ANALYSE CRITIQUE D'UN EXERCICE PROPOSE DANS UN OUVRAGE DE TS

1. Introduction

Les différents ouvrages publiés pour accompagner en Terminale S le programme de physique – chimie comportent bien entendu de nombreux exercices. Intéressons nous à l'un d'entre eux disponible dans le chapitre consacré à la relativité restreinte de l'ouvrage **Physique Chimie TS – Hachette Education**. L'énoncé de l'exercice (page 220) est le suivant :

On imagine qu'une fusée se déplace selon une trajectoire rectiligne avec vitesse de valeur constante v = 250000 km/s par rapport à la Terre. A son bord, un astronaute envoie à un ami resté sur Terre un signal lumineux périodique. Il règle sa fréquence d'émission f à 5,0 Hz.
Le référentiel terrestre et celui lié à la fusée sont supposés galiléens pendant la durée des mesures.
Les durées propre ΔT_0 et mesurée $\Delta T'$ sont reliées par $\Delta T' = \gamma.\Delta T_0$

1- *Quels sont les deux événements à considérer pour étudier la période du signal lumineux envoyé par l'astronaute à son ami ?*
2- *Quelle est la période propre de ce signal lumineux ?*
3- *Quelle est la période mesurée de ce signal par l'ami resté sur Terre ?*

La solution proposée (page 612) est succincte mais suffisante pour notre propos.

1- *Les deux évènements à considérer pour étudier la période du signal lumineux sont les émissions consécutives de deux signaux.*
2- *La période propre de ce signal lumineux est celle mesurée à bord de la fusée :*
   $\Delta T_0 = 1/f = 1/5,0 = 0,20$ s
3- *La période mesurée par l'ami resté sur Terre est :*
   $\Delta T' = \gamma.\Delta T_0$ avec $\gamma = 1/\sqrt{(1-v^2/c^2)}$
   $\Delta T' = 0,36$ s avec $\gamma = 1,81$

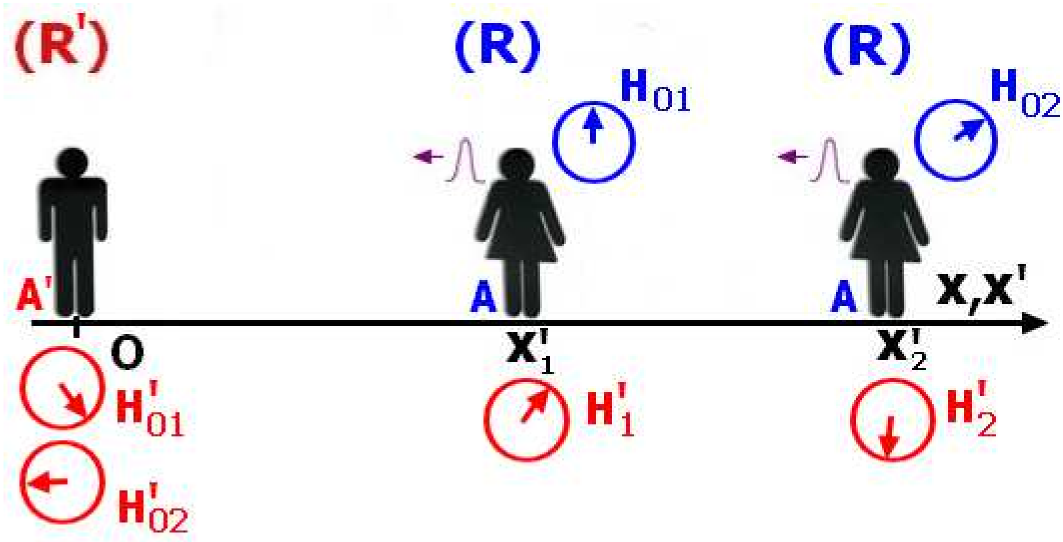
2. Analyse de l'énoncé

L'introduction ne pose pas de problème particulier mais il n'en est pas de même de la phrase « *Les durées propre ΔT_0 et mesurée $\Delta T'$ sont reliées par $\Delta T' = \gamma.\Delta T_0$* ». En effet, comme on le verra un peu plus loin, le terme « **durée mesurée** » que le programme officiel utilise à la place de la formulation universellement utilisée « **durée impropre** » est mal définie[1]. Que représente précisément ces deux notions dans le cadre de notre exercice ? Pour répondre à cette question il faut déjà définir complètement, comme cela est demandé

[1] La question ici n'est pas de savoir si les appellations de « mesurée » ou d' « impropre » sont sémantiquement satisfaisantes mais de se placer dans le contexte usuel et reconnu des ouvrages sur le relativité restreinte qui définissent soigneusement la signification des termes – ici « durée impropre » - en leur attachant une procédure de mesure qui fait totalement défaut dans le programme de TS, d'où les contresens et autres confusions rencontrés.

maladroitement à la question (1), les différents événements pertinents du problème.

Soit **(R)** le référentiel attaché à la fusée et **(R')** celui attaché à la Terre. Faisons un schéma pour illustrer notre étude.



Repérons les différents événements et leurs coordonnées (x,t) dans **(R)** et (x',t') dans **(R')**.

- E_1 : émission de l'impulsion (n) par l'observateur A au repos dans **(R)**
- E_2 : émission de l'impulsion (n+1) par l'observateur A au repos dans **(R)**
- E_3 : réception de l'impulsion (n) par l'observateur A' au repos dans **(R')**
- E_4 : réception de l'impulsion (n+1) par l'observateur A' au repos dans **(R')**

Evénements	**(R)**		**(R')**	
	x	***t***	***x'***	***t'***
E_1	0	t_{01}	x'_1	t'_1
E_2	0	t_{02}	x'_2	t'_2
E_3			0	t'_{01}
E_4			0	t'_{02}

L'intervalle de temps entre les événements E_1 et E_2 peut être étudié soit depuis le référentiel **(R)** soit depuis **(R')**.

- $\Delta T_0 = t_{02} - t_{01}$, représente la période d'émission du signal émis par A mesurée dans (**R**). C'est une durée propre puisqu'elle correspond à l'intervalle de temps entre deux événements se produisant au même lieu et mesuré par la même horloge H_0 au repos dans **(R)**.

- $\Delta T' = t'_2 - t'_1$ représente la période d'émission du signal émis par A mesurée dans **(R')**. Elle correspond à une durée impropre puisqu'elle s'identifie à l'intervalle de temps entre deux événements se produisant en deux lieux différents de **(R')** et mesuré par deux horloges distinctes H'_1 H'_2 au repos dans **(R')**. On a bien sûr $\Delta T' = \gamma.\Delta T_0$.

Nous nous intéresserons ensuite uniquement à l'intervalle de temps entre les événements E_3 et E_4 mesuré par A' dans le référentiel **(R')**[2].

- $\Delta T'_0 = t'_{02} - t'_{01}$ représente la période de réception du signal émis par A mesurée dans **(R')**. Elle correspond à une durée propre puisqu'elle s'identifie à l'intervalle de temps entre deux événements se produisant en un même lieux **(R')** et mesuré par une seule horloge H'_0 au repos dans **(R')**.

Remarquons que ce dernier intervalle de temps ne peut pas, a priori, correspondre à la première question « *Quels sont les deux événements à considérer pour étudier la période du signal lumineux envoyé par l'astronaute à son ami ?* » qui précise que l'on considère le signal émis (envoyé) par A.

3. Recherche de la « bonne » solution

L'étude et les remarques du paragraphe précédents nous obligent donc à répondre à cette première question « *Les événements E_1 et E_2* ». Ceci entraîne, comme indiqué ci dessus, la réponse immédiate à la seconde question $\Delta T' = \gamma.\Delta T_0$.

On en arrive à la troisième question et à la solution proposée qui démontrent une incompréhension notoire de leur rédacteur des fondements de la relativité restreinte : « *Quelle est la période mesurée de ce signal par l'ami resté sur Terre ?* ». En libellant la question de cette manière là on est obligé de considérer que l'ami (A') resté sur Terre **(R')** mesure **SEUL** et donc avec **UNE SEULE HORLOGE**, la sienne H'_0, l'intervalle de réception entre deux signaux, c'est à dire celui entre les événements E_3 et E_4 , donc $\Delta T'_0 = t'_{02} - t'_{01}$. Or nous ne pouvons pas écrire $\Delta T'_0 = \gamma.\Delta T_0$ et la solution proposée à la question est fausse. De ce fait il n'y a plus cohérence et continuité entre la réponse à lé première question (E_1 et E_2) et celle qu'il va falloir rechercher pour la troisième qui concerne E_3 et E_4. Comment alors répondre à cette dernière ? Détaillons la « bonne » solution.

Dans le référentiel **(R')** nous pouvons écrire que l'instant de réception t'_{01} du signal (n) est égal à celui de son émission t'_1 auquel on ajoute la durée de propagation de A en A'. Donc :

$$t'_{01} = t'_1 + x'_1 / c$$

Nous pouvons écrire la même chose pour le signal (n+1) :

$$t'_{02} = t'_2 + x'_2 / c$$

Or, entre x'_1 et x'_2 nous avons la relation $x'_2 = x'_1 + v.(t'_2 - t'_1)$.

[2] La première question de l'exercice ne peut pas concerner l'intervalle de temps entre E_3 et E_4 vu depuis **(R)**.

Finalement, après regroupement et réorganisation nous pouvons écrire :

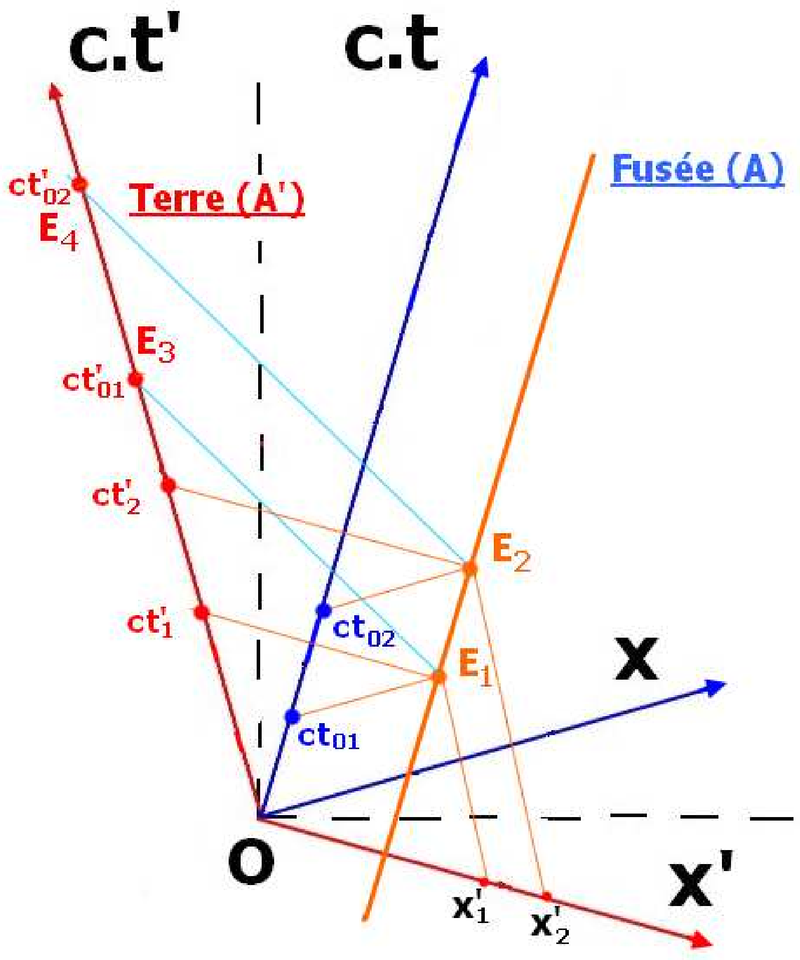
$$\Delta T'_0 = t'_{02} - t'_{01} = (t'_2 - t'_1).(1 + v/c) = \Delta T'.(1 + v/c)$$

Or $\Delta T' = \gamma.\Delta T_0$ ce qui nous permet d'écrire : $\Delta T'_0 = \gamma.\Delta T_0.(1 + v/c)$. Ici $\Delta T'_0$ est la période du signal reçu et ΔT_0 est celle du signal émis.
Exprimons γ et complétons le travail :

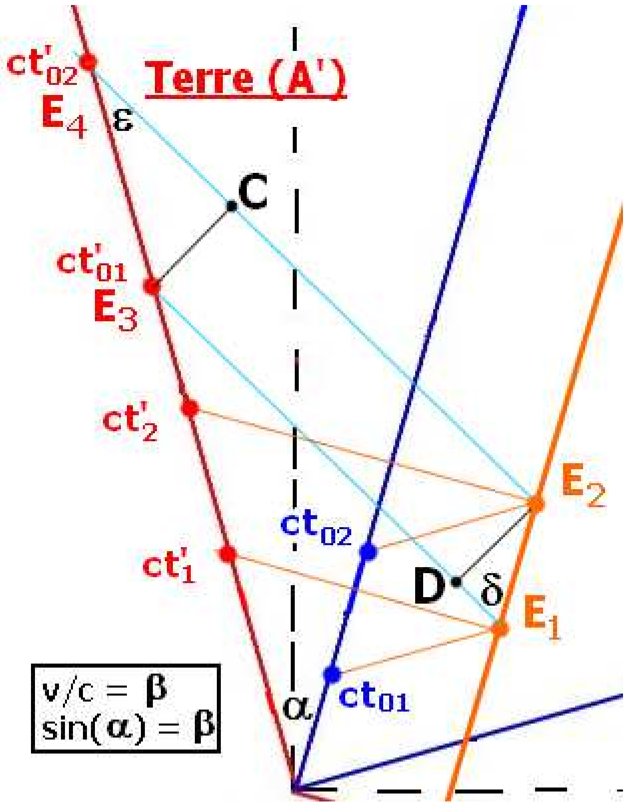
$$\Delta T'_0 = \Delta T_0.[1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}].(1 + v/c)$$
$$\Delta T'_0 = \Delta T_0.(1 + v/c)/\sqrt{(1 - v/c).(1 + v/c)}$$
$$\Delta T'_0 = \Delta T_0.\sqrt{(1 + v/c)}.\sqrt{(1 + v/c)}/\sqrt{(1 - v/c).(1 + v/c)}$$
$$\Delta T'_0 = \Delta T_0.\sqrt{(1 + v/c)/(1 - v/c)}$$

On a ici l'expression de l'effet Doppler relativiste. Numériquement nous obtenons, avec $v/c = 250000/300000 = 0{,}83$, une période du signal reçu de 0,66 s sachant qu'a l'émission cette période est de 0,20 s.

On peut étudier également cet exercice en s'appuyant sur un diagramme de Loedel avec les mêmes notations que celles définies précédemment.



Il est alors possible de retrouver les résultats précédents en raisonnant géométriquement sur la figure et en lui appliquant quelques relations trigonométriques. On a ci dessous repris le schéma précédant en y précisant les éléments nécessaires à la démonstration.



Pour retrouver la relation entre $\Delta T'_0$ et ΔT_0 on exprime les deux segments égaux E_2D et E_3C en fonction, respectivement, des segments E_1E_2 (égal à $c.\Delta T_0$) et E_3E_4 (égal à $c.\Delta T_0$) et des angles δ et ε.
On a alors :

$$\mathbf{E_2D = E_1E_2.sin(\delta)}$$
$$\mathbf{E_3C = E_3E_4.sin(\varepsilon)}$$

Comme $E_2D = E_3C$ on a finalement :

$$\mathbf{E_1E_2.sin(\delta) = E_3E_4.sin(\varepsilon) \text{ ou } \Delta T'_0 = [sin(\delta)/sin(\varepsilon)].\Delta T_0}$$

On montre facilement que :

$$\delta = \pi/4 + \alpha/2$$
$$\varepsilon = \pi/4 - \alpha/2$$

Après quelques calculs laborieux s'appuyant sur diverses formules trigonométriques on aboutit à :

$$\mathbf{\Delta T'_0 = \Delta T_0.[(cos(\alpha/2) + sin(\alpha/2)]/[(cos(\alpha/2) - sin(\alpha/2))]}$$

Dans un dernier effort (trigonométrique là encore !) on parvient à :

$$\Delta T'_0 = \sqrt{[1+\sin(\alpha)]/[1-\sin(\alpha))]}.\Delta T_0 \text{ ou } \Delta T'_0 = \sqrt{[1+\beta]/[1-\beta]}.\Delta T_0$$

ce qui est bien, là encore, la formule de l'effet Doppler relativiste.

On constate, dans ce cas là, que la méthode graphique est particulièrement lourde et n'est développée ici que pour en montrer les limites. Cependant il ne faut pas l'écarter d'emblée dans une étude cinématique relativiste car, même si son exploitation quantitative est souvent lourde, elle possède l'avantage de donner une visualisation immédiate et synthétique de la situation étudiée et de permettre de préciser sans ambiguïté la signification des différentes grandeurs spatiale et temporelle y intervenant.

Pierre MAGNIEN
11 mars 2016