avec la réalité, que l'on peut d'ailleurs vérifier avec les « voyageurs de Langevin » naturels que sont les muons. Le paradoxe fait référence ici à une « forme » de violence faite au sens commun. Le paradoxe apparaît quand on se demande ce que pense le voyageur de la fusée. Ce dernier voit la personne restée sur Terre vieillir moins vite que lui, et, en revenant sur Terre, il pense que son ami resté au sol doit être le plus jeune.

[5] On considère quelquefois des jumeaux, ce qui fait bien apparaître le fait qu'au départ on dispose de deux « horloges » identiques et synchronisées.

Pour illustrer cette expérience de pensée on considérera que l'étoile « lointaine » est située à 4 A.L.[6] et que la fusée se déplace, par rapport à la Terre, à la vitesse de 0,90c. On a alors β = 0,90 et le facteur **k** a une valeur de 4,36.

D'après ce qui précède, si l'intervalle entre deux envois successifs de **(A)** est **T**, l'intervalle entre les réceptions – et les reémissions – par **(A')** sont **k.T**. Ces derniers signaux seront alors reçus par **(A)** avec un intervalle **k.(k.T)** c'est à dire de $k^2.T$.

Pour **(A)**, la durée du voyage sera **t** et **(A)** enverra dans cet intervalle de temps un nombre **N** d'impulsions tel que **t = N.T.**

Pour **(A')** la durée du voyage sera **t'**. Durant cet aller – retour il devra envoyer N_A impulsions, de période **k.T**, pendant la durée de l'aller et N_R, de période **(1/k).T**, pendant celle du retour.
On peut alors écrire :

$$t' = N_A.k.T + N_R.(1/k).T \qquad (8)$$

Comme le nombre d'impulsions échangées est bien sûr le même on a :

$$N = N_A + N_R \qquad (9)$$

Or les durées, fixées par les horloges de **(A')**, de l'aller et du retour sont les mêmes, ce qui nous donne :

$$N_A.k.T = N_R.(1/k).T$$
$$N_A = N_R.(1/k^2) \qquad (10)$$

L'expression (9) nous permet d'écrire :

$$N_A = N - N_R \quad \Rightarrow N_R.(1/k^2) = N - N_R \;\Rightarrow N_R = [k^2/(1+k^2)].N \qquad (11)$$

En remplaçant cette valeur de N_R dans (10) nous obtenons N_A :

$$N_A. = [1/(1+k^2)].N \qquad (12)$$

En remplaçant N_A et N_R par leurs expressions en fonction de N dans (8) on obtient t' :

$$t' = [1/(1+k^2)].k.N.T + .(1/k).\ [k^2/(1+k^2)].N.T$$

$$t' = [k/(1+k^2)].N.T + [k/(1+k^2)].N.T = [2.k/(1+k^2)].N.T$$

Or $t = N.T$ Donc :

$$t' = [2.k/(1+k^2)].t$$

Sachant que le facteur **2k/(1+k²)** vaut $(1 - \beta^2)^{1/2}$, qui est l'inverse du facteur de Lorentz γ, nous obtenons finalement :

[6] 1 A.L. représente une distance de 1 année de lumière ; c'est la distance parcourue par la lumière en 1 an ce qui représente 10 000 milliards de km

$$t' = \sqrt{(1-\beta^2)}.t = \frac{t}{\gamma} \quad ou \quad t = \gamma .t'$$

Pendant le voyage de **(A')**, ce dernier a moins vieilli que son collaborateur **(A)** resté sur Terre. Les durées correspondantes sont dans le rapport **$1/(1 - \beta^2)^{1/2}$** qui, dans notre cas, a une valeur de 2,3.
Pour **(A)** le voyage a duré un peu plus de 4 années – 1622 jours pour être précis - alors que pour **(A')** il ne s'est écoulé qu'un peu moins de 2 ans ou 708 jours !

On peut également remarquer que le demi-tour de **(A')** se produit, pour lui, à un instant égal à la moitié de la durée totale du voyage, c'est à dire 354 jours. Il n'en est pas de même pour **(A)**. En effet pour ce dernier, le voyage aller a duré 260 jours et le retour 1362.

Se pose maintenant la question de la pertinence du cadre de la relativité restreinte pour traiter le cas du voyageur de Langevin **(A')**. En effet ce dernier est associé à un repère qui n'est pas galiléen : il subit à plusieurs moments des accélérations qui semblent poser problème. Mais l'étude que nous avons conduite ci dessus l'a été du point de vue de **(A)** qui est attaché à un référentiel galiléen relevant de la théorie de la relativité restreinte. On aurait pu le faire en conduisant les calculs depuis le référentiel de la fusée – c'est maintenant **(A')** qui initie les échanges de flashs en émettant toutes les **T** secondes une impulsion lumineuse - mais il aurait fallu utiliser pour **(A')** deux repères : un pour l'aller et l'autre pour le retour. On utilise pour **(A)** un seul référentiel mais on en a donc besoin pour **(A')** de deux. Ceci détruit évidemment la symétrie apparente du problème.

Étudié dans le cadre de l'espace-temps de la relativité, le problème du voyageur de Langevin est confronté ici à une propriété banale de notre espace géométrique habituel : la distance séparant deux points dépend du trajet suivi pour les relier, la plus courte étant celle de la ligne droite. De la même façon, la durée séparant deux événements dépend de la ligne d'univers dans l'espace-temps qui les relie : la plus longue se déroule lorsque les deux événements ont lieu au même endroit. On peut donc bien voyager dans le temps, mais dans un seul sens, celui du futur.

8. Obtention de la transformation de Lorentz avec le facteur k

Soient deux repères **(R)** et **(R')** dont les observateurs **(A)** et **(A')** enregistrent le même événement. Les origines des temps des deux repères sont choisis de telle façon que t = t' = 0 lorsque les origines O et O' coïncident.

A l'instant t_1, mesuré sur l'horloge H_A, l'observateur **(A)** envoie vers **(A')** un signal qui le reçoit à l'instant t'_1, mesuré sur son horloge $H_{A'}$; le signal envoyé par **(A)** continue ensuite son chemin accompagné par le signal qu'a émis **(A')** à l'instant de la réception de celui venant de **(A)**. On peut donc dire que les deux signaux voyageant ensemble ne forme qu'un seul et même signal.

Appelons **(E)** l'événement se produisant sur l'axe OO' en un point P quelconque au moment où lui parvient le signal « double » en provenance de **(A)** et **(A')**. A cet instant le signal est renvoyé – soit par réflexion soit par émission coïncidente d'un nouveau signal – en direction de **(A')** et **(A)**. Il rencontre tout d'abord l'observateur **(A')** qui, à cet instant noté t'_2, mesuré sur $H_{A'}$, lui ajoute son propre signal vers **(A)**. Là encore on a alors un signal « double » se propageant de **(A')** vers **(A)**. Ce dernier va le recevoir à l'instant t_2, mesuré bien entendu sur sa propre horloge H_A.

L'observateur **(A)** va déterminer les coordonnées (x,t) de l'événement **(E)** de la manière suivante. Pour l'instant t il calcule la demi- somme des temps d'envoi et de réception du signal :

$$t = (1/2).(t_1 + t_2) \qquad (13)$$

La distance x du point P où se produit l'événement **(E)** est déterminée en multipliant la vitesse c de la lumière – rappelons qu'elle reste la même sur le parcours aller et le parcours retour – par la durée de l'aller qui est la moitié du temps d'aller / retour :

$$x = (1/2).(t_2 - t_1).c \qquad (14)$$

(13) et (14) permettent de déterminer t_1 et t_2 en fonction de x et de t :

$$t_1 = t - x/c \qquad t_2 = t + x/c \qquad (15)$$

De même l'observateur **(A')** trouvera des relations du même type :

$$t'_1 = t' - x'/c \qquad t'_2 = t' + x'/c \qquad (16)$$

Compte tenu du choix de l'origine des temps et de la définition du facteur k nous pouvons écrire :

$$t'_1 - 0 = k.(t_1 - 0) \quad \text{et} \quad t_2 - 0 = k.(t'_2 - 0)$$
$$t'_1 = k.t_1 \quad \text{et} \quad t_2 = k.t'_2 \qquad (17)$$

Ces deux relations, mises en œuvre dans les égalités (15) et (16) nous permettent d'écrire :

$$t' - x'/c = k.(t - x/c) \qquad (18)$$
$$t + x/c = k.(t' + x'/c) \quad \Rightarrow \quad t' + x'/c = (1/k).(t + x/c) \qquad (19)$$

En combinant (18) et (19) on obtient immédiatement :

$$\boxed{c^2.t'^2 - x'^2 = c^2.t^2 - x^2}$$

La quantité $(c^2.t^2 - x^2)$ se conserve donc dans tous les référentiels d'inertie. C'est un invariant entre l'événement générique (x,t) et l'événement origine de coordonnées nulles. On peut généraliser cette expression entre deux événements $E_1(x_1,t_1)$ et $E_2(x_2,t_2)$:

$$c^2.(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = c^2.(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2$$

Les relations (18) et (19) vont nous permettre de trouver les dépendances t’= f(t,x) et x’ = g(t,x). Après divers calculs on aboutit à :

$$t' = \frac{(k^2+1)}{2.k}.t - \frac{(k^2-1)}{2.k}.\frac{x}{c} \qquad (20)$$

$$x' = \frac{(k^2+1)}{2.k}.x - \frac{(k^2-1)}{2.k}.c.t \qquad (21)$$

Sachant que $k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ nous pouvons maintenant écrire pour t’ et x’ :

$$t' = \frac{1}{1-\beta^2}.t - \frac{\beta}{1-\beta^2}.\frac{x}{c}$$

$$x' = \frac{1}{1-\beta^2}.x - \frac{\beta}{1-\beta^2}.c.t$$

Nous aboutissons alors aux formules correspondant à la transformation de Lorentz pour une seule dimension d’espace :

$$t' = \frac{t - \frac{V.x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad x' = \frac{x - V.t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

9. Conclusion : avantages et inconvénients de la méthode

Comme indiqué au début, cette méthode présente l’avantage de la simplicité, dans l’outillage mathématique mis en œuvre, et de la concrétisation des situations, ce qui permet une approche plus intuitive de la théorie. Elle a cependant des inconvénients dont certains sont bien expliqués dans le texte suivant de Jean-Marc Lévy-Leblond :

« ... L’ironie de l’histoire veut que, du point de vue moderne, l’accent soit mis beaucoup moins sur les aspects relatifs de cette conception de l’espace-temps que sur ses aspects absolus : plutôt qu’aux grandeurs qui dépendent du référentiel, on s’intéresse à celles qui n’en dépendent pas – telle la vitesse - limite (celle de la lumière) justement, ou à l’intervalle d’espace-temps dans la métrique minkowskienne. La dénomination de « relativité » est au fond assez mal choisie, comme Einstein lui-même, répondant à une remarque critique de Sommerfeld au début des années 1920, finit par en convenir. On peut à bon droit voir dans ce choix terminologique les effets du contexte culturel du

bouillonnant début de siècle à Zurich où vivait le jeune Einstein – tout comme Lénine et Tristan Tzara, dans une ambiance propice aux remises en cause et à la relativisation des idées reçues. Cette résonance fut encore accentuée lorsque se développa massivement l'écho public, souvent dénaturé, de la théorie, dans les années d'un après-guerre sceptique et friand de nouveautés. Il serait plus judicieux aujourd'hui de parler de « chronogéométrie », puisqu'il s'agit d'une théorie traitant de la structure de l'espace-temps, tout comme la géométrie usuelle traite de celle de l'espace.

Se pose alors à nouveaux frais la question du fondement de cette théorie. Celui sur lequel on la fait usuellement reposer est double :
- *le « premier postulat », qui n'est autre que le principe de relativité général déjà énoncé,*
- *le « second postulat », qui affirme l'invariance de la vitesse de la lumière, la même dans tous les référentiels.*

C'est bien à partir de ce second postulat qu'Einstein, en 1905, établit les formules de transformation de Lorentz, par une analyse essentiellement opérationaliste des mesures spatio-temporelles (telle la synchronisation des horloges). Mais cette construction est fort insatisfaisante sur le plan épistémologique et soulève des objections de deux ordres. ***D'une part, si la relativité est fondée sur une propriété spécifique de la propagation des signaux lumineux, on comprend bien qu'elle s'applique à l'électromagnétisme, beaucoup moins bien qu'elle régisse aussi les autres types d'interaction (fortes, faibles) découverts depuis. En d'autres termes, le domaine d'application de la théorie – universelle – est bien plus étendu que sa base traditionnelle ne le laisserait penser. D'autre part, nous savons aujourd'hui que l'invariance de la vitesse de la lumière est une conséquence de la nullité de la masse du photon. Mais, empiriquement, cette masse, aussi faible soit son actuelle borne supérieure expérimentale, ne peut et ne pourra jamais être considérée avec certitude comme rigoureusement nulle. Il se pourrait même que de futures mesures mettent en évidence une masse infime, mais non-nulle, du photon ; la lumière alors n'irait plus à la "vitesse de la lumière", ou, plus précisément, la vitesse de la lumière, désormais variable, ne s'identifierait plus à la vitesse limite invariante. Les procédures opérationnelles mises en jeu par le « second postulat » deviendraient caduques ipso facto. La théorie elle-même en serait-elle invalidée ?*** *Heureusement, il n'en est rien ; mais, pour s'en assurer, il convient de la refonder sur des bases plus solides, et d'ailleurs plus économiques. En vérité, le « premier postulat » suffit, à la condition de l'exploiter à fond. Car le principe d'invariance renvoie immédiatement à l'existence d'une structure de groupe, et la contrainte puissante qu'exprime une telle structure permet d'aboutir sur la seule base d'hypothèses très générales, à la chronogéométrie einsteinienne – ou au cas particulier de son approximation classique, la chronogéométrie galiléenne. »*

La partie centrale - repérée en gras - du texte cité ci-dessus, montre qu'effectivement, en favorisant le second postulat et en s'appuyant exclusivement sur l'échange de signaux lumineux, on donne à la lumière une place exagérée[7] dans cette théorie. Cependant la suite du texte de M.

[7] On peut également considérer que l'on donne ici à la présentation historique - dans laquelle la lumière et sa propagation occupe une place centrale – la prédominance sur une présentation plus moderne et plus rigoureuse dans laquelle l'appareil mathématique est utilisé pleinement.

Levy-Leblond qu'on pourra lire ci dessous, montre, qu'au niveau de l'enseignement secondaire, il n'est pas envisageable, sérieusement, de présenter la relativité restreinte dans toute sa rigueur mathématique :

« Il suffit en effet d'exiger que le groupe d'invariance spatio-temporelle soit compatible avec l'isotropie de l'espace et avec l'existence de relations causales pour qu'émerge le groupe de Lorentz. Il est caractérisé par une constante structurelle c, qui se trouve jouer le rôle de vitesse limite ; reste à se tourner vers l'expérience pour connaître la valeur de cette constante (qui, si elle se trouvait être infinie, conduirait au groupe de Galilée). Sous sa forme la plus élémentaire, cette démarche présuppose la linéarité des transformations spatio-temporelles. Mais cette restriction peut même être levée en utilisant une approche infinitésimale du groupe de relativité, via son algèbre de Lie.
On aboutit alors, comme cas le plus général, au(x) groupe(s) de de Sitter, et aux cas particuliers que constituent ses diverses contractions (au sens de Wigner-Inönu), soit évidemment les groupes de Poincaré et de Galilée, ainsi qu'à des formes dégénérées moins connues quoique non dépourvues d'intérêt comme le groupe dit de Newton (décrivant un univers en expansion mais à faible vitesse), celui de Carroll (une limite anti-galiléenne, à la causalité évanescente), et un groupe "statique". »

L'utilisation de la représentation quadrivectorielle dans l'espace-temps de Minkowski est difficilement envisageable dans le cadre scolaire précité ; il est donc indispensable de trouver autre chose permettant une introduction compréhensible de la relativité restreinte, sans être bloqué par la mise en œuvre d'un « outillage » mathématique puissant mais impossible à manipuler. La première méthode envisageable est celle du « facteur k », développée ci dessus, l'autre est de nature graphique et nécessite l'utilisation de différents diagrammes étudiés un peu plus loin.

Pierre MAGNIEN