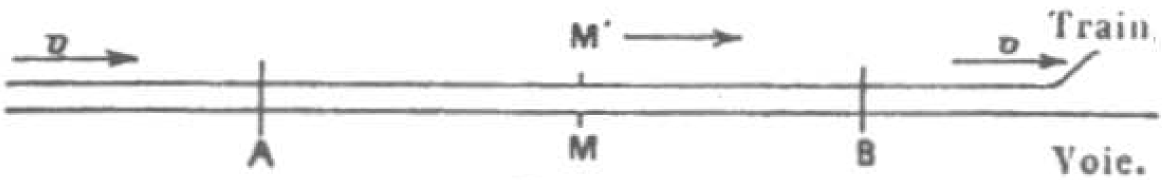
**THEORIE DE LA RELATIVITE RESTREINTE : QUESTIONS DIVERSES SUR LA SIMULTANEITE**

## 1. Introduction

Dans le texte « ***Théorie de la relativité restreinte : notion de temps propre, de temps impropre et de simultanéité*** » étaient abordés plusieurs concepts particulièrement importants en relativité restreinte (RR). Parmi ceux-ci celui de la simultanéité a emmené plusieurs lecteurs à souhaiter en approfondir la compréhension, en particulier à propos de l'extrait du livre[1] d'A. Einstein « ***La relativité*** ». Reprenons cela en détail.

## 2. Document à étudier et question posée

Dans son ouvrage A. Einstein écrit :

> *« Jusqu'à présent notre réflexion avait en vue un corps de référence particulier que nous désignions par la voie ferrée. Supposons un train très long se déplaçant sur cette dernière avec une vitesse constante v dans la direction indiquée sur la figure 1.*
>
> 
> 
>
> Fig. 1.
>
> *Les voyageurs de ce train auront avantage de se servir du train comme corps de référence rigide (système de coordonnées), auquel ils rapporteront tous les évènements. Tout évènement qui a lieu le long de la voie ferrée a aussi lieu en un point déterminé du train. La définition de la simultanéité peut aussi être formulée exactement de la même façon par rapport au train que par rapport à la voie. La question suivante se pose ainsi tout naturellement :*
>
> *Deux évènements (par exemples les deux éclairs A et B), qui sont simultanés par rapport à la voie, sont-ils aussi simultanés par rapport au train ? Nous montrerons tout à l'heure que la réponse doit être négative.*
>
> *Quand nous disons que les éclairs A et B sont simultanés par rapport à la voie ferrée nous entendons par là que les rayons issus des points A et B se rencontrent au milieu M de la distance A-B située sur la voie. Mais aux évènements A et B correspondent des endroits A et B dans le train. Soit M' le milieu de la droite A-B du train en marche. Ce point M' coïncide bien avec le point M à l'instant ou se produisent les éclairs vus du talus, mais il se déplace sur le dessin vers la droite avec la vitesse v. Si un observateur dans le train assis en M' n'était pas entraîné avec cette vitesse, il resterait d'une façon permanente en M et les rayons*

[1] Chapitre 9 de « La relativité » - Albert Einstein – Petite Bibliothèque Payot

*lumineux issus de A et de B l'atteindraient simultanément, c'est à dire que ces deux rayons se rencontreraient au point ou il se trouve. Mais en réalité il court (vu du talus) vers le rayon de lumière venant de B tandis qu'il fuit devant celui qui vient de A. Il verra, par conséquent, le rayon de lumière qui vient de B plus tôt que celui qui vient de A. Les observateurs qui se servent du train comme corps de référence doivent donc arriver à la conclusion que l'éclair B s'est produit antérieurement à l'éclair A. Nous aboutissons ainsi au résultat important suivant:*
*Des évènements qui sont simultanés par rapport à la voie ferrée ne sont pas simultanés par rapport au train et inversement (relativité de la simultanéité). Chaque corps de référence (système de coordonnées) a son temps propre ; une indication de temps n'a de sens que si l'on indique le corps de référence auquel elle se rapporte. »*

Les questions concernant ce texte sont les suivantes :

*« Dans l'exemple traité par Einstein à propos des deux impacts de foudre perçus par une personne sur le quai et une personne dans le train, je ne comprends pas l'explication donnée par Einstein, notamment cette phrase : « Mais en réalité il court (vu du talus) vers le rayon de lumière venant de B tandis qu'il fuit devant celui qui vient de A. Il verra, par conséquent, le rayon de lumière qui vient de B plus tôt que celui qui vient de A. »*

***Cette phrase me semble sous-entendre une additivité galiléenne des vitesses (du train et de la lumière) expliquant le décalage de perception entre les deux personnes alors que d'après le deuxième postulat d'Einstein, la lumière se déplace à la même vitesse pour les deux personnes (aussi bien celle attachée au train que celle présente sur le quai).***

*J'en conclu que la cause de la différence de perception n'est pas dû à une différence éventuelle de la lumière mais est présente dès le départ, au moment des impacts de foudre.*

*D'ailleurs sur le diagramme de Loedel, on voit bien que les événements $E_1$ et $E_2$ (les impacts de foudre) sont simultanés dans le repère du quai (la droite $[E_1E_2]$ est parallèle à l'axe des (x) du repère lié au quai) alors qu'ils ne le sont plus dans le repère du train. L'intervalle de temps entre $E_1$ et $E_2$ est d'ailleurs le même que celui entre $E_5$ et $E_6$ (perception des éclairs par le passager embarqué) sur l'axe ct' du repère du train. »*

Essayons de détailler cet exemple pour répondre à ces interrogations.

## 3. Approfondissement de la question

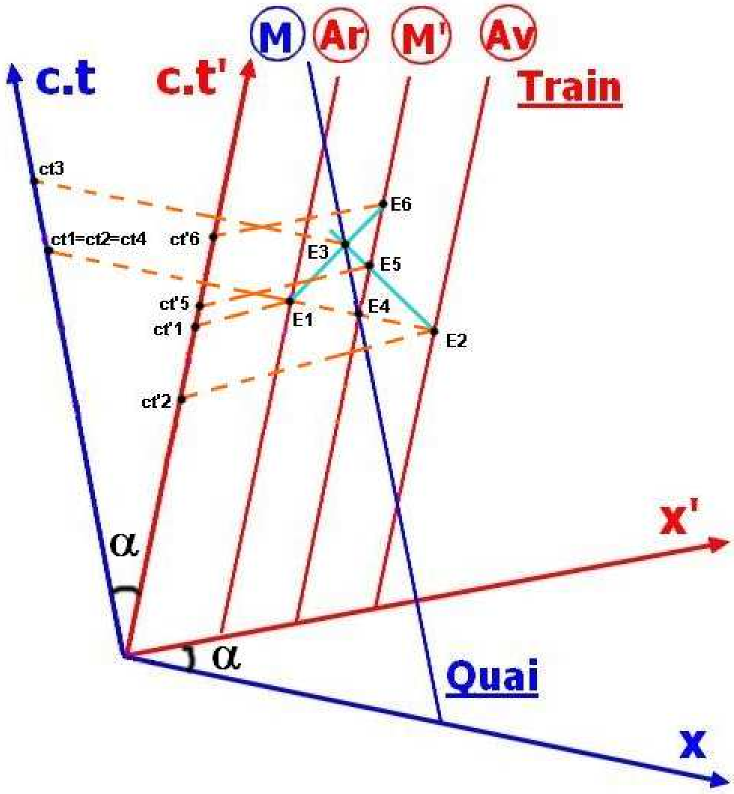
Reprenons et complétons les explications du texte de mon document en précisant, par rapport à celui ci, un certains nombres de points. Soient :

- **(R)** est le référentiel attaché au quai[2] et **(R')** celui attaché au train
- $E_1$ : événement « frappe de la foudre à l'arrière du train »

[2] Les termes « quai », « voie », « talus » représentent tous le même référentiel **(R)**.

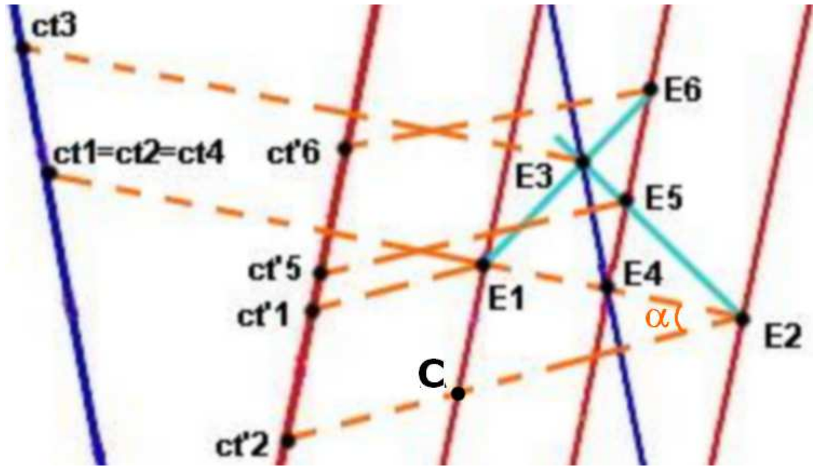
- $E_2$ : événement « frappe de la foudre à l'avant du train »
- $E_{3AR}$ : événement « perception par l'observateur installé en M sur le quai de la frappe avant du train»
- $E_{3AV}$ : événement « perception par l'observateur installé en M sur le quai de la frappe arrière du train». On notera $E_3$ pour $E_{3AR}$ et $E_{3AV}$ qui sont, par hypothèse, simultanés.
- $E_4$ : événement « coïncidence des positions de l'observateur en M sur le quai et de l'observateur en M' dans le train »
- $E_5$ : événement « perception par l'observateur installé en M' dans le train de la frappe avant du train »
- $E_6$ : événement « perception par l'observateur installé en M' dans le train de la frappe arrière du train »
- Par hypothèse explicite dans l'exemple les événements $E_1$, $E_2$, et $E_4$ sont simultanés dans **(R)** pour l'observateur installé en M

Tout ceci nous donne les deux diagrammes de Loedel présents dans mon document mais complété ici :




On constate bien que de tels diagrammes permettent de vérifier la non simultanéité dans un référentiel d'événements qui le sont dans un autre. Il est important de noter que dans son texte A. Einstein s'intéresse à l'intervalle de temps séparant les deux événements $E_1$ et $E_2$ : par hypothèse ils sont simultanés dans **(R)** ($t_1 = t_2$). La « démonstration » cherche à montrer qu'ils ne le sont pas[3] dans **(R')** ($t'_1 \neq t'_2$). On peut d'ailleurs réaliser le calcul de ($t'_1 - t'_2$) à partir du diagramme.

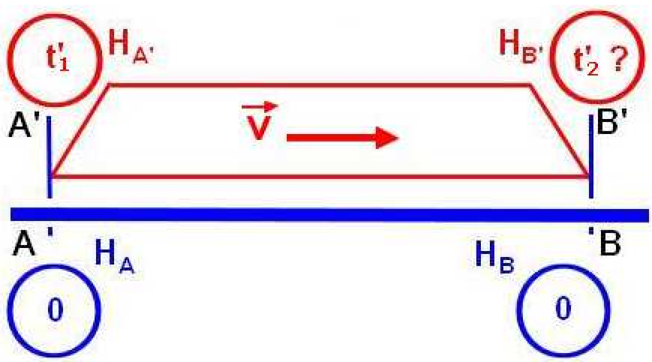
[3] Dans mon texte « *Théorie de la relativité restreinte : notion de temps propre, de temps impropre et de simultanéité* », page 9, j'indique « *Les lignes de lumière se croisent sur la ligne d'univers du point M ce qui*




Considérons le triangle $CE_1E_2$ rectangle en $E_1$. L'angle $(E_1E_2,E_2C)$ vaut $\alpha$ qui, dans un diagramme de Loedel, a son sinus égal à $\beta$, c'est à dire v/c. On peut écrire dans ce triangle $CE_1 = CE_2.\sin(\alpha)$. Or $CE_2$ est la longueur propre du train c'est à dire celle mesurée par un observateur au repos dans **(R')**. On notera $CE_2 = L'$. Comme $CE_1 = c.(t'_1 - t'_2)$ nous avons finalement :

$$c.(t'_1 - t'_2) = L'.\beta = L'.v/c \;\Rightarrow\; \mathbf{(t'_1 - t'_2) = L'.v/c^2}$$

Pour mieux détailler la logique à laquelle obéit la notion de simultanéité en relativité restreinte, il est aussi possible de calculer directement en raisonnant sur les indications des horloges dans les deux référentiels aux différents moments pertinents du problème et en interprétant correctement les hypothèses de départ. Pour conduire notre raisonnement équipons avec des horloges les points A et B repérés dans **(R)** et A', B' dans **(R')**[4]. On considère que **(R')** se déplace par rapport à **(R)** à la vitesse **v** orientée de gauche à droite.



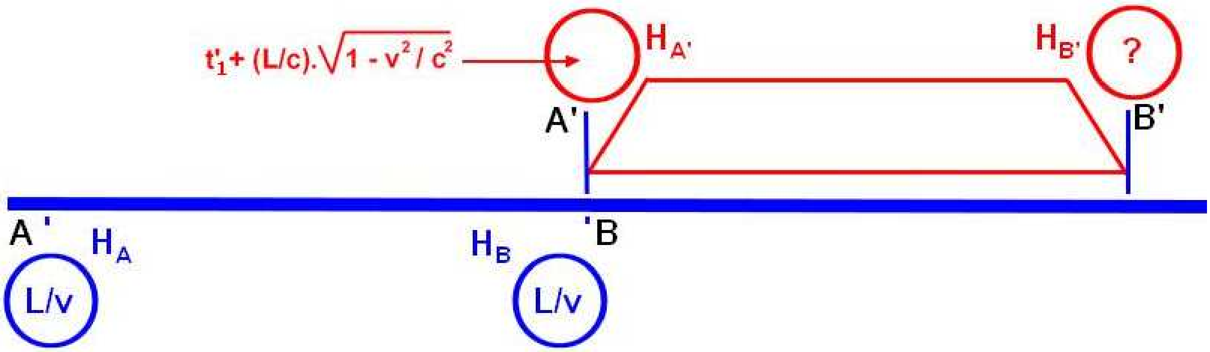

---

*signifie que les réceptions des flashs y sont simultanées. Par contre en M', solidaire du référentiel **(R')** lié au train, la lumière en provenance de l'avant du train y parvient plus tôt que celle émise à l'arrière.* » Cette remarque vraie n'est pas pertinente par rapport à la relativité puisqu'il faut comparer les intervalles de temps mesurés dans deux référentiels différents **entre les mêmes événements**, ce qui n'est pas le cas ici où l'on considère, d'une part, l'intervalle de réception des flashs lumineux en M pour l'un des observateur et, d'autre part, celui de la réception des mêmes flashs en M' pour l'autre. En mécanique classique la remarque reste vraie.

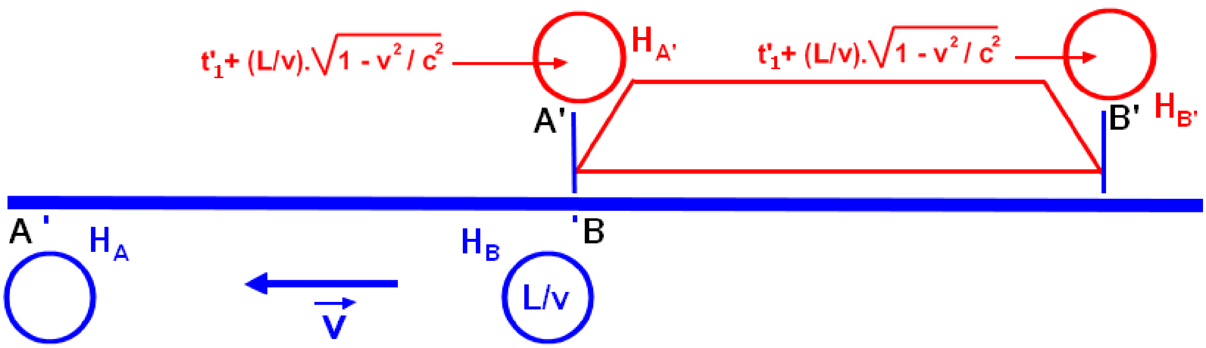
[4] Einstein écrit « *aux évènements A et B correspondent des endroits A et B dans le train* ». Nous nommons ici A' et B' ces points correspondants du train dans **(R')**.

Ce premier schéma est tracé dans **(R)** où les événements $E_1$ et $E_2$ sont simultanés et pris comme origine des temps ($t_1 = t_2 = t_4 = 0$) : $H_A$ et $H_B$ donnent donc la même indication. $H_{A'}$ indique un temps $t'_1$ – conformément à notre diagramme de Loedel - mais celui désigné par $H_{B'}$, c'est à dire $t'_2$, n'est pas encore déterminé : l'objectif de notre démonstration va être de calculer $t'_2$ en fonction $t'_1$.

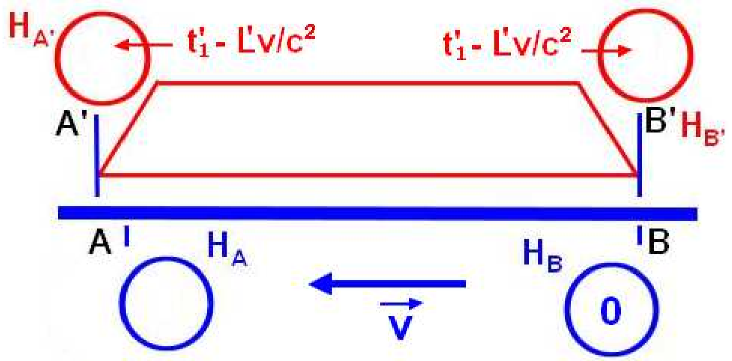
Pour cela considérons maintenant l'instant où A' passe devant B, toujours du point de vue d'un observateur de **(R)**, au repos sur le quai, et déterminons les indications données par les horloges $H_A$, $H_B$ et $H_{A'}$. Le point A' du train s'est déplacé dans **(R)** d'une distance L en passant de A en B. Les horloges $H_A$ et $H_B$ – toujours synchronisées puisqu'en repos relatif – ont donc avancé de L/v qui est le temps mis par A', dans **(R)**, pour passer de A en B. C'est un intervalle **impropre** puisqu'il faut deux horloges pour le déterminer. L'intervalle de temps propre correspondant est celui mesuré par $H_{A'}$ présente sur les lieux des deux événements. Sa valeur est donc donnée par la relation entre temps propre et temps impropre et vaut donc $(L/v).\sqrt{(1-v^2/c^2)}$. L'horloge $H_{A'}$ marquera donc, comme indiqué ci dessous, $t'+(L/v).\sqrt{(1-v^2/c^2)}$.



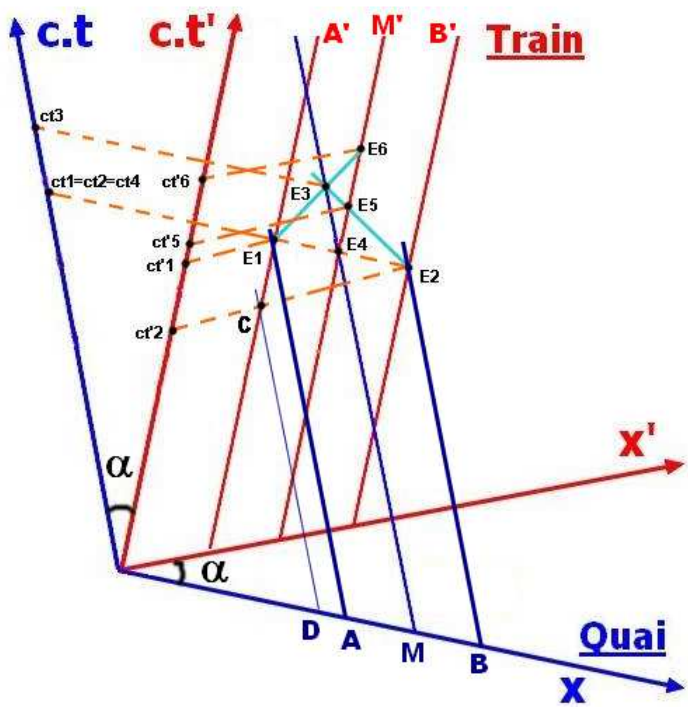

Considérons maintenant le même événement – coïncidence de A' et de B – mais vu depuis le référentiel **(R')** du train. L'horloge $H_{A'}$ indique bien sûr $t'+(L/v).\sqrt{(1-v^2/c^2)}$ et $H_B$ $(L/v)$, comme précédemment. $H_{A'}$ et $H_{B'}$, synchronisées et en repos relatif, vont donc donner la même indication.



Considérons, pour terminer et toujours dans le référentiel **(R')**, les positions relatifs du train et du quai à l'instant qui précède où B passe B'. Nous savons que lors de cet événement l'horloge $H_B$ marque 0. Donc entre l'événement « B passe devant B' » et l'événement « B passe devant A' » $H_B$ parcourt un intervalle de temps propre L/v. Les horloges $H_{B'}$ et $H_{A'}$ vont alors définir un intervalle de temps impropre $(L/v).\sqrt{(1-v^2/c^2)}$. De ce fait l'horloge $H_{B'}$ indiquera l'instant $t'+(L/v).\sqrt{(1-v^2/c^2)}-(L/v)/\sqrt{(1-v^2/c^2)}$. Tout calcul fait, on trouve, pour l'indication de $H_{B'}$, [t' – L'v/c$^2$].

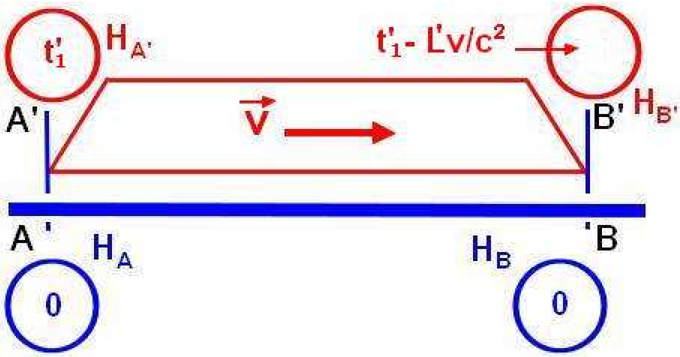



Remarquons que sur le schéma ci dessus nous n'avons pas fait figurer A en coïncidence avec A' car, dans **(R')**, à l'instant t' – L'v/c$^2$ où B' est en face de B, A' n'est pas en face de A. On peut le vérifier sur le diagramme de Loedel : à l'instant t'2 le point de la ligne d'univers de A' constitue l'événement C dont la position correspond au point D du quai qui se trouve à une abscisse antérieure à celle du point A.




Nous pouvons revenir maintenant dans le référentiel **(R)** du quai à l'instant correspondant à la chute de foudre en A et B correspondant au premier schéma de cette démonstration pour compléter l'indication de l'horloge $H_{B'}$. Pour un observateur au repos dans le train la foudre tombe en premier en B′, à l'instant $t'_2$ précédant de $L'v/c^2$ l'instant $t'_1$ où l'autre éclair atteint le point A′. Nous trouvons le même résultat que celui obtenu en raisonnant sur le diagramme de Loedel : $\mathbf{(t'_1 - t'_2) = L'.v/c^2}$

Le premier schéma complété est alors le suivant :




Le texte d'Einstein est donc consacré à la comparaison de la simultanéité relative de deux événements [$E_1$, $E_2$] dans deux référentiels en mouvement relatif : la chute de la foudre en deux points, repérés (A,B) dans un référentiel **(R)** et (A′,B′) dans un autre **(R′)**. **Il ne s'intéresse pas à la différence de réception par les deux observateurs** au repos, pour l'un, dans **(R)** et, pour l'autre, dans **(R′)**. Ces réceptions ne constituent pas un seul couple d'événements comme [$E_1$, $E_2$] étudiés dans **(R)** et **(R′)** mais deux couples [$E_{3A}$, $E_{3B}$] étudié dans **(R)** et [$E_5$, $E_6$] étudié dans **(R′)**. En mécanique newtonienne il est tout à fait possible que la réception des signaux par l'un des observateurs soit simultanée et qu'elle ne le soit pas pour l'autre. Par contre, dans le même cadre théorique, si deux événements sont simultanés dans un référentiel ils le sont dans tous les référentiels : on parle de simultanéité absolue qui est indépendante du référentiel d'étude.

La phrase d'Einstein « *Mais en réalité il court (vu du talus) vers le rayon de lumière venant de B tandis qu'il fuit devant celui qui vient de A. Il verra, par conséquent, le rayon de lumière qui vient de B plus tôt que celui qui vient de A.* » ne sous-entend pas une additivité galiléenne des vitesses : que ce soit l'observateur au repos sur le quai ou celui au repos dans le train la vitesse de la lumière est toujours égale à c.

En **RR** il faut toujours avoir à l'esprit quelques points fondamentaux :

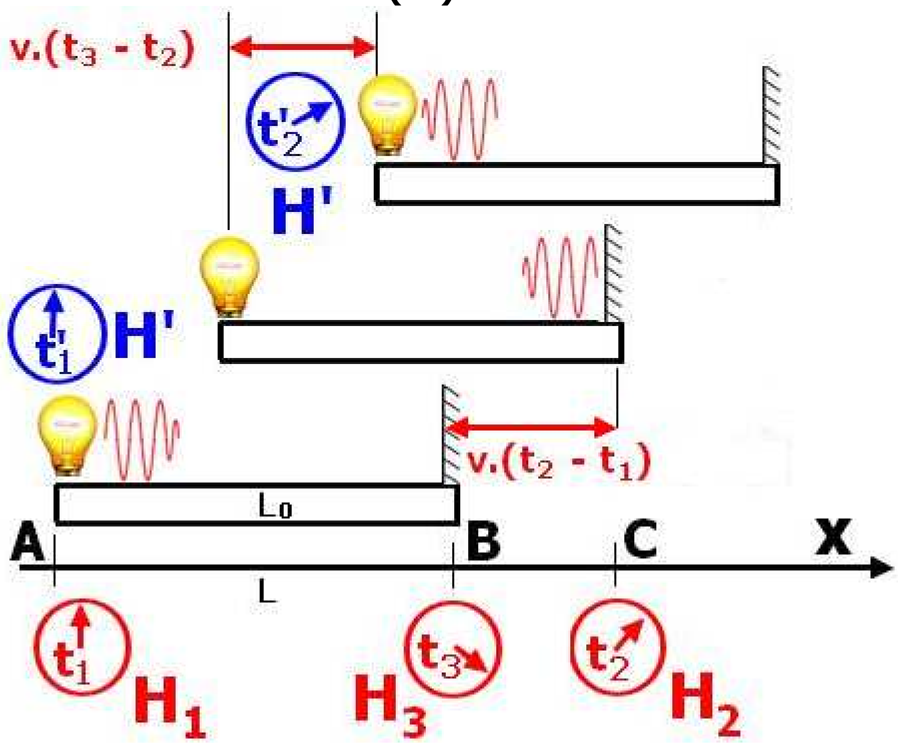
1. La date d'un événement dans un référentiel **(R)** est mesurée par une horloge au repos dans **(R)** et placée là où l'événement se produit.
2. Pour obtenir des résultats cohérents de datation de différents événements il faut au préalable synchroniser entre elles toutes les horloges du référentiel d'étude **(R)**.
3. Les coordonnées d'un événement dans un référentiel **(R)** sont celles d'une « borne » au repos dans **(R)** et placée là où l'événement se produit.

4. Le désaccord entre deux observateurs en mouvement relatif sur l'éventuelle simultanéité de deux événements est fondamentalement lié à l'existence d'une constante universelle de structure de l'espace-temps ayant la dimension d'une vitesse et qui est aussi égale à la vitesse de la lumière qui se propage de la même façon dans tous les référentiels.

## 4. Compléments

Pour terminer montrons que la contraction des longueurs est une conséquence inéluctable de la dilatation des temps qui, elle même , comme on vient de le voir, est une conséquence de l'universalité de c.

Considérons un système (lampe + miroir) embarqué sur une règle mobile – à laquelle on attache un référentiel **(R')** - de longueur propre $L_0$ en mouvement par rapport à un observateur au repos dans un référentiel **(R)**. A l'instant $t_1$ mesuré sur l'horloge $H_1$ au repos dans **(R)** une impulsion lumineuse est émise par la lampe. Elle se réfléchit sur un miroir à l'instant $t_2$ et revient à sa source à l'instant $t_3$ mesurés respectivement sur $H_2$ et $H_3$. Les trois horloges utilisées ici sont celles au repos dans **(R)** aux différents lieux où se produisent les événements considérés. Une seule horloge H est nécessaire dans **(R')** – référentiel attaché à la règle - pour mesurer la durée de l'aller-retour de l'impulsion puisque l'émission et la réception de cette dernière se produisent au même endroit de **(R')**.




Dans **(R')** nous pouvons écrire :

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 2L_0/c$$

$\Delta t'$ étant un intervalle de temps propre mesuré par une seule horloge.

Dans **(R)** le calcul est un peu plus compliqué : dans l'intervalle de temps $\Delta t_1 = (t_2 - t_1)$ où l'impulsion lumineuse parcourt AB, la règle a avancé de $\boldsymbol{v.\Delta t_1}$. La distance parcourue par la lumière est donc :

$$c.\Delta t_1 = L + v.\Delta t_1$$

On en tire $\Delta t_1$ :

$$\Delta t_1 = L/(c-v)\,.$$

On peut faire le même raisonnement pour la durée $\Delta t_2 = (t_3 - t_2)$, mesurée encore dans **(R)**, de son retour. Durant ce temps la règle a poursuivi sa progression de $\boldsymbol{v.\Delta t_2}$. On a alors :

$$c.\Delta t_2 = L - v.\Delta t_2$$

On en déduit que :

$$\Delta t_2 = L/(c+v)$$

Finalement la durée, mesurée dans **(R)**, de l'aller-retour de l'impulsion est :

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = L/(c-v) + L/(c+v)$$

Tout calcul fait, nous trouvons que :

$$\Delta t = (2L/c)/(1 - v^2/c^2)$$

$\Delta t$ est un intervalle de temps impropre dans **(R)** puisqu'il faut plus d'une horloge pour le mesurer. On peut donc appliquer entre $\Delta t'$ et $\Delta t$ la relation exprimant en **RR** la dilatation du temps :

$$\Delta t' = \Delta t\Big/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$$

En remplaçant $\Delta t'$ et $\Delta t$ par leurs expressions on en déduit L en fonction de $L_0$ :

$$(2L_0 / c) = (2L/c).[1\big/(1 - v^2/c^2)].\sqrt{(1 - v^2/c^2)} \qquad \Rightarrow \qquad L = L_0.\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$$

On a bien retrouvé l'expression de la contraction des longueurs en utilisant :

- La constance de la vitesse de la lumière
- L'expression de la dilatation relativiste des temps

**Pierre MAGNIEN**
**05 mars 2016**