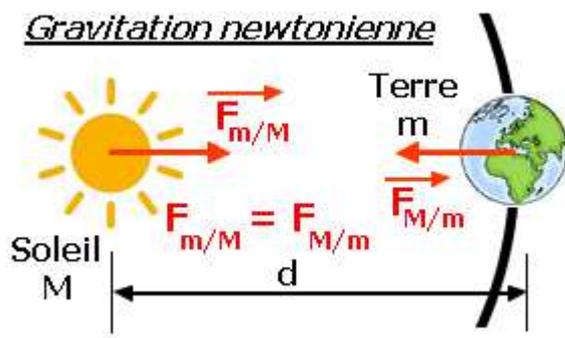


RELATIVITÉ GÉNÉRALE : POURQUOI LA DÉFORMATION D'UNE MEMBRANE ÉLASTIQUE N'EST PAS UNE BONNE IMAGE DE LA GRAVITATION

Introduction

La relativité générale¹ (**RG**) développée entre 1907 et 1915 par Albert Einstein (1879 / 1955) a rendu obsolète le modèle newtonien de la mécanique : la gravitation n'est plus une force s'exerçant à distance entre deux corps massifs mais une déformation de l'espace-temps créée par la présence des objets concernés. Si le concept de force nous est familier celui d'espace-temps et plus encore celui de sa déformation le sont beaucoup moins. Pour tenter de faire comprendre ce que signifie l'expression « déformation de l'espace-temps » de nombreux auteurs et vulgarisateurs utilisent une analogie bien connue, celle de la toile élastique déformée par la présence d'une boule pesante placée en son centre. Nous allons montrer dans cet article que cette image a plusieurs inconvénients importants.

Chez Newton nous pouvons représenter l'attraction gravitationnelle, entre le



Soleil et la Terre par exemple, selon le schéma suivant où les forces en présence sont liées par la relation vectorielle suivante :

$$\vec{F}_{m/M} = -\vec{F}_{M/m}$$

L'intensité de ces forces est donnée par :

$$F_{m/M} = F_{M/m} = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}$$

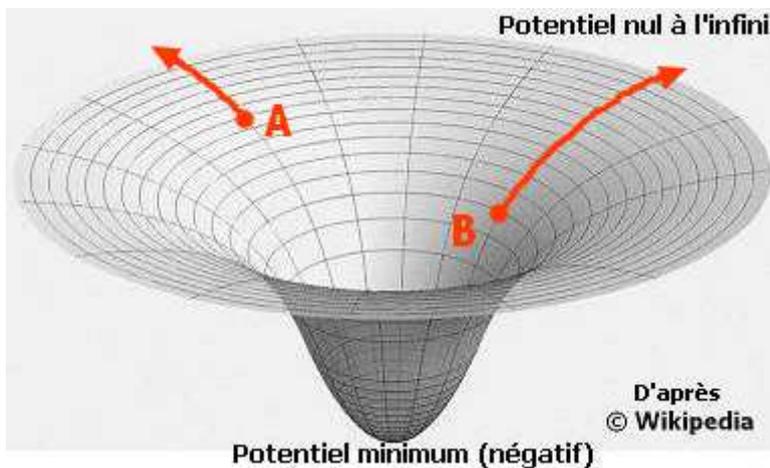
G est la constante de gravitation universelle et sa valeur est :

$$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Pour décrire, dans le modèle newtonien, la structure globale du champ gravitationnel créé par un objet de masse M on introduit le concept de *potentiel gravitationnel*. Sous ce terme se cache une notion assez simple : le potentiel gravitationnel créé par une masse M en un point de l'espace est égal au travail (moteur) changé de signe que doit produire la force à exercer pour déplacer un objet de masse unité soumis à l'attraction gravitationnelle de M

¹ Voir l'article « La relativité générale : la longue marche d'Einstein » de Pierre Magnien sur le site du CLEA à l'URL suivante http://clea-astro.eu/lunap/Relativite/relativite-restreinte-principes-et-applications/HISTOIRE_RG.pdf

depuis ce point jusqu'à l'infini². En chaque point de l'espace ce potentiel a donc une valeur bien définie dépendant de sa distance à la masse attractive.



La figure ci dessous représente, dans son plan équatorial, le potentiel gravitationnel créé par une masse sphérique. La force gravitationnelle étant toujours attractive, la définition du potentiel oblige à prendre le signe (-) pour sa valeur, d'où sa représentation en forme de « cuvette »³.

On a représenté sur cette figure deux points A et B

plongés dans le champ gravitationnel entourant la masse M et où sont placées deux masses unité. Le premier point, plus éloigné de M que le second, demande un travail \mathbf{W} moins important que le second pour déplacer à l'infini la masse qui s'y trouve. On a donc $\mathbf{W}_A < \mathbf{W}_B$. Or la définition du potentiel, noté \mathbf{V} , nous permet d'écrire : $\mathbf{V}_A = - \mathbf{W}_A$ et $\mathbf{V}_B = - \mathbf{W}_B$ ce qui nous donne finalement $\mathbf{V}_A > \mathbf{V}_B$ sachant que les deux valeurs sont négatives. De par sa définition le potentiel donne donc accès à l'énergie gravitationnelle emmagasinée dans un corps de masse m situé à une distance r de l'astre central de masse M.

Comme nous allons le voir, ce diagramme, proche d'un autre en rapport avec la courbure de la partie spatiale de l'espace-temps et que l'on rencontre en **RG**, est en lien avec l'analogie que nous étudions dans cet article. Chez Einstein nous devons renoncer au concept de force gravitationnelle⁴ et la gravitation doit être considérée comme une manifestation de la déformation de l'espace-temps. Il faut donc rechercher, s'il existe, un autre moyen de visualiser cette interaction. Or, contrairement au modèle classique dans lequel une force - notion facilement accessible au sens commun - est associée à un objet mathématiquement aisé à comprendre, le vecteur, il n'en est pas de même en **RG** où l'espace-temps est un concept abstrait difficilement représentable visuellement. Ça n'est pas gênant pour les spécialistes qui travaillent ici sans difficulté avec des objets mathématiques abstraits adaptés mais, dans le cadre d'une tentative de visualisation, il est nécessaire de rechercher un outil approprié. Comme dans cette théorie la gravitation est une conséquence de la courbure de l'espace-temps en présence d'une masse.

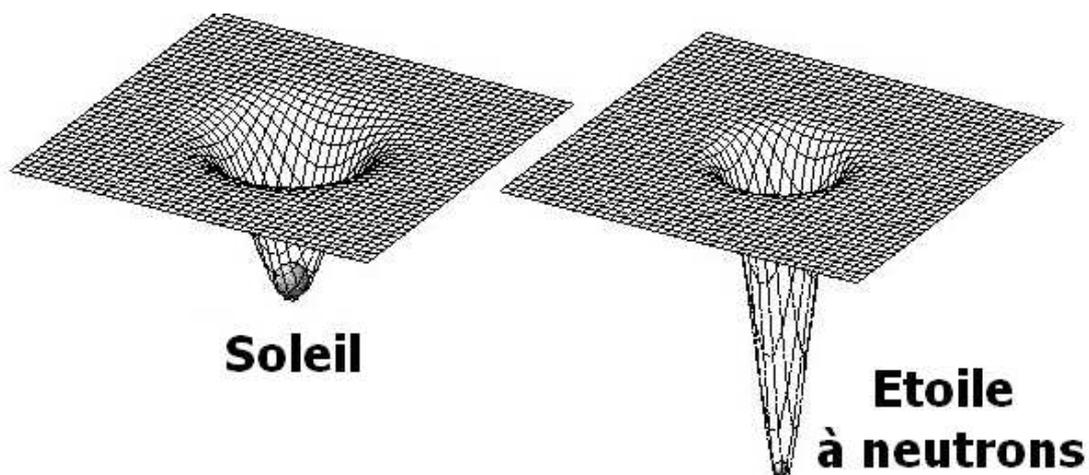
² A « l'infini » signifie ici « loin de l'objet de masse M » donc dans un lieu où il est logique de prendre la valeur du potentiel égale à zéro.

³ En électrostatique le potentiel créé par un objet chargé positivement est toujours positif puisque une charge unité placée à proximité subit une force répulsive et le diagramme représenté ci dessus est en forme de cône.

⁴ Mais on ne renonce pas au concept de potentiel gravitationnel qui est toujours pertinent.

En **RG** cet outil est appelé un diagramme de plongement. C'est « *un diagramme où l'on visualise la courbure [spatiale] d'une surface à 2 dimensions en la plongeant dans un espace plat à 3 dimensions.*⁵ ». La surface choisie correspond au plan équatorial de l'objet à l'origine de la courbure. On pourrait croire que cette troisième dimension d'un diagramme de plongement correspond à celle de notre environnement spatial habituel. Mais cet espace euclidien de plongement n'est pas celui de notre réalité physique et **cette troisième dimension n'est donc pas notre « hauteur » mais l'axe permettant de représenter la courbure de la partie spatiale de l'espace-temps à proximité d'une masse.** Pour nous, elle permet en particulier de visualiser⁶ simplement certaines propriétés géométriques d'une solution importante des équations d'Albert Einstein trouvées, dès 1916, par **Karl Schwarzschild** (1873 / 1916). Ce dernier est parvenu à calculer la courbure de l'espace-temps créé par un objet sphérique quelconque – une étoile en général – qui ne tourne pas.

Le schéma figurant ci dessous montre l'aspect de ce diagramme de plongement tracé pour illustrer, dans le plan équatorial, la courbure de la partie spatiale pour deux cas : à gauche celui d'une étoile ordinaire, comme le Soleil, et à droite celui d'une étoile à neutrons. Ces dernières concentrent sous un très petit volume⁷ une masse comprise entre 1,4 et 3,2 fois celle du Soleil et, de ce fait, déforme beaucoup plus l'espace qui l'entoure. Comme on peut le voir sur le schéma ci dessous il ressemble beaucoup à celui qui illustre la distribution du potentiel gravitationnel autour d'une masse sphérique. Cette similitude s'explique bien par le fait que la mécanique newtonienne et la **RG** doivent converger vers les mêmes solutions pour les champs gravitationnels faibles.

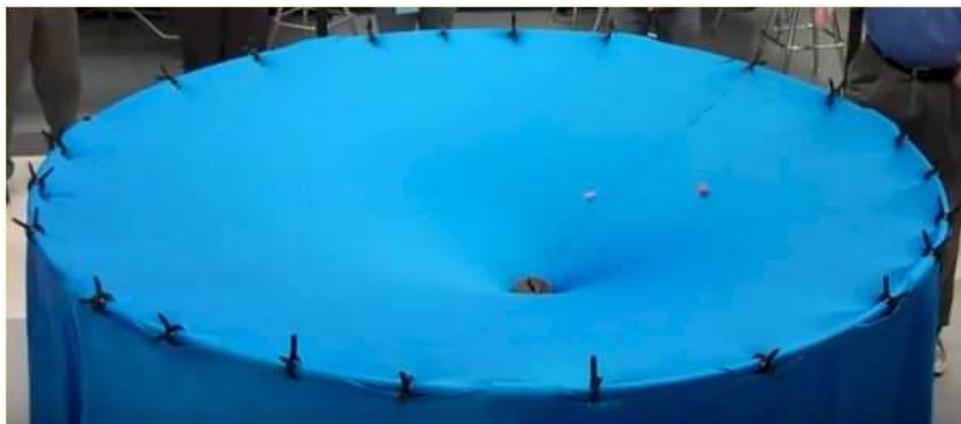


⁵ Kip Thorne dans « Trous noirs et distorsion du temps » - Flammarion / Collection Champs Sciences. Cet excellent ouvrage a inspiré plusieurs parties de cet article.

⁶ Pour une définition plus rigoureuse nous pouvons dire qu'un diagramme de plongement est une surface bidimensionnelle construite dans un espace euclidien tridimensionnel et qui a la même métrique (relation entre les coordonnées de deux points infiniment proches qui se ramène au théorème de Pythagore dans notre espace courant) qu'une tranche équatoriale passant par le centre de l'objet. Dans l'espace-temps de Schwarzschild, introduit quelques lignes plus loin, ce diagramme de plongement est appelé paraboloïde de Flamm.

⁷ Le rayon d'une étoile à neutrons est de l'ordre de quelques dizaine de kilomètres.

Ce diagramme a comme limite principale de ne représenter que la partie spatiale de la déformation de l'espace-temps entourant l'objet concerné. Son aspect caractéristique⁸ a cependant donné l'idée d'une analogie maintenant bien connue, celle de la membrane élastique creusée en son centre par la présence d'un objet lourd.



© Atelier PTSOS - Lycée de Los Gatos Californie -USA

Or, comme nous allons le voir maintenant, cette analogie a plus d'inconvénients que d'avantages.

Exploitation de l'analogie de la membrane élastique

L'idée semble, au départ, intéressante car, alors que peu de gens peuvent saisir les subtilités des géométries non euclidiennes et du calcul tensoriel, chacun d'entre nous peut visualiser le mouvement le long d'une courbe fermée d'une balle roulant sur une feuille de caoutchouc déformée.

Comparaison des orbites réelles et des orbites simulées

Il est facile de mettre en place une telle démonstration dans laquelle une bille se déplace autour d'une masse centrale qui déforme une toile élastique comme celle que l'on rencontre dans les trampolines. Mais, avant même d'aborder son éventuelle pertinence pour illustrer la **RG**, il y a cependant une question qui vient alors à l'esprit : la trajectoire d'une telle bille est-elle identique à celle d'une planète en orbite autour d'une étoile ? Les études théoriques démontrent et les expériences confirment qu'une telle feuille déformée par une masse centrale ne peut tout simplement pas adopter une forme permettant la reproduction des orbites réelles des objets du Système solaire dans l'espace-temps ! De plus on peut montrer que les propriétés du matériau élastique lui-même peuvent avoir une influence plus importante sur le mouvement de la bille que la masse centrale qui le déforme. C'est tout à fait différent de ce qui se passe dans l'espace-temps où, dans un système à deux corps, le

⁸ Le diagramme du potentiel newtonien, figuré à la page précédente, et ce diagramme de plongement se ressemblent clairement. Bien qu'ils ne représentent pas la même chose ceci n'est pas un hasard car, en **RG**, le potentiel et la courbure sont liés par une relation mathématique particulière.

mouvement d'une planète n'est déterminé que par la masse de l'objet le déformant.

Voyons cela de plus près. Dans son numéro de Décembre 2013 l'*American Journal of Physics* publie un article de Chad Middleton et Michael Langston de la Colorado Mesa University (Grand Junction - Colorado - USA) intitulé « *Circular orbits on a warped spandex fabric* » ou « *Orbites circulaires sur un tissu d'élasthanne⁹ déformé* ». Ils commencent par déterminer les équations régissant le mouvement d'une bille roulant sur la surface creusée qui se forme lorsqu'une masse centrale déforme une feuille d'élasthanne. Les résultats obtenus par ce calcul constitue une surprise lorsqu'on les compare à ceux fournis par la **RG**. Par exemple, dans l'espace-temps relativiste traité en champ faible, les équations de la **RG** produisent, comme l'approche newtonienne, la fameuse relation de Kepler selon laquelle le carré de la période orbitale est proportionnel au cube du rayon, en d'autres termes T^2 est proportionnel à r^3 . Mais sur une feuille élastique légèrement déformée, les calculs montrent que cette relation est inversée : T^3 est proportionnel à r^2 ! Et les coefficients changent à mesure que la déformation augmente. Pour une feuille fortement déformée, Middleton et Langston montrent que T est en fait proportionnel à r . Ainsi, le mouvement d'une bille sur une feuille élastique déformée n'est pas identique au mouvement d'une planète autour d'une étoile : une feuille élastique déformée par une masse centrale ne peut jamais prendre une forme reproduisant les effets gravitationnels de l'espace-temps de la **RG**, ni même ce qu'il en est en mécanique newtonienne.

Middleton et Langston ont testé ensuite expérimentalement leur modèle mathématique en mesurant le mouvement d'une bille sur une feuille d'élasthanne déformée. Cela confirme leur conclusion théorique : l'analogie de la feuille souple avec l'espace-temps déformé par un objet sphérique est fondamentalement erronée. Elle ne peut tout simplement pas reproduire quantitativement le mouvement prédit par la **RG**.

Autres raisons plus profondes pour renoncer à l'analogie

La similitude visuelle que nous identifions entre un diagramme de plongement, parfaitement défini mathématiquement en **RG**, et l'aspect d'une toile élastique déformée par un objet pesant placé en son centre peut nous faire croire à une similitude plus profonde. Il n'en est rien pour plusieurs raisons.

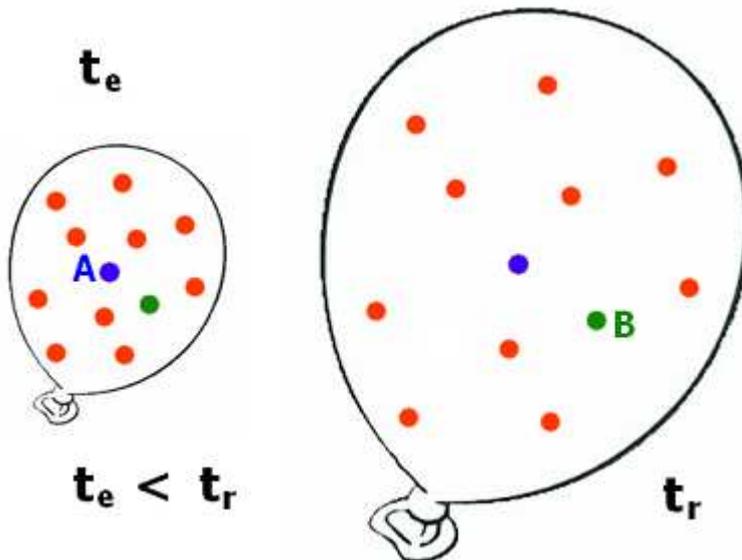
Tout d'abord la surface de la feuille élastique présente une courbure extrinsèque, c'est à dire nécessite une troisième dimension spatiale pour exister. Les objets peuvent alors se déplacer librement sur la surface mais la courbure de cette dernière dans la direction verticale ne leur permet pas cependant de s'y déplacer librement. La courbure de l'espace-temps en **RG** est intrinsèque et n'implique pas de dimension supplémentaire dans lequel serait

⁹ L'élasthanne (parfois appelé Spandex ou Lycra) est une matière synthétique qu'on trouve dans les vêtements et qui possède des propriétés élastiques exceptionnelles.

plongé notre Univers. Ce type de courbure est donc plus abstrait et ne peut être décrit correctement que mathématiquement.

Un des problèmes de cette analogie avec une toile élastique est donc de nous donner l'impression que la courbure de l'espace-temps est du même type que celle que nous associons à une sphère ordinaire, surface de dimension 2 plongée dans notre espace euclidien de dimension 3. Insistons sur le fait que dans le premier cas – celui de l'espace-temps – nous avons une courbure intrinsèque alors que dans le second – celui de la sphère – il s'agit d'une courbure extrinsèque.

On rencontre dans le cadre de la vulgarisation de la **RG** une autre analogie pour laquelle il existe une limite du même type : il s'agit de la représentation imagée de l'expansion isotrope¹⁰ de l'espace-temps de notre Univers par un ballon que l'on gonfle et sur lequel sont collées des pastilles représentant les galaxies.



Les pastilles s'écartent les unes les autres au fur et à mesure que le ballon se gonfle et ceci d'autant plus « vite » qu'elles sont déjà éloignées entre elles au départ. Considérons sur cette figure la « galaxie » A qui émet à l'instant¹¹ t_e une onde lumineuse qui sera reçue dans la « galaxie » B à l'instant t_r . Au cours de sa progression entre A et B cette onde va « s'étirer », c'est à dire augmenter sa longueur

d'onde λ de $\Delta\lambda$ en parcourant la distance d (mesurée à la surface du ballon bien entendu). L'Univers est en expansion et la vitesse fournie par la mesure d'un décalage en longueur d'onde du rayonnement reçu n'est que la mesure de la dilatation de l'espace-temps dans lequel nous sommes plongés. Dans cette perspective chacune des galaxies fuit toutes les autres de la même manière : il n'y a plus de centre de fuite ! Appelons z la quantité $\Delta\lambda/\lambda$. Le calcul montre que le rapport $c.z/d$ - avec c , vitesse de la lumière - est alors égal à la constante de Hubble-Lemaître H_0 qui caractérise cette vitesse d'expansion de l'Univers.

La aussi nous retrouvons la même faiblesse que celle pointée précédemment :

¹⁰ L'isotropie de l'expansion signifie qu'elle a la même valeur dans toutes les directions de l'espace.

¹¹ Dans le modèle le plus courant (homogène et isotrope) d'Univers autorisé par la **RG** nous pouvons définir un temps cosmique car toutes les galaxies sont supposées être « immobiles » par rapport à un même système de coordonnées. Elles ont donc toutes le même temps propre : cela signifie en particulier que pour toutes les galaxies de notre Univers ce dernier a le même âge de 13,8 milliards d'années.

notre ballon est une surface ayant 2 dimensions exclusivement spatiales plongée dans notre espace habituel de dimension 3 alors que l'espace-temps de notre Univers est un espace ayant 3 dimensions spatiales et 1 dimension temporelle et n'est pas plongé dans une dimension d'ordre supérieur.

Une autre limite de cette analogie de la toile élastique est en rapport avec sa conception qui s'appuie sur un paradoxe : on cherche à expliquer les conséquences de la **RG** einsteinienne, appliquée à notre Système solaire, en s'appuyant sur une expérience que l'on explique en utilisant la mécanique classique newtonienne ! Dans le cadre de cette dernière le mouvement de la bille est dû à la déformation d'une toile élastique sous l'action de la force gravitationnelle qu'exerce la Terre sur un objet pesant, force qui, évidemment, disparaît complètement en **RG**.

Rôle oublié de la courbure temporelle dans cette analogie

L'espace-temps relativiste comporte quatre dimensions : trois spatiales et une temporelle. Dans l'analogie de la toile élastique on n'observe qu'une courbure spatiale alors que, en **RG**, la déformation de la dimension temporelle (courbure temporelle) joue également un rôle important dans l'explication des mouvements planétaires. Dans cette théorie les objets se déplaçant uniquement sous l'action de la gravitation, c'est à dire en chute libre, suivent des lignes particulières appelées géodésiques. C'est, par exemple, le cas des planètes en mouvement autour du Soleil ou d'une pierre lancée sur Terre. Dans un espace courbe, comme l'est l'espace-temps einsteinien à 4 dimensions en présence d'un champ gravitationnel, elles correspondent simplement au chemin le plus « court¹² » entre deux points. On peut alors montrer qu'une géodésique est la ligne d'univers pour laquelle le temps propre¹³ entre deux événements est maximal.

Il y a plus : si notre objet en chute libre part initialement de sa position de repos (pierre lâchée à une certaine hauteur au dessus du sol terrestre par exemple) cette courbure temporelle, qui fait que les horloges ne fonctionnent pas de la même façon en altitude qu'au sol, est même la seule raison en **RG** expliquant totalement le déplacement des objets selon des verticales descendantes.

Pour en revenir à notre sujet initial à propos du mouvement des planètes il faut tenir compte de leur état « initial » qui, contrairement à celui de la pierre qu'on lâche, n'est pas celui du repos. En partant de la solution de Schwarzschild des équations d'Einstein on constate que les orbites selon des

¹² Le mot « court » est à prendre dans un sens plus large que celui reconnu par le langage habituel car il s'utilise ici pour désigner une « distance » définie dans espace quadri dimensionnel.

¹³ Rappelons que le temps propre d'un observateur est simplement celui de l'horloge qu'il transporte avec lui au cours de son mouvement. C'est le seul temps ayant une signification physique importante car, pour un même phénomène (par exemple la mesure de la période radio-active d'un élément au repos dans le référentiel de l'observateur) tous les observateurs, quelque soit leur état de mouvement relatif, trouveront la même valeur.

géodésiques ne sont pas des courbes fermées¹⁴ mais subissent une précession de leur périhélie, c'est à dire une lente rotation de ce dernier, d'autant plus importante que la planète est plus proche de son étoile. Pour expliquer qualitativement, et en simplifiant au maximum, ce comportement détaillons ce qui se passe dans les deux théories. En mécanique newtonienne le corps revient exactement à sa position initiale après avoir fait un tour complet (rotation du rayon vecteur de 360°). Au cours de ce mouvement il oscille donc entre une distance minimale d_p (périhélie) et une distance maximale d_a (aphélie) du Soleil. On constate alors que, pour Newton, le temps qu'il met à réaliser une oscillation entre ces deux valeurs est exactement égal à celui nécessaire pour parcourir une orbite complète : il n'y a donc pas de précession. En **RG**, dans l'étude s'appuyant sur la métrique de Schwarzschild, ça n'est plus le cas : le corps va en pratique conserver la même valeur pour d_a à l'aphélie mais, au périhélie où les courbures spatiale et temporelle de l'espace-temps ne sont plus négligeables, les choses ne se passent plus comme chez Newton : il va se rapprocher davantage du Soleil et donc rester plus longtemps à proximité de l'astre central avec une vitesse plus élevée. De ce fait, au cours d'une orbite complète – c'est à dire deux passages successifs au périhélie - le corps va parcourir un angle supérieur à 360°. Dans les calculs on peut constater que l'angle de précession¹⁵ va dépendre pour 2/3 de la composante temporelle de la courbure et pour 1/3 de la partie spatiale.

Dans le Système solaire cet effet est le plus important pour la planète Mercure. Dès 1845 les astronomes avaient calculé la précession attendue du grand axe de Mercure du fait des forces perturbatives des autres planètes. Après plusieurs améliorations ils aboutirent à une valeur de 531" par siècle alors que les observateurs avaient mesuré qu'en réalité elle était de 574" par siècle. Cela laisse une différence de 43" qui ne pouvait pas être expliquée par des incertitudes de calcul ou de mesure. Avant la théorie de la relativité d'Einstein, il y avait trois hypothèses peu satisfaisantes pour expliquer ce phénomène : une force retardatrice due à un nuage de petits corps orbitant autour du Soleil, une nouvelle planète entre Mercure et le Soleil et enfin un exposant légèrement différent de deux pour la distance dans la loi de la loi de l'attraction universelle. Mais toutes ces solutions « ad hoc » faisaient apparaître de nouveaux problèmes. Heureusement la **RG** d'Albert Einstein a remis tout ça aux oubliettes de l'histoire des sciences et fourni une solution « naturelle ».

Mais il existe dans l'Univers des systèmes doubles d'étoiles à neutrons¹⁶ dont l'une d'entre elles est un pulsar et pour lesquels les effets relativistes sont

¹⁴ Ceci est vrai en **RG** même si on ne considère que deux corps (un astre central et une planète) en interaction gravitationnelle alors qu'en mécanique newtonienne les orbites parcourues sont des courbes fermées « fixes ». Il n'apparaît dans ce cas un phénomène de précession que dans le cas où l'on traite le problème de n corps en interaction.

¹⁵ C'est l'angle dont a tourné le demi-grand axe de l'orbite entre deux passages successifs de la planète à son périhélie.

¹⁶ Quand à la fin de sa vie une étoile massive explose en supernova son noyau peut s'effondrer et devenir un objet minuscule et hyper dense constitué essentiellement de neutrons (une cuillère à soupe pèse environ un milliard de tonnes !) et dont la masse est grossièrement celle du Soleil : c'est une étoile à neutrons. Un pulsar est une étoile à neutrons qui émet un faisceau étroit d'ondes radio balayant l'espace comme un phare avec une extrême régularité au cours de sa rotation. Si la Terre est dans le cône d'émission nous détectons une impulsion à chaque tour.

beaucoup plus importants. Ainsi, par exemple, l'un de ces systèmes, PSR J0737–3039, a une période orbitale de 2 heures et 27 minutes. Elle est si courte qu'on peut enregistrer plusieurs orbites au cours d'une seule séance d'observation. Il a ainsi suffi de quelques jours pour déterminer l'avance de son périastre : 17 degrés par an ! De plus, ce pulsar binaire ne se trouve qu'à environ 2 000 années-lumière du Système solaire, ce qui facilite grandement son observation.

Conclusion

La discussion ci-dessus présente plusieurs limitations du modèle de membrane élastique pour illustrer la gravitation en **RG**. Tout d'abord tous les effets gravitationnels (chute libre, mouvements planétaires, trajectoire de la lumière, etc.) dans cette analogie sont interprétés dans le cadre d'un modèle newtonien : le dispositif crée une courbure spatiale bidimensionnelle alors que, en **RG**, la courbure temporelle joue un rôle important. Ce dernier peut même être prépondérant : la chute libre sur Terre est entièrement créée par la « déformation » du temps et la courbure spatiale participant à la déviation de la lumière venant des étoiles et à la précession n'ont pratiquement aucun effet sur la gravité terrestre. Nous utilisons la courbure spatiale de la membrane élastique pour imiter la courbure temporelle mais on l'utilise également pour discuter des effets, comme la précession, dépendant aussi de la courbure spatiale : il y a ici un mélange peu propice à une bonne compréhension du caractère novateur de la **RG**. En présence d'un champ gravitationnel les distances spatiales et les durées vont donc être affectées localement d'une manière plus ou moins importante. De ce fait, pour présenter les effets de la gravitation en physique einsteinienne, il est alors nécessaire de bien insister sur les rôles **conjoint**s de la déformation de l'espace et du temps en présence d'une masse.

Pierre MAGNIEN

Bibliographie et ressources Internet

<https://www.youtube.com/watch?v=MTY1Kje0yLg>