

EXERCICES DE CINEMATIQUE RELATIVISTE

1. Introduction

Pour mieux appréhender son niveau personnel de compréhension de la relativité restreinte (RR par la suite), il faut se confronter à ses difficultés et vérifier la maîtrise que l'on a de ses concepts de base qui sont, pour la partie concernant la dilatation du temps, ceux de :

- événement
- synchronisation des horloges
- temps propre
- temps impropre
- simultanéité

La meilleure manière de le faire est de chercher à résoudre des exercices de différents niveaux de difficulté. Ce texte propose donc quelques problèmes et leurs solutions et en détaille les « points durs » pour mieux assimiler les fondements souvent contre-intuitifs de la théorie.

Plusieurs de ces exercices s'inspirent de la littérature récemment éditée et sont en rapport direct avec les nouveaux programmes de physique de terminale S (2012) ; d'autres, d'une difficulté un peu plus grande, permettent d'approfondir les notions préalablement acquises. Tous, cependant, sont accessibles à un élève de TS ayant correctement assimilé le cours.

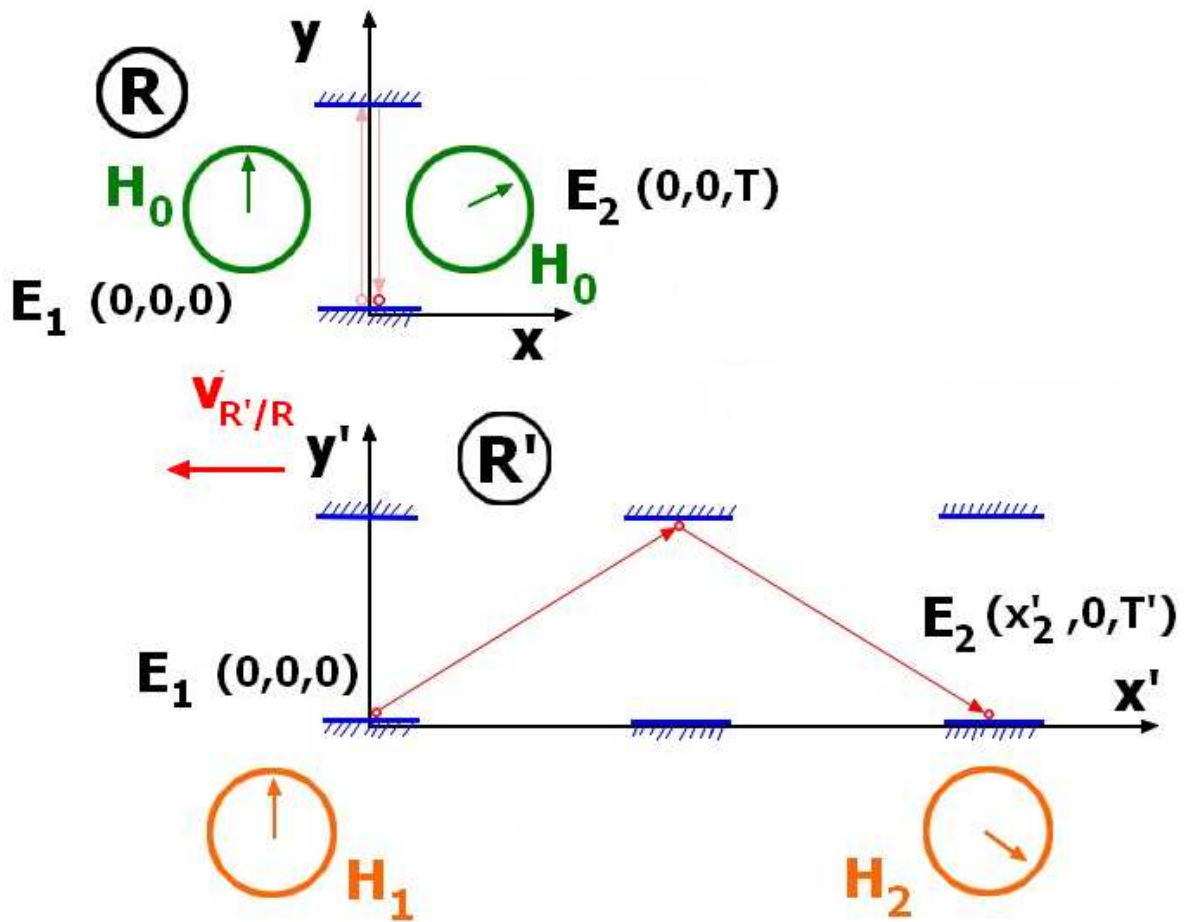
Auparavant nous ferons quelques rappels sur ces notions fondamentales en s'appuyant sur des exemples simples.

2. Quelques rappels

La notion d'événement est très importante en RR. Sa définition est simple mais rigoureuse : il s'agit d'un point de l'espace – temps (un lieu, une date) ayant quatre coordonnées dans un référentiel donné, trois selon les axes de l'espace et une temporelle. En RR un même événement aura, dans un référentiel **(R)**, un groupe de coordonnées (x,y,z,t) et, dans un référentiel **(R')** un autre groupe de coordonnées (x',y',z',t') .

Considérons (voir figure page suivante) une horloge de lumière au repos dans un référentiel **(R)** et placée à son origine. La durée de l'aller / retour du photon est mesurée par une seule horloge H_0 . L'événement E_1 est « *Départ du photon* » de coordonnées dans **(R)** $(0,0,0)^1$ et l'événement E_2 est « *Retour du photon* » de coordonnées dans **(R)** $(0,0,T)$. La quantité $(t_2 - t_1) = T - 0$ est appelée **durée propre** de l'aller / retour puisqu'elle est mesurée par une **seule horloge** H_0 , les deux événements concernés se produisant au même endroit qui ici est l'origine du référentiel **(R)**.

¹ La coordonnée z n'est pas introduite puisque tout se passe dans le plan $(0x,0y)$



Considérons maintenant le même phénomène – donc la même succession d'événements – observé depuis une fusée à laquelle on attache un référentiel (\mathbf{R}') en mouvement « sur la gauche » par rapport à (\mathbf{R}) à la vitesse \mathbf{v} . Pour simplifier le raisonnement sans en diminuer la valeur nous considérerons que les horloges de (\mathbf{R}) et de (\mathbf{R}') marquent $t = t' = 0$ à l'instant de la superposition des origines O et de O' .

Dans (\mathbf{R}') l'événement E_1 aura pour coordonnées $(0,0,0)$ et l'événement E_2 $(x'_2, 0, T')$. Les deux instants ne pourront plus être mesurés par la même horloge : l'instant où se produit E_1 est mesuré par l'horloge H_1 alors que celui de E_2 l'est par H_2 . On définira alors T' comme une **durée impropre** ou, d'après le programme de TS, une **durée mesurée**².

On peut raisonner géométriquement sur ce schéma pour établir la relation entre T et T' en se rappelant que la vitesse de la lumière est indépendante du système de référence dans lequel on se place. Elle est donc c dans (\mathbf{R}) et dans (\mathbf{R}').

Si on appelle d la distance entre les deux miroirs nous pouvons écrire :

² Rappelons que cette dénomination que l'on retrouve dans le programme de TS et dans les ouvrages publiés pour les élèves n'est justifiée par aucune raison particulière, légitimée par aucun scientifique et utilisée dans aucun ouvrage de l'enseignement supérieur.

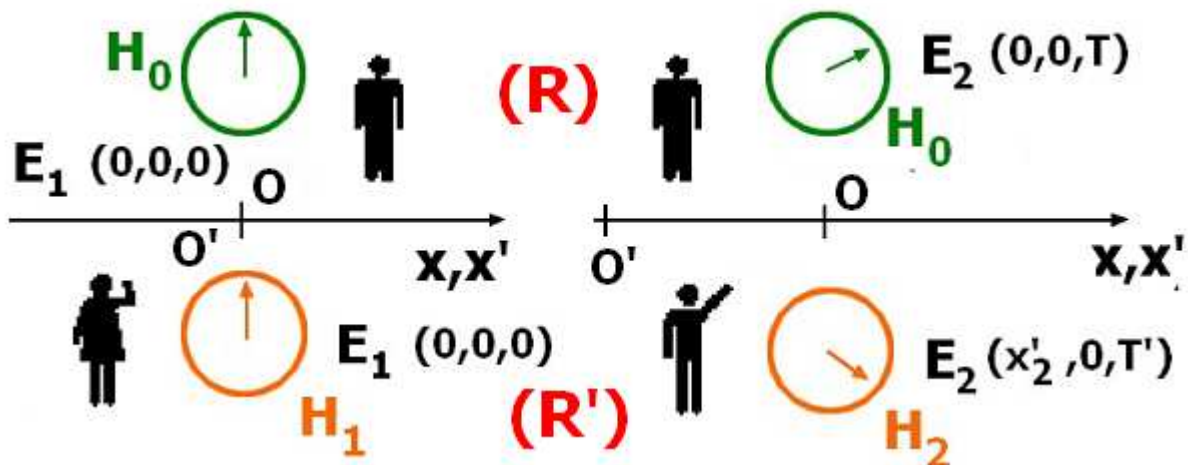
$$T = \frac{2d}{c} \text{ dans } (R)$$

$$T' = \frac{2\sqrt{d^2 + \left[\frac{vT'}{2}\right]^2}}{c} \text{ en utilisant le théorème de Pythagore dans } (R')$$

Après développement de l'expression de T' et remplacement de $2d/c$ par T , on retrouve l'expression connue de la dilatation du temps :

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Insistons sur le fait que, dans le référentiel (R) , il n'existe qu'un observateur attaché à H_0 alors que dans (R') on doit disposer de deux observateurs, le premier attaché à H_1 et le second à H_2 . Ceci est figuré sur le schéma suivant :



Lors de l'événement E_1 l'observateur de (R) et l'observateur à l'origine de (R') synchronisent leurs horloges respectives H_0 et H_1 et les mettent toutes deux à zéro. Toutes les horloges de (R') , parmi lesquelles H_1 et H_2 , sont maintenant synchronisées entre elles. Un peu plus tard l'observateur de (R) attaché à H_0 croise H_2 et constate que leurs horloges ne sont plus synchronisées. Il en est de même pour l'observateur proche de H_2 qui fait la même constatation par rapport à H_0 - réciprocity de la RR - alors que, bien entendu, il reste synchronisé avec l'observateur de son référentiel (R') proche de H_1 .

Il est insuffisant, en cinématique galiléenne comme relativiste, de dire qu'il y a une fusée en mouvement et une horloge de lumière au repos. On peut dire qu'il y a une fusée au repos dans (R') , une horloge de lumière au repos dans (R) et que les deux référentiels (R) et (R') sont en mouvement relatif. Par rapport au phénomène physique étudié - l'aller/retour d'un photon - on retient deux événements pertinents : E_1 (départ du photon) et E_2 (retour du photon).

L'horloge de lumière étant au repos dans (R) il suffit d'une seule horloge H_0 dans (R) pour mesurer la durée de l'aller/retour du photon dans (R) . Dans (R') l'horloge de lumière se déplace et le départ du photon ne se produit pas au même endroit que le retour. Sachant qu'on doit attacher à chaque

événement un lieu et un temps il faut qu'il existe en ce lieu un observateur connaissant sa position et muni d'une horloge. Deux événements se produisant en deux lieux différents nécessitent donc deux horloges, ici H_1 et H_2 . On pense quelquefois qu'il suffit d'attacher une seule horloge³ à chaque référentiel - par exemple à l'origine - puisque toutes horloges au repos dans un référentiel et synchronisées entre elles le restent indéfiniment. Il existe cependant un problème : si on ne dispose pas d'une horloge au repos là où se produit l'événement étudié l'heure lue « à distance » sur l'unique horloge du référentiel - placée, par exemple, à son origine - donne une heure qui est affectée par le temps de propagation du signal entre l'origine et le lieu où se produit l'événement. La RR élimine cette difficulté en supposant - n'oublions pas que la RR est une théorie "à principe" et qu'elle a le droit de s'autoriser tout ce qui est en principe possible même si ça pose des problèmes pratiques plus ou moins importants - qu'au point où se déroule l'événement étudié il existe une horloge synchronisée avec toutes les autres du référentiel.

Il est donc incorrect et contraire aux principes de la RR de n'envisager qu'une seule horloge par référentiel et d'ignorer de ce fait le temps de propagation de l'information. De plus un réseau d'horloges dans chaque référentiel permet facilement de faire la différence entre des intervalles de temps propre et de temps impropre car le premier ne nécessite qu'une seule horloge alors que le second en exige deux.

2. Exercices

2.1 Exo 1 : énoncé

Un observateur (A') à bord d'une fusée croise selon un mouvement rectiligne uniforme un autre observateur terrestre (A) à la vitesse $v = 0,6c$. Les horloges de (A) et de (A') sont synchronisées et mises à zéro au moment du croisement. Chaque minute, mesurée à bord de la fusée, (A') émet un flash lumineux ($\Delta t'_1 = 1 \text{ min}$).

1. Quelle est la période Δt_1 d'émission par (A') des flashes lorsqu'elle est mesurée dans le réseau d'horloges du référentiel lié à (A)?
2. Quelle est la période Δt_2 de réception par (A) des flashes lorsqu'elle est mesurée dans le réseau d'horloges du référentiel lié à (A)?
3. Quelle est la période $\Delta t'_2$ de réception par (A) des flashes lorsqu'elle est mesurée dans le réseau d'horloges du référentiel lié à (A')?

2.2 Exo 1 : corrigé

L'exercice permet de bien différencier les notions d'intervalle de temps propre et d'intervalle de temps impropre.

1. Soit (R) le référentiel attaché à (A) et (R') celui de (A'). L'intervalle de temps $\Delta t'_1$ de 1 min mesuré dans (R') entre l'envoi de deux flashes successifs est une durée propre dans ce référentiel (R'). En effet c'est la même horloge, celle à côté de (A'), qui donne l'heure d'envoi des flashes successifs.

³ On rencontre ce choix contraire à l'esprit de la RR dans tous les ouvrages de TS. En se limitant à deux horloges - l'une « au repos » et l'autre « en mouvement » on encourage inconsciemment l'acceptation de l'affirmation fautive « une horloge tourne moins vite dans un référentiel en mouvement ».

L'intervalle de temps Δt_1 correspondant et déterminé dans le référentiel terrestre (**R**) lié à (A) est la différence entre les instants de réception de l'impulsion de rang (n) et celle de rang (n+1) qui sont lus sur les horloges H_n et H_{n+1} au repos dans (**R**) à l'endroit où se trouve (A') à chaque instant d'émission. C'est donc une durée impropre qui, dans le référentiel (**R**), est donnée par la formule reliant les deux :

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t'_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,6^2}} = \frac{1}{0,8} \Rightarrow t_1 = 1,25 \text{ min}$$

La période d'émission des flashes par (A'), lorsqu'elle est mesurée par (A) dans son référentiel, est donc de **1 min 15 s**.

2. Pour (A) la période Δt_2 est égal à Δt_1 auquel vient s'ajouter le temps de propagation de l'impulsion lumineuse sur la distance parcourue par (A') durant l'intervalle de temps qui sépare l'envoi de deux impulsions consécutives, c'est-à-dire $v \cdot \Delta t_1 / c$. C'est un intervalle de temps propre puisque (A) le mesure au même endroit avec une seule horloge.

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 + \frac{v}{c} \cdot \Delta t_1 = (1 + v/c) \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_2 = (1 + 0,6) \cdot 1,25 = 2 \text{ min}$$

La période de réception des flashes par (A), lorsqu'elle est mesurée par (A), est donc de **2 min**.

3. Pour (A') l'intervalle de temps entre la réception de deux flashes successifs par (A) est une durée impropre. On a alors la relation suivante entre Δt_2 , qui est un intervalle de temps propre, et $\Delta t'_2$:

$$\Delta t'_2 = \frac{\Delta t_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2}{0,8} = 2,5 \text{ min}$$

La période de réception des flashes par (A), lorsqu'elle est mesurée par (A') dans son référentiel, est donc de **2 min 30 s**.

Remarque : Les résultats précédents constituent une approche particulière de la loi relativiste de l'effet Doppler telle que :

$$\frac{\text{Période émission}}{\text{Période réception}} = \frac{T_{A'}}{T_A} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \sqrt{\frac{0,4}{1,6}} = 0,5 \quad \text{et ici} \quad \frac{T_{A'}}{T_A} = \frac{\Delta t'_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

2.3 Exo 2 : énoncé

Après avoir synchronisé leurs horloges, une fusée avec à son bord un observateur (A') - référentiel (**R'**) - quitte un observateur terrestre (A) - référentiel (**R**) - avec la vitesse **v**. Au bout d'un temps t_1 , mesuré dans le référentiel de (A), une seconde fusée avec à son bord un observateur (A'') - référentiel (**R''**) - quitte à son tour la Terre avec une vitesse **u**. On considère

que \mathbf{v} et \mathbf{u} ont même direction et même sens et que, en module, $u > v$. Dans le référentiel terrestre (\mathbf{R}) l'observateur (A'') rattrape (A') à l'instant t_2 .

1. Calculer t_2 en fonction de t_1 , u et v
2. Pour les horloges au repos dans (\mathbf{R}') à quel instant (A'') a-t-il quitté la Terre ?
3. Pour les horloges au repos dans (\mathbf{R}') à quel instant (A'') a-t-il rattrapé (A') ?
4. Déterminer dans le référentiel (\mathbf{R}') la distance séparant (A') de (A) à l'instant du départ de (A'').
5. En déduire l'expression de la vitesse de (A'') quand elle est mesurée par (A').

2.4 Exo 2 : corrigé

1. Dans le référentiel (\mathbf{R}), à l'instant t_2 , (A') et (A'') ont parcouru la même distance. On a donc :

$$\text{Distance parcourue par } (A') : d' = v \cdot t_1$$

$$\text{Distance parcourue par } (A'') : d'' = (t_2 - t_1) \cdot u$$

$$d'' = d' \quad \text{ou} \quad (t_2 - t_1) \cdot u = t_2 \cdot v \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{u}{u - v} \cdot t_1$$

2. A l'instant où (A'') quitte la Terre il existe une horloge H'_1 au repos dans (\mathbf{R}') qui coïncide avec cet événement, c'est-à-dire qui est localisée au niveau de la Terre. L'intervalle de temps $\Delta t'_1$ mesuré par (A') entre le départ de ce dernier mesuré par son horloge H'_0 et celui de (A'') mesuré par H'_1 est donc déterminé par la différence de lecture de deux horloges distinctes. C'est un intervalle de temps impropre lié à l'intervalle de temps propre Δt_1 mesuré par la seule horloge H_0 de (A). On a donc la relation :

$$\Delta t'_1 = \frac{\Delta t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

3. Dans (\mathbf{R}') l'instant où (A'') rattrape (A') est mesuré par la même horloge H'_0 . Pour (A') l'intervalle de temps $\Delta t'_2$ entre son départ et cet instant est donc un intervalle de temps propre. Il est lié, dans (\mathbf{R}), à l'intervalle de temps impropre déterminé par deux horloges différentes H_0 et H_2 par la relation :

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta t'_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t'_2 = \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot \Delta t_2$$

$$\text{Or} \quad \Delta t_2 = t_2 - 0 = t_2 = \frac{u}{u - v} \cdot t_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t'_2 = \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot \frac{u}{u - v} \cdot t_1$$

4. Au moment du départ de (A'') l'observateur (A') voyait l'observateur (A) sur Terre s'éloigner de lui à la vitesse v . Pour (A') la distance à laquelle se trouve notre planète est donnée par $d'_T = v \cdot \Delta t'_1$ qui peut être développée en utilisant le résultat de la question 2 :

$$d'_T = \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \Delta t_1$$

5. La distance d'_T a été parcourue par (A'') dans le référentiel (**R'**) en un intervalle de temps égal à $(t'_2 - t'_1)$ lorsqu'il rattrape (A'). La vitesse de (A'') dans (**R'**) est donc $u' = d'_T / (t'_2 - t'_1)$. Calculons cette quantité :

$$u' = \frac{d'_T}{t'_2 - t'_1} = \frac{\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \Delta t_1}{\sqrt{1-v^2/c^2} \cdot \frac{u}{u-v} \cdot \Delta t_1 - \frac{\Delta t_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} = \frac{\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}{\frac{1-v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{u}{u-v} - \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

$$u' = \frac{v}{(1-v^2/c^2) \cdot \frac{u}{u-v} - 1} = \frac{v \cdot (u-v)}{(1-v^2/c^2) \cdot u - u + v} = \frac{v \cdot (u-v)}{v \cdot (1-u \cdot v/c^2)} = \frac{(u-v)}{(1-u \cdot v/c^2)}$$

On retrouve ici la formule de transformation relativiste des vitesses.

2.5 Exo 3 : énoncé

Des pions π^+ de haute énergie sont produits lors de la collision entre des protons et des neutrons. Ils se désintègrent dans leur référentiel propre en accord avec la loi :

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau_0}$$

dans laquelle τ_0 est la durée de vie moyenne valant $2,6 \cdot 10^{-8}$ s pour les pions. Un faisceau de pions est produite dans un accélérateur et on constate qu'il en reste les deux tiers à une distance d de 20 m de la source.

1. Les pions ayant une vitesse v très proche de celle de la lumière, en combien de temps franchissent-ils les 20 mètres si l'on considère $v \approx c$?
2. Dans le cadre de la mécanique galiléenne combien devrait-il en rester après avoir franchi cette distance ?
3. Dédurre du calcul précédent le facteur γ .
4. Quelle est la vitesse des pions ?

2.6 Exo 3 : correction

1. On a sensiblement $d \approx v \cdot \Delta t$ donc :

$$\Delta t \approx \frac{d}{v} = \frac{20}{3 \cdot 10^8} = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

2. D'après la loi de décroissance exponentielle et sachant qu'au bout d'un temps Δt il reste les 2/3, c'est-à-dire 67 %, du faisceau nous pourrions écrire en mécanique galiléenne :

$$N(6,7 \cdot 10^{-8}) = N_0 \cdot e^{-6,7 \cdot 10^{-8} / 2,6 \cdot 10^{-8}} = N_0 \cdot e^{-6,7/2,6} = 0,076 \cdot N_0 \Rightarrow \frac{N(6,7 \cdot 10^{-8})}{N_0} = 7,6 \% \ll 67 \%$$

3. Il faut donc appliquer la cinématique relativiste pour laquelle la durée de vie moyenne d'un pion mesurée dans le référentiel (**R**) du laboratoire est

dilatée par rapport à la même mesure faite dans le référentiel propre (**R'**) du pion qui donnerait $2,6 \cdot 10^{-8}$ s. On peut donc écrire dans (**R**) :

$$N(6,7 \cdot 10^{-8}) = N_0 \cdot e^{-6,7 \cdot 10^{-8} / \tau} = 0,67 \cdot N_0 \Rightarrow \frac{N(6,7 \cdot 10^{-8})}{N_0} = 0,67 = e^{-6,7 \cdot 10^{-8} / \tau}$$

$$-\frac{6,7 \cdot 10^{-8}}{\tau} = \ln(0,67) = -0,4 \Rightarrow \tau = 16,7 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

On doit donc avoir, en RR, la relation $\tau = \gamma \cdot \tau_0$ ce qui permet de calculer γ :

$$\gamma = \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{16,7 \cdot 10^{-8}}{2,6 \cdot 10^{-8}} = 6,4$$

4. Exprimons γ en fonction du rapport $\beta = v/c$ pour trouver la valeur de v :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow \beta = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} = 0,976 \Rightarrow v = 0,976c$$

La vitesse trouvée étant très proche de c notre choix, dans la résolution de la première question, de faire l'approximation $v \approx c$ est validé ici.

On peut d'ailleurs refaire l'exercice en remplaçant, dans la réponse de la question (1), la vitesse c par $0,976c$. On obtient alors :

$$\Delta t \approx \frac{d}{v} = \frac{20}{0,976 \times 3 \cdot 10^8} = 6,8 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Le reste du calcul va alors nous donner :

$$\tau = 17 \cdot 10^{-8} \text{ s} \quad \gamma = 6,5 \quad v = 0,977c$$

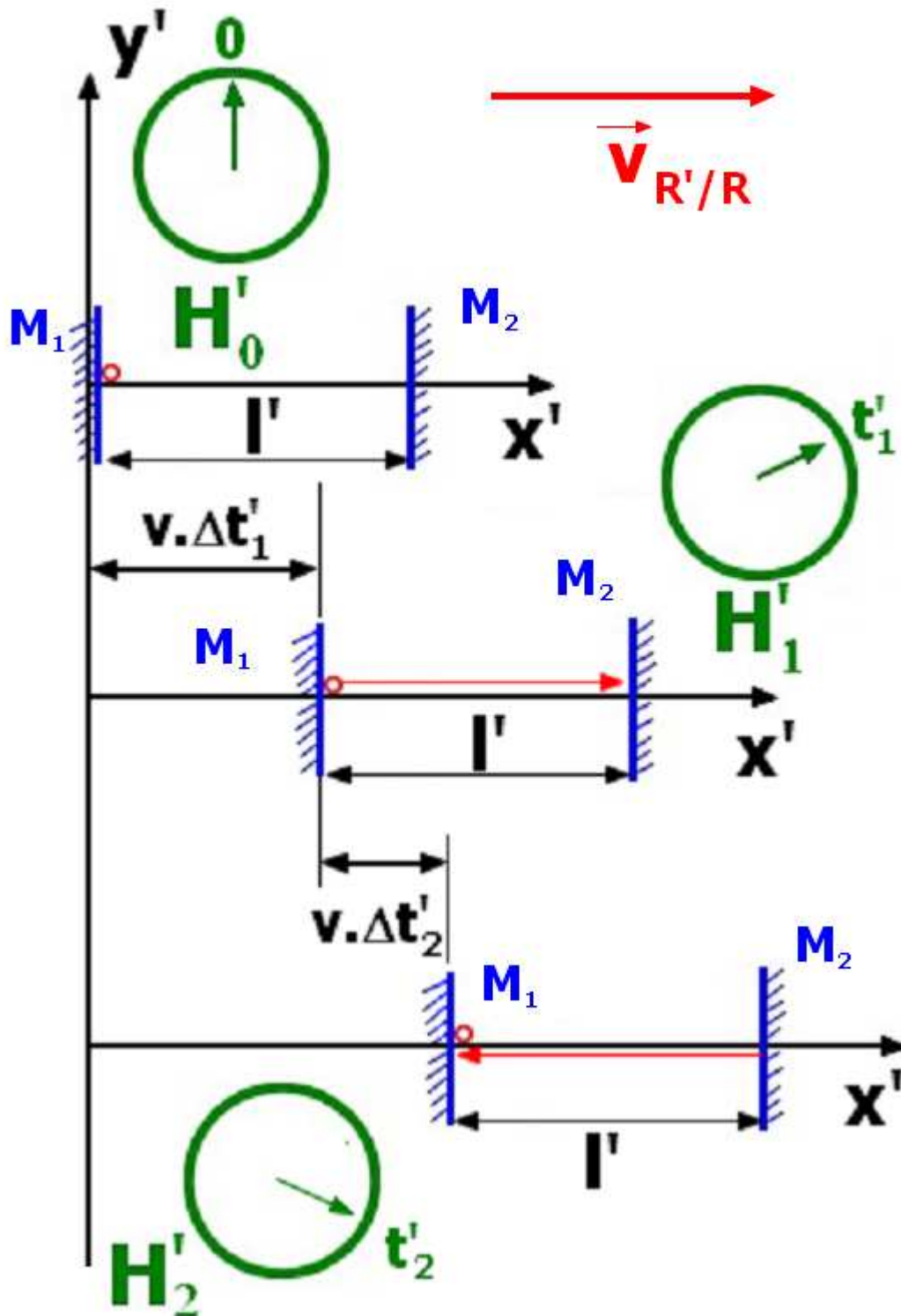
La différence avec le premier calcul est négligeable, ce qui en justifie l'acceptation.

2.6 Exo 4 : énoncé

Considérons une horloge de lumière qui se déplace dans un référentiel (**R'**) à une vitesse \mathbf{v} qui est parallèle à la propagation de la lumière entre les deux miroirs. Montrons que la longueur de cette horloge, déterminée dans (**R'**) est différente de celle que mesurera un observateur au repos dans son référentiel propre (**R**). On considère que la source lumineuse de l'horloge passe à l'origine de (**R'**) à l'instant où l'on déclenche l'émission de la lumière. Au même instant on synchronise les horloges des deux référentiels en les mettant à zéro.

Le schéma du dispositif sur lequel l'exercice s'appuiera est donné ci-dessous. Il représente le mouvement de l'horloge de lumière dans le référentiel (**R'**) avec les trois événements :

- E_1 : départ du photon à l'origine de (**R'**)
- E_2 : réflexion du photon sur le miroir M_2
- E_3 : retour du photon sur M_1



1. Calculer l'expression de l'intervalle de temps propre Δt (référentiel propre (R) de l'horloge de lumière) correspondant à un aller / retour de la lumière.
2. Calculer l'expression de l'intervalle de temps impropre $\Delta t'_1$ (référentiel (R') d'étude de l'horloge de lumière) correspondant à un aller de la lumière.
3. Calculer l'expression de l'intervalle de temps impropre $\Delta t'_2$ (référentiel (R') d'étude de l'horloge de lumière) correspondant à un retour de la lumière.
4. Calculer l'expression de l'intervalle de temps impropre $\Delta t' = \Delta t'_1 + \Delta t'_2$ (référentiel (R') d'étude de l'horloge de lumière) correspondant à un aller / retour de la lumière.

- Donner l'expression relativiste de l'intervalle de temps impropre $\Delta t'$ en fonction de l'intervalle de temps propre correspondant Δt .
- Après avoir égalé les expressions des questions (4) et (5) en déduire l'expression de la longueur l' dans (**R'**) de l'horloge de lumière en fonction de sa longueur propre l dans (**R**). Que peut-on dire pour les longueurs mesurées dans des référentiels en mouvement relatif ?

2.7 Exo 4 : correction

- Dans le référentiel (**R**) où l'horloge de lumière est au repos, les photons parcourent deux fois la distance entre les deux miroirs à la vitesse c ; nous pouvons écrire :

$$\Delta t = \frac{2l}{c}$$

- Dans (**R'**) pendant que le miroir M_2 est parvenu à la position $(l' + v.\Delta t'_1)$ le photon a franchi $c.\Delta t'_1$. Ces deux quantités sont égales et :

$$l' + v.\Delta t'_1 = c.\Delta t'_1 \Rightarrow \Delta t'_1 = \frac{l'}{c - v}$$

- Dans (**R'**), pendant le retour du photon, le miroir M_1 a progressé de $v.\Delta t'_2$ et le photon, qui n'a plus que $(l' - v.\Delta t'_2)$ à franchir, parcourt la distance $c.\Delta t'_2$. Ces deux quantités sont égales et :

$$l' - v.\Delta t'_2 = c.\Delta t'_2 \Rightarrow \Delta t'_2 = \frac{l'}{c + v}$$

- Dans (**R'**) l'aller / retour se déroule dans un intervalle de temps impropre $\Delta t'$ qui est la somme des deux intervalles trouvés précédemment :

$$\Delta t' = \Delta t'_1 + \Delta t'_2 = \frac{l'}{c - v} + \frac{l'}{c + v} = \frac{2l'.c}{c^2 - v^2} = \frac{2l'/c}{1 - v^2/c^2}$$

- Entre $\Delta t'$ et Δt nous avons la relation de la dilatation du temps :

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ avec } \Delta t = \frac{2l}{c} \Rightarrow \Delta t' = \frac{2l}{c.\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- Nous pouvons évaluer les deux expressions précédentes donnant $\Delta t'$ en fonction de Δt :

$$\frac{2l}{c.\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2l'}{c.(1 - v^2/c^2)}$$

Redistribuons différemment les différents éléments de cette égalité pour exprimer l' en fonction de l :

$$l' = \frac{l \cdot (1 - v^2/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = l \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

On constate à travers cette démonstration que le phénomène de dilatation du temps conduit nécessairement à celui de contraction des longueurs.

Pierre MAGNIEN
Mars 2013