LES JUMEAUX DE LANGEVIN DANS UN DIAGRAMME DE MINKOWSKI

INTRODUCTION

RAPPEL A PROPOS DU DIAGRAMME DE MINKOWSKI

Un diagramme espace-temps permet de représenter un événement **(E)** de coordonnées (x,t) dans un repère galiléen **(R)** et de coordonnées (x', t') dans un autre repère galiléen **(R')** en mouvement rectiligne uniforme de vitesse **v** par rapport à **(R)**. Dans tous les cas on considèrera que les origines **O** et **O'** des deux repères sont confondues à l'instant initial où t = t' = 0.

Pour construire un diagramme espace-temps on choisit comme axes du diagramme les quantités **x** et **x'** en **abscisses**, **ct** et **ct'** en **ordonnées**. On peut alors définir la ligne d'univers d'un objet. Elle représente l'histoire de ce dernier, c'est à dire la succession des événements attachés à cet objet.

Il existe essentiellement trois types de diagramme qui se distinguent par la manière dont sont définis et tracés les axes. Ces derniers, comme pour la méthode de Bondi[1], se limitent à une seule dimension spatiale x et x' et à la dimension temporelle t et t'. Leur construction s'appuie sur la transformation de Lorentz avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned} c.t' &= \gamma.(c.t - \beta.x) \\ x' &= \gamma.(x - \beta.c.t) \end{aligned} \qquad \textbf{(1)} \text{ avec } \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \; et \; \beta = \frac{v}{c}$$

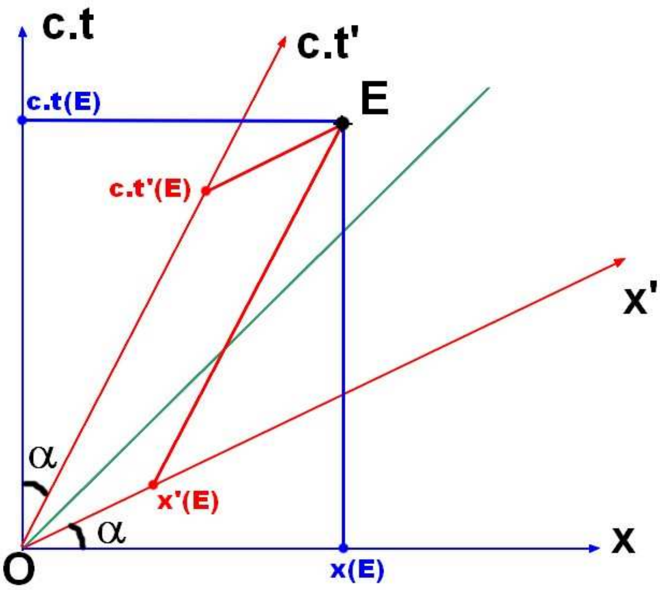
Celui qui nous intéresse ici a été proposé par Herman Minkowski en 1908. Il s'agit d'une représentation dans laquelle le référentiel **(R)** est considéré au repos et le second **(R')** en mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse[2] **v** par rapport à **(R)**. De ce fait, le diagramme de Minkowski est construit en donnant à **(R)** des axes orthogonaux. La première bissectrice représente la ligne d'univers d'un rayon lumineux. Les deux équations **(1)** entraînent que les points tels que **ct' = 0** sont donnés, dans le référentiel **(R)**, par la droite d'équation **c.t = β.x** et les points tels que **x' = 0** sont sur la droite dont l'équation est **x = β.c.t**. Les deux droites obtenues correspondent aux axes[3] Oct' et Ox' et sont symétriques par rapport à la première bissectrice. L'angle α que font entre eux les axes (Oct, Oct') et (Ox, Ox') est tel que :

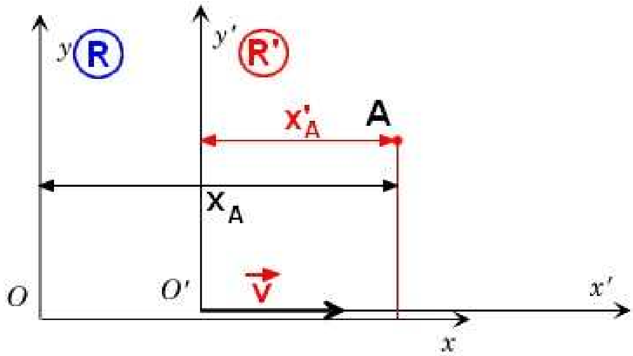
$$tan(\alpha) = \frac{x}{c.t} = \beta = \frac{v}{c} \qquad (2)$$

Remarquons que cette représentation est asymétrique car elle privilégie le repère **(R)**, considéré au repos par rapport à **(R')**, ce qui n'est pas conforme à l'esprit de la relativité restreinte.

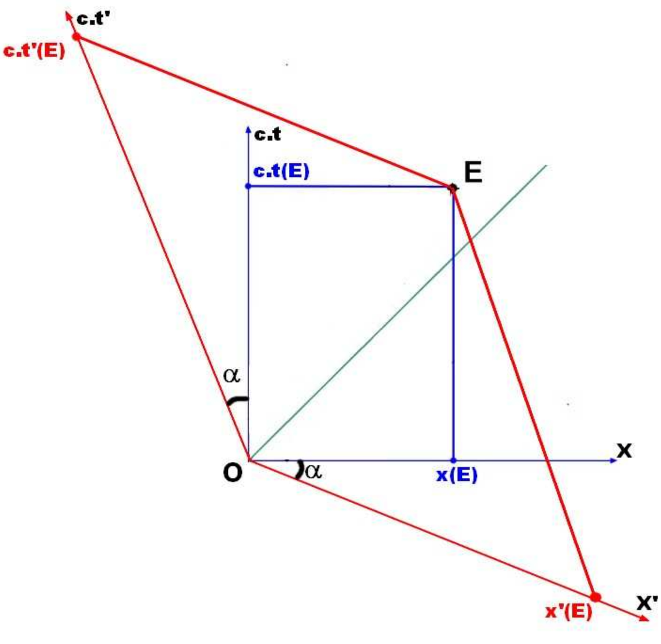
[1] Voir le texte « La relativité restreinte avec le facteur k »
[2] Cette dernière peut être positive -(R') s'éloigne de (R) - ou négative dans le cas contraire.
[3] On ne confondra pas l'origine O du référentiel (R) et l'origine O du diagramme d'espace-temps.

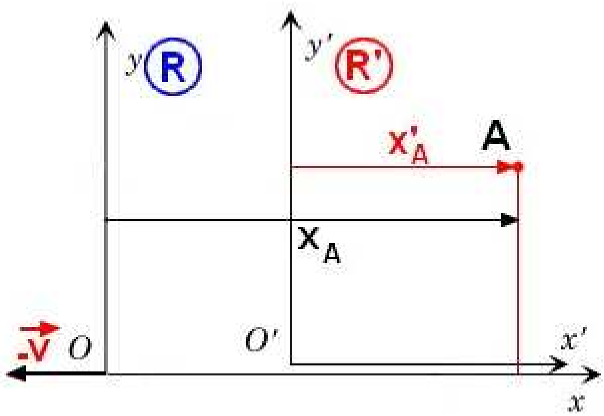
On a représenté, dans le diagramme de Minkowski dessiné ci dessous, un événement (E) avec ses coordonnées, construites en menant des parallèles aux axes dans les deux repères (Ox,Oct) et (Ox’,Oct’). Dans ce premier schéma, le référentiel **(R’)** se déplace de gauche à droite.

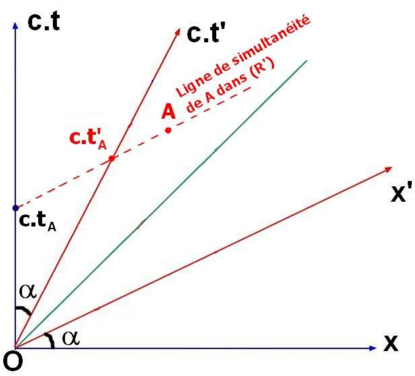




Dans celui d’un mouvement de **(R’)** de la droite vers la gauche nous aurions :

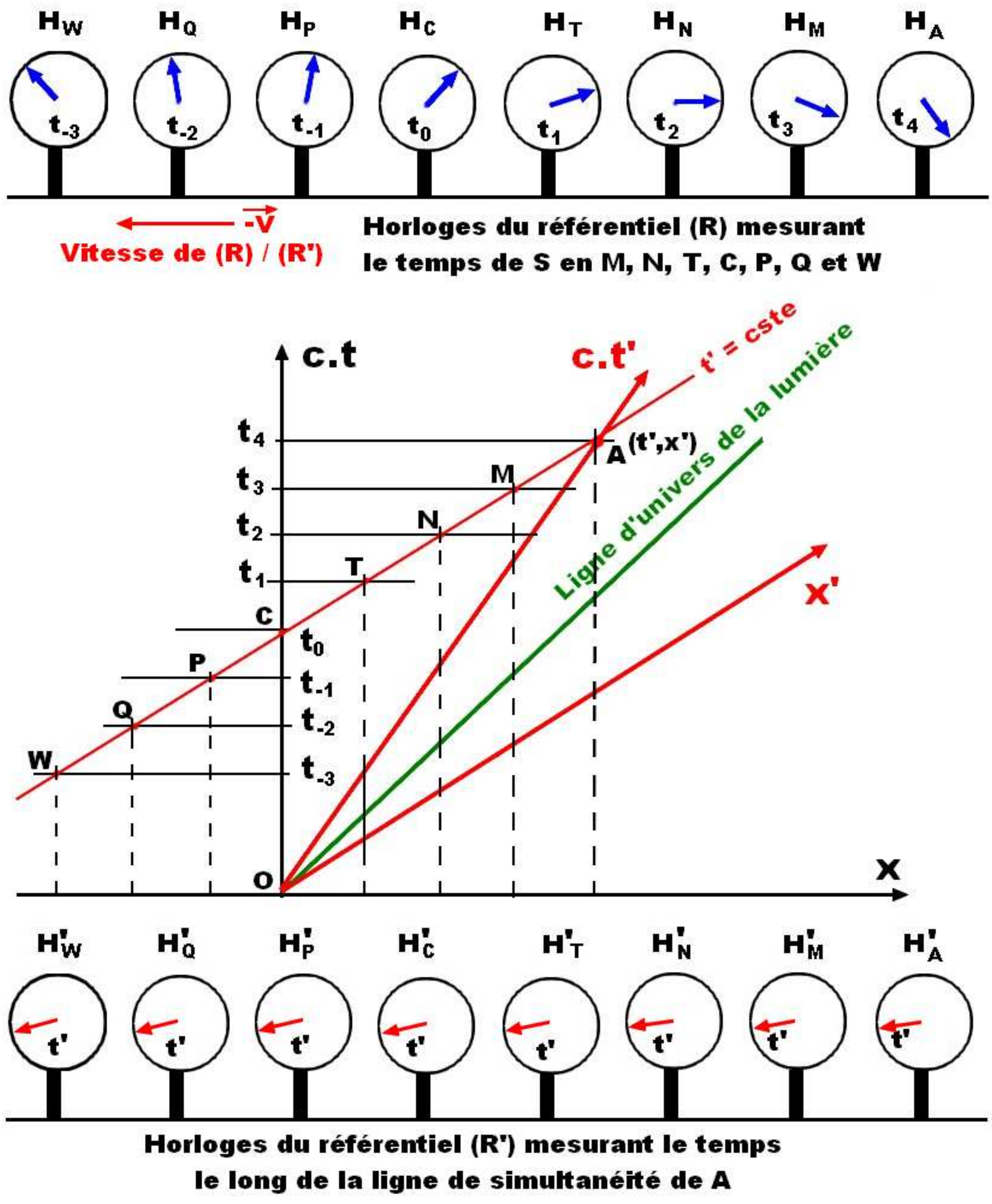






Il nous reste à définir la ligne de simultanéité d’un événement sur le diagramme de gauche. Considérons l’événement A : la droite parallèle à Ox’ et passant par A est appelée ligne de simultanéité de A dans **(R’)**. Tous les événements situés sur cette droite sont simultanés dans le référentiel **(R’)**. Leur coordonnée temporelle est donc la même dans **(R’)** et vaut ct. La coordonnée temporelle de A et de tous les points situés sur cette droite de simultanéité dans **(R)** vaut donc ct_A comme indiqué sur le diagramme. On peut alors se demander comment les horloges de **(R)** mesurent le temps pour les différents événements situés sur cette ligne de simultanéité.

Pour discuter de cette question, supposons que nous ayons huit horloges équidistantes et au repos dans le référentiel **(R)**. Ces horloges sont toutes synchronisées selon la définition de la simultanéité dans **(R)**. Mais maintenant, supposons que, vu d'un autre référentiel **(R')**, l'ensemble du système d'horloges attachées à **(R)** se déplace vers la gauche avec une vitesse $-\vec{v}$. Mais, en fonction du critère de simultanéité, les horloges au repos dans **(R)** présentent, à un instant donné (t') mesuré dans **(R'),** une différence de lecture progressive, comme indiqué sur la figure. Cette situation est illustrée d'une autre manière dans le diagramme espace-temps de Minkowski tracé sur la figure.



Les droites verticales en tirets sont les lignes d'univers des horloges, et les points marqués M, N, T, C, P, Q et W sont les coordonnées spatio-temporelles de chacune d'elles à un instant donné t' dans **(R')**, matérialisées par une ligne tracée parallèlement à l'axe X 'de **(R')**.

Par la transformation de Lorentz, nous avons:

$$t' = \gamma . (t - \frac{v.x}{c^2}) \quad (3)$$

Si l'horloge C, au point x = 0 dans **(R)**, lit t_0 à l'instant t', alors nous avons :

$$t' = \gamma . t_0 \quad (4)$$

Remarquons qu'en substituant cette valeur t' particulière dans l'équation de transformation de Lorentz, nous obtenons la lecture d'une horloge de **(R),** pour n'importe quelle valeur de x, qui est donnée par:

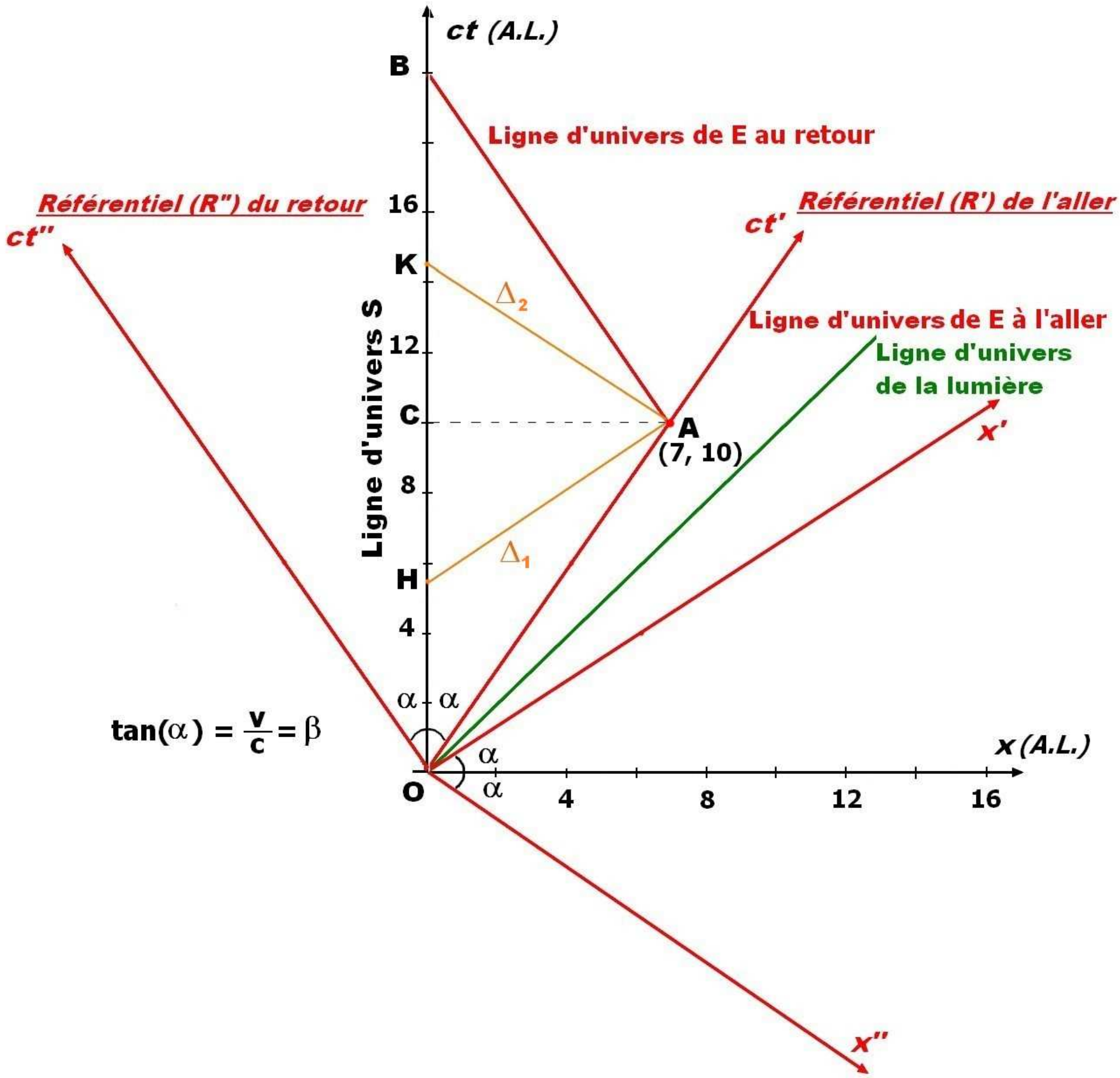
$$t(x) = t_0 + \frac{v.x}{c^2} \quad (5)$$

Cette différence en augmentation régulière - comme on le constaterai si l'on se plaçait du point de vue d'un observateur de **(R')** - est, bien sûr, directement liée à la procédure d'échange d'un signal lumineux permettant de définir la simultanéité. Si un signal a été envoyé à partir de C alors, selon les observateurs de **(R')**, les horloges A à T s'éloignent de lui, alors que les horloges P à W viennent à sa rencontre. En relativité galiléenne, les observateurs attachés à **(R)** régleraient leurs horloges trop en avance si elles sont situées à x> 0 et trop en retard si elles sont situées à x <0, comme l'indique l'équation ci-dessus.

TRAITEMENT DU PROBLEME A L'AIDE DU DIAGRAMME

L'outil étant mis en place, nous allons maintenant l'utiliser pour étudier le problème des jumeaux de Langevin et pour lever le paradoxe apparent des vieillissements différents des deux frères. Nous appellerons E – comme explorateur - celui qui voyage dans l'espace et S – comme sédentaire – celui qui reste sur Terre et attend le retour du premier.

Pour décrire cette expérience de pensée nous devons utiliser deux diagrammes de Minkowski correspondant à la mise en évidence des relations entre E et S dans les deux phases du voyage. Ces diagrammes ont un repère commun, celui attaché au référentiel **(R)** de S. L'autre repère de chaque diagramme est, pour l'un, **(R')** lié à l'aller, et pour l'autre, **(R")** lié au retour. L'existence du repère commun (Oct, Ox) permet de regrouper dans un unique schéma les deux diagrammes, comme on peut le voir ci dessous.



Remarquons que, selon le raisonnement attaché à la figure de la page 3, le segment Δ_1 représente la ligne de simultanéité dans **(R')** de l'événement A et Δ_2 la ligne de simultanéité de l'événement A dans **(R'')**.

Pour fixer, en accord avec le diagramme ci-dessus, quelques grandeurs numériques de notre étude nous considérerons que E se rend à proximité d'une étoile située à 7 A.L. de la Terre et que le module de sa vitesse est v = 0,7c. On a alors :

$$\beta = \frac{v}{c} = 0{,}7 \quad et \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}40$$

Pour le jumeau sédentaire S, au repos dans le référentiel **(R)**, la durée du voyageur E sera tout simplement :

$$T = \frac{2.D}{v} = \frac{2\times 7}{0{,}7} = 20 ans$$

Regardons en détail, à partir du diagramme de Minkowski ci dessus, comment E, depuis son référentiel de repos **(R')**, voit les choses.

En se déplaçant par rapport à S, E est accompagné de son « cristal » d'horloges H'_i qui défilent devant S[4]. Supposons que ces horloges soient régulièrement réparties le long de O'x' et qu'au moment où l'une d'entre elles croise S elle enregistre, d'une part, le temps indiqué par l'horloge de **(R)** devant laquelle elle passe et, d'autre part, ses propres coordonnées (t'_i,x'_i).

Le voyage aller de E va durer, pour S, la moitié de la durée du voyage complet, c'est à dire t = 10 ans (ceci est un temps propre pour S mais un temps impropre pour E). Au bout de ce temps mesuré par S, le temps mesuré t' par E – donc temps propre de E - sera selon l'expression de la dilatation du temps :

$$t' = \sqrt{(1-\beta^2)}.t = \sqrt{(1-0{,}7^2)}.10 = 7{,}14 ans$$

Lorsque, comme on l'a introduit sur le diagramme de la page (3), on trace la ligne Δ_1 de simultanéité de l'événement A dans le référentiel **(R')** (Δt' **avant** le changement de référentiel lors du passage de l'aller au retour), E constate que :

- le temps marqué par l'horloge de son référentiel croisant la Terre (événement H) a pour valeur t'_A = 7,14 ans (toutes les horloges sur la ligne de simultanéité, y compris bien sûr la sienne, marquent cette valeur).
- Le temps marqué par l'horloge croisée de **(R)** indique $t_H = t'_A/\gamma$ (relation (4) de la page 4), c'est à dire 7,14/1,4 = 5,1 ans

A ce moment là, E change de référentiel et « saute » dans **(R")**. Il est maintenant accompagné d'un autre « cristal » d'horloges H''_i qui défilent également devant S. Ces horloges sont toujours régulièrement réparties le long de O"x". De la même façon que précédemment, au moment où l'une d'entre elles croise S elle enregistre, d'une part, le temps indiqué par l'horloge de **(R)** devant laquelle elle passe et, d'autre part, ses propres coordonnées (t''_i,x''_i).

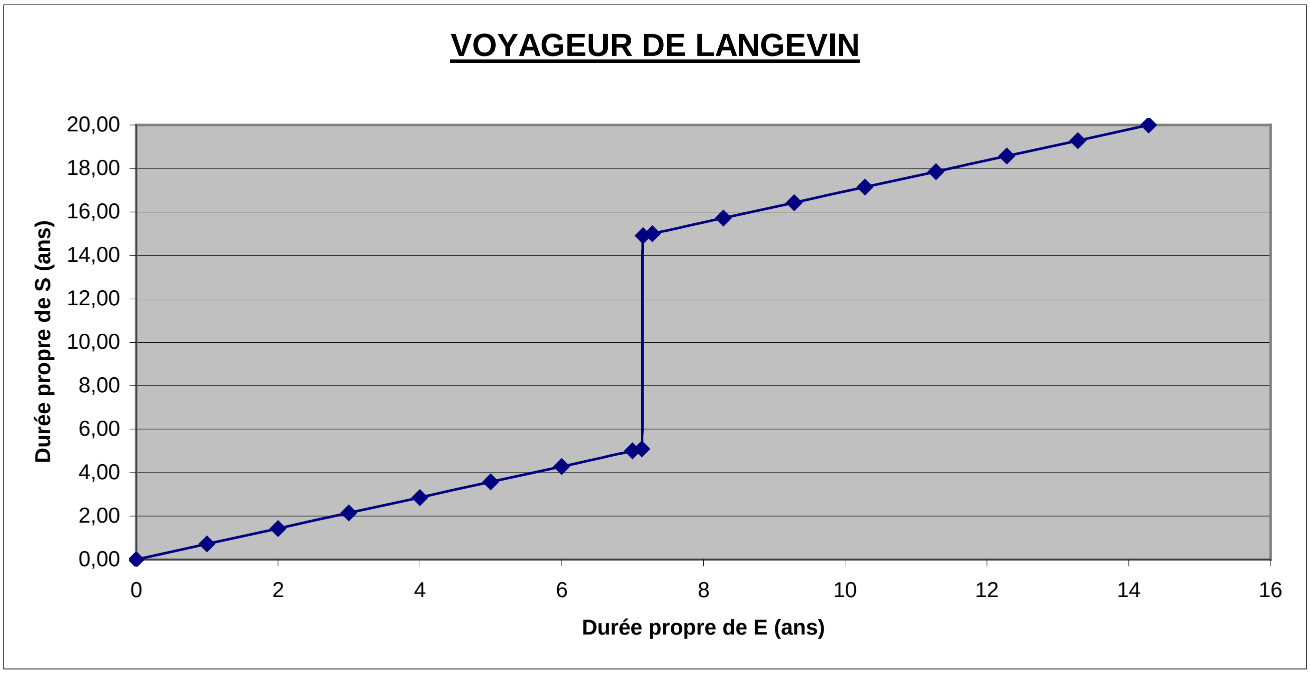
Il faut alors tracer une nouvelle ligne Δ_2 de simultanéité de l'événement A dans le référentiel **(R")** (Δt' **après** le changement de référentiel lors du passage de l'aller au retour), E constate maintenant que :

- le temps marqué par l'horloge de son référentiel croisant alors la Terre (événement K) a toujours pour valeur t'_A = 7,14 ans (toutes les horloges sur cette nouvelle ligne de simultanéité, y compris bien sûr la sienne, marquent encore cette valeur, Δt' étant aussi petit que l'on veut car, dans notre cas, nous ne considérons que des mouvements uniformes).
- Le temps marqué par l'horloge croisée de **(R)** va indique, par symétrie, une valeur $t_K = 20 - t_H$, c'est à dire 20 – 5,1 =14,9 ans.

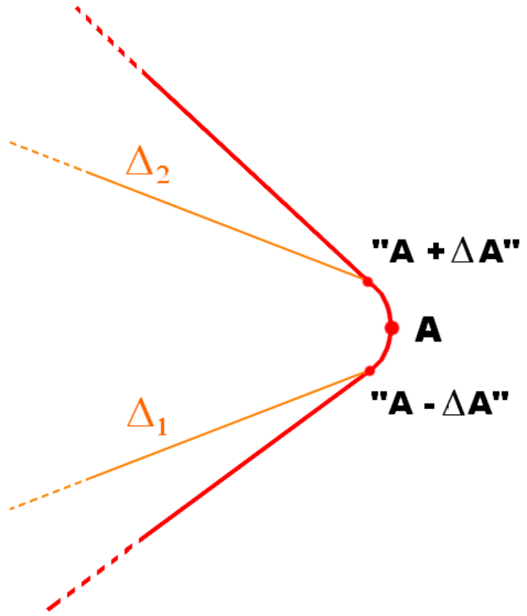
[4] i est un indice muet qui vaut 0 pour l'horloge attachée à E, qui est négatif pour les horloges appartenant à la partie négative de O'x' et positif pour la partie positive de O'x'.

On constate alors que, pour E, à l'instant où il fait son demi-tour, ses mesures sur le temps s'écoulant dans le repère **(R)** de S sautent « instantanément » de 5,1 ans à 14,9 ans. Par contre, pour S, qui reste tout au long du voyage dans le même référentiel **(R)**, le temps qu'il mesure dans les repères **(R')** et **(R")** de E ne subit aucune discontinuité : la dilatation du temps dépendant du carré de la vitesse relative, le phénomène n'est pas sensible au changement de sens du mouvement de E.

Si on trace la durée propre de E en fonction de celle de S nous obtenons :



En réalité le changement de vitesse de E ne peut pas être instantané.



Considérons, comme sur la figure ci-contre, un retournement progressif de la fusée de E entre les deux événements[5] « A – ΔA » et « A + ΔA ».

Durant la partie située entre ces deux événements la durée propre pour E n'est plus nulle mais reste aussi petite que l'on veut et le résultat final de l'expérience – le voyageur revient plus jeune que n'est le sédentaire – dépend avant tout de la vitesse relative de **(R)** par rapport à **(R')** et **(R")** et de la durée du voyage.

Pierre MAGNIEN
27 septembre 2012

[5] La notation retenue ici pour désigner les deux événements est purement symbolique et signifie simplement que le retournement a une durée petite mais non nulle.