UN AUTRE PARADOXE : équation horaire du mouvement d'un point

1. - INTRODUCTION

La relativité restreinte est l'objet de nombreux paradoxes comme on a pu le constater dans d'autres textes proposés dans ce dossier. La majorité d'entre eux est due à une approche trop imprécise et se solutionne en définissant avec soin les différentes grandeurs utilisées. On va encore le constater ici.

2. - ENONCE DES PROBLEMES A L'ORIGINE DU PARADOXE

1) Dans un référentiel galiléen **(R)** d'origine O et d'axes x,y,z, un point M_1 se déplace sur l'axe des x a la vitesse **v** constante.

1. En utilisant la transformation de Lorentz déterminer les coordonnées (x'_1,t') de ce point M_1 dans son référentiel propre **(R')**. On considère que lorsque O' passe en O nous avons t = t' = 0.
2. On considère le point M_2 fixe par rapport à M_1 et situé sur l'axe des x' à la distance δ de M_1 distance mesurée dans **(R')**. Déterminer l'équation du mouvement de M_2 dans le référentiel **(R)** initial.

2) Dans un référentiel galiléen **(R')** d'origine O' et d'axes x',y',z', un point M_2 est au repos au point $x'_2 = \delta$. **(R')** se déplace sur l'axe des x à la vitesse **-v** constante par rapport à un autre référentiel galiléen **(R)**. On considère que lorsque O passe en O' nous avons t' = t = 0.

1. En utilisant la transformation de Lorentz déterminer les coordonnées (x_2,t_2) de ce point M_2 dans le référentiel **(R)**.
2. Déterminer l'équation du mouvement de M_2 dans le référentiel **(R)** initial

3. – ETUDE DU PREMIER PROBLEME

3.1 - COORDONNEES DE M_1 DANS (R')

Appliquons les transformations de Lorentz (TL) pour le point M_1 entre les deux référentiels[1] :

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - \beta c t_1) \\ t'_1 = \gamma(t_1 - \beta x_1/c) \end{cases}$$

Dans **(R)** nous avons $x_1 = vt_1$. En remplaçant dans la première équation nous obtenons $x'_1 = 0$, ce qui est conforme à l'hypothèse que M_1 occupe l'origine de son référentiel propre **(R')**.

Pour t'_1 nous avons :

$$t'_1 = \gamma(t_1 - \beta v t_1/c) = \gamma(t_1 - \beta^2 t_1) = \gamma t_1(1 - \beta^2) = t_1/\gamma$$

[1] On appellera t'_1 l'heure marquée par l'horloge attachée à M_1 dans son référentiel de repos **(R')**. La définition est la même pour t'_2. On appellera t_1 l'heure marquée par l'horloge au repos dans **(R)** devant laquelle passe M_1 alors que la sienne marque t'_1. La définition est la même pour t_2. On rappelle que $t_0 = t'_0 = 0$ lorsque les origines O et O' coïncident.

Dans son repère propre les coordonnées de M_1 sont :

$$M_1 \quad \begin{cases} x'_1 = 0 \\ t'_1 = t_1 / \gamma \end{cases}$$

3.2 - EQUATION HORAIRE DE M_2 DANS (R)

A partir des expressions précédentes associées aux TL pour passer de **(R')** à **(R)** on va obtenir :

$$\begin{cases} x_2 = \gamma(x'_2 + \beta c t'_2) \\ t_2 = \gamma(t'_2 + \beta x'_2 / c) \end{cases}$$

Or les coordonnées de M_2 dans **(R')** sont : *[le temps de M_2 est synchrone de celui de M_1 dans **(R')**]*

$$\begin{cases} x'_2 = x'_1 + \delta = \delta \\ \boxed{t'_2 = t_2 / \gamma} \qquad (1) \end{cases}$$

Remplaçons dans l'expression de x_2 les quantités x'_2 et t'_2 par leur valeur :

$$x_2 = \gamma(\delta + \beta c t'_2) = \gamma(\delta + (\beta c t_2 / \gamma)) = \gamma\delta + \beta c t_2$$

Comme $\beta c = v$ nous avons avec la première équation donnant x_2 :

$$x_2 = v t_2 + \gamma\delta$$

4. - ETUDE DU SECOND PROBLEME

4.1 - COORDONNEES DE M_2 DANS (R)

Comme précédemment appliquons les TL aux coordonnées de M_2 dans **(R')** pour avoir celles dans **(R)**.

$$\begin{cases} x_2 = \gamma(\delta + \beta c t'_2) \\ t_2 = \gamma(t'_2 + \beta x'_2 / c) \end{cases}$$

En tirant t'_2 de la première on obtient x_2 en fonction de t_2 en remplaçant dans la seconde.

$$\boxed{t'_2 = t_2 / \gamma - \beta\delta / c} \quad (2) \quad \Rightarrow \quad x_2 = \gamma [\delta + \beta c (t_2 / \gamma - \beta\delta / c)]$$

2.2 - EQUATION HORAIRE DE M_2 DANS (R)

Sachant que $\beta = v/c$ et $\gamma = 1/(1 - \beta^2)^{1/2}$ on obtient finalement :

$$x_2 = \gamma\delta + v t_2 - \gamma\beta^2\delta = v t_2 + \gamma\delta(1 - \beta^2) = v t_2 + \delta / \gamma$$

5 – COMPARAISON DES RESULTATS

On obtient donc deux expressions différentes pour l'équation horaire de M_2. D'une part, partant de l'équation horaire du mouvement de M_1 dans **(R)** on passe par les TL pour obtenir les coordonnées de M_1 dans son référentiel propre **(R')**. On introduit alors un point M_2 qui est au repos dans **(R')** et distant de δ de M_1. Toujours en s'appuyant sur les TL, on obtient finalement l'équation horaire de M_2 dans **(R)**. On obtient alors :

$$\boxed{x_2 = vt_2 + \gamma\delta}$$

Pour la seconde expression nous partons des coordonnées de M_2 dans **(R')** et, en appliquant les TL du mouvement de **(R)** par rapport à **(R')** à la vitesse **v** le long de l'axe Ox', nous obtenons :

$$\boxed{x_2 = vt_2 + \delta/\gamma}$$

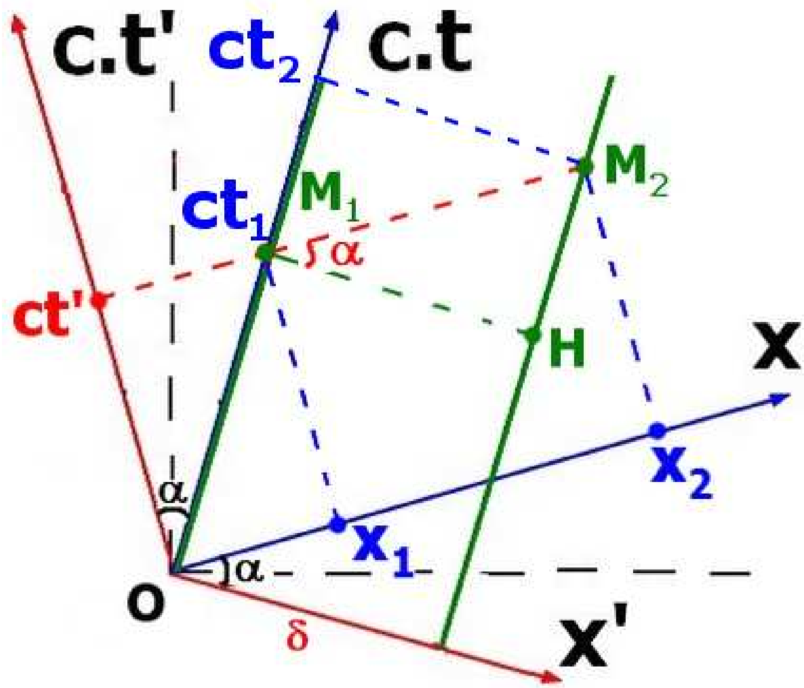
La différence apparaît dans l'abscisse à l'origine (pour $t_2 = 0$) : $\gamma\delta$ dans le premier cas et δ/γ dans le second. Or il semble bien que les problèmes posés soient identiques, même si leur formulation est un peu différente : M_2 est au repos à la même position $x'_2 = \delta$ dans **(R')** et les deux référentiels **(R)** et **(R')** ont le même un mouvement relatif.

On peut donc se poser deux questions : quelle est la bonne expression pour x_2 et où se cache l'erreur de raisonnement dans le calcul précédent ? En relisant attentivement les calculs on constate une différence dans l'expression de t'_2, temps marqué par l'horloge attachée à M_2 et au repos dans **(R')** lorsqu'il occupe la position x'_2.

Premier calcul - résultat partiel (1) : $t'_2 = t_2/\gamma$

Second calcul - résultat partiel (2) : $t'_2 = t_2/\gamma - \beta\delta/c$

Considérons le diagramme de Lorentz suivant :



Il représente les lignes d'univers des points M_1 et M_2 au repos dans le repère **(R')** et avec $M_1M_2 = \delta$ dans **(R')**. A l'instant t' dans **(R')** l'horloge de **(R)** en face de M_1 marque t_1 et celle en face de M_2 marque $t_2 > t_1$. On a :

$$x_2 = x_1 + (x_2 - x_1)$$
$$x_1 = vt_1$$

Or dans le triangle M_1M_2H :

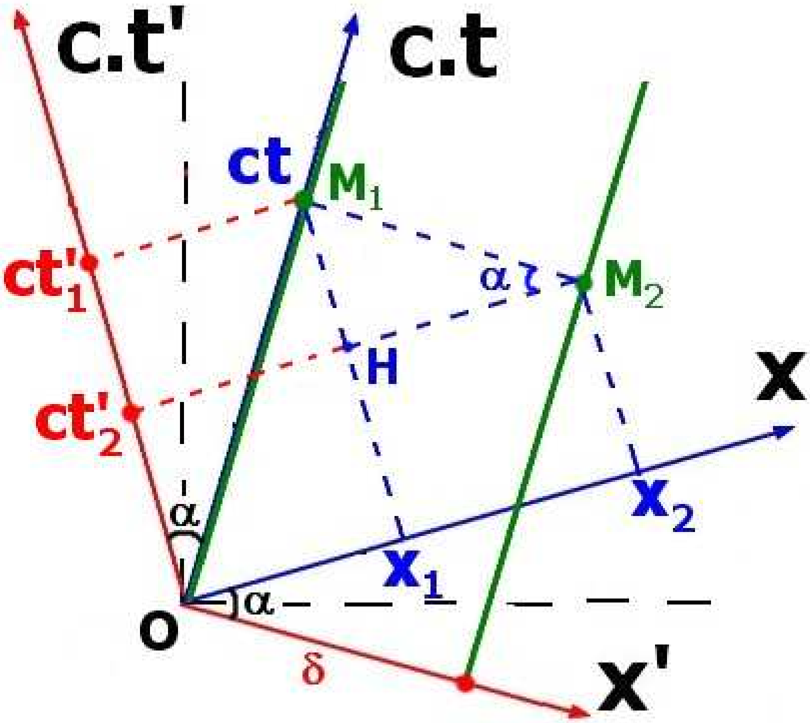
$$cos(\alpha) = M_1H / M_1M_2 = \delta / (x_2 - x_1)$$
$$cos(\alpha) = \sqrt{1 - sin^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \beta^2}$$
$$(x_2 - x_1) = \delta / cos(\alpha) = \delta / \sqrt{1 - \beta^2} = \delta\gamma$$

Finalement :

$$x_2 = vt_1 + \delta\gamma$$

On obtient alors l'expression finale trouvée pour la première partie. Cependant elle ne peut pas convenir car, comme on le voit bien sur le diagramme de Lorentz, l'équation horaire de M_2 dans **(R)** est obtenue en ajoutant à 'abscisse de M_1 la distance qui sépare M_2 de M_1. Or cette distance n'est pas calculée dans **(R)** d'une manière correcte c'est à dire en déterminant la position de M_1 et celle de M_2 dans **(R)** au même instant de ce référentiel.

Considérons maintenant le diagramme de Lorentz suivant :



Il représente encore les lignes d'univers des points M_1 et M_2 au repos dans le repère **(R')** et avec $M_1M_2 = \delta$ dans **(R')** mais on a choisi de positionner les points M_1 et M_2 au même instant t de **(R)** : $t_1 = t_2$

$$x_2 = x_1 + (x_2 - x_1)$$

$$x_1 = vt_1$$

Dans le triangle M_1M_2H on peut écrire :

$$cos(\alpha) = M_2H / M_1M_2 = (x_2 - x_1)/\delta$$

$$cos(\alpha) = \sqrt{1 - sin^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$(x_2 - x_1) = \delta cos(\alpha) = \delta\sqrt{1 - \beta^2} = \delta/\gamma$$

Finalement :

$$x_2 = vt_1 + \delta/\gamma$$

Cette expression est la bonne car elle est établie en considérant la position de M_1 à l'instant t_1 à laquelle on ajoute la distance M_1M_2 mesurée à l'instant t_2. Or nous avons, par construction du diagramme, $t_1 = t_2$. Donc l'équation horaire de M_2 à n'importe instant t du référentiel **(R)** est donnée par :

$$x_2 = vt + \delta/\gamma$$

CONCLUSION

Là encore on constate qu'il est facile de créer un paradoxe en relativité restreinte. Comme pour d'autres déjà étudiés celui-ci émerge de deux oublis : la simultanéité n'est plus une qualité absolue des événements et la mesure d'une distance ne peut être pertinente que si la position de chacune des extrémités du segment est déterminée **au même instant** dans le référentiel d'étude.

Pierre MAGNIEN
02 juillet 2014