

# -THEORIE DE LA RELATIVITE RESTREINTE : METHODE DES DIAGRAMMES D'ESPACE - TEMPS

## 1. Introduction

La méthode du facteur  $k$  de Bondi, que nous avons étudiée précédemment, est illustrée par des diagrammes mais ces derniers ne sont dessinés que pour éclairer les raisonnements et ne s'appuient sur aucun graphique pour se déployer.

Les diagrammes que nous allons voir maintenant sont des représentations géométriques de la métrique pseudo-euclidienne de l'espace-temps de la relativité restreinte permettant de retrouver les différentes expressions caractéristiques de cette théorie. La construction et les propriétés d'un tel diagramme résultent des postulats de la relativité restreinte et des propriétés de l'espace-temps, notion proposée en premier par H. Minkowski<sup>1</sup>. Ils illustrent alors graphiquement les relations profondes entre l'espace et le temps, contenues dans la théorie de la relativité restreinte.

Un diagramme espace-temps permet donc de représenter un événement (**E**) de coordonnées  $(x,t)$  dans un repère galiléen (**R**) et de coordonnées  $(x', t')$  dans un autre repère galiléen (**R'**) en mouvement rectiligne uniforme de vitesse  $V$  par rapport à (**R**). Dans tous les cas on considèrera que les origines **O** et **O'** des deux repères sont confondues à l'instant initial où  $t=t'=0$ .

Pour construire le diagramme espace-temps on choisit comme axes du diagramme les quantités  $x$  et  $x'$  en **abscisses**,  $ct$  et  $ct'$  en **ordonnées**. On peut alors définir la ligne d'univers d'un objet qui représente l'histoire de ce dernier, c'est à dire la succession des événements attachés à cet objet.

Il existe essentiellement trois types de diagramme qui se distinguent par la manière dont sont définis et tracés les axes. Ces derniers, comme pour la méthode de Bondi, se limitent à une seule dimension spatiale  $x$  et  $x'$  et à la dimension temporelle  $t$  et  $t'$ . Leur construction s'appuie sur la transformation de Lorentz avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma \cdot (ct - \beta \cdot x) \\ x' &= \gamma \cdot (x - \beta \cdot ct) \end{aligned} \quad (1) \text{ avec } \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ et } \beta = \frac{V}{c}$$

## 2. Diagramme de Minkowski

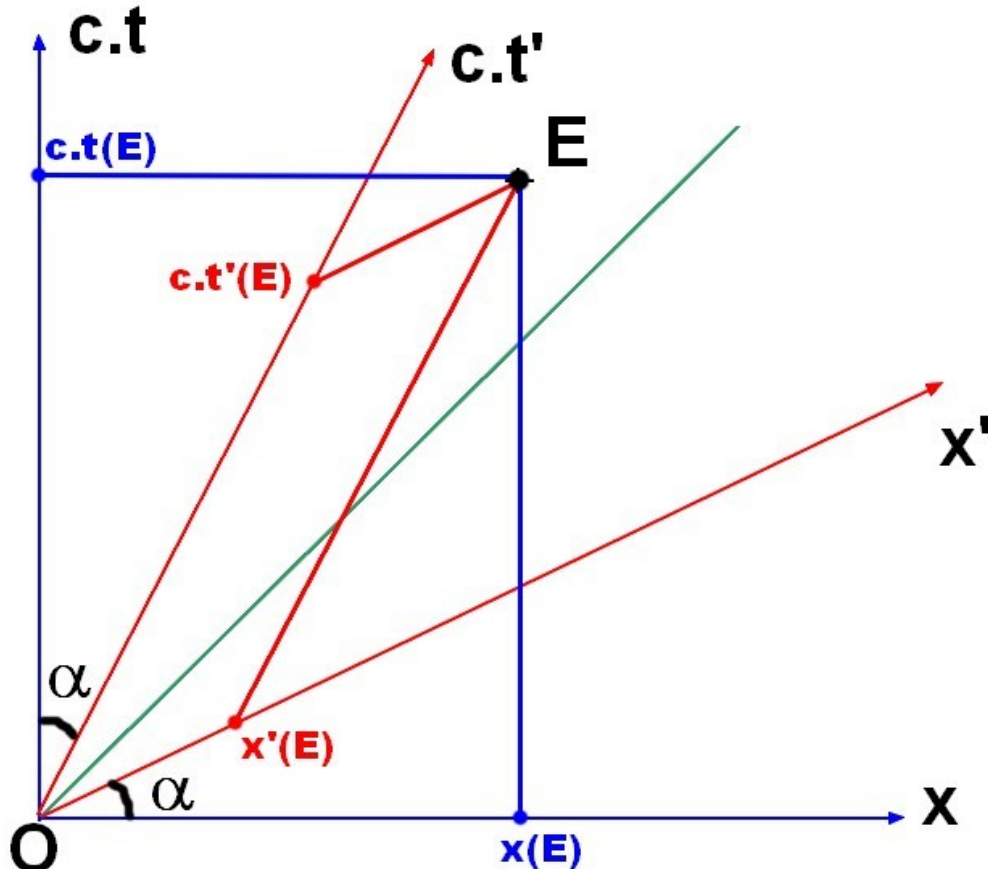
Il est proposé par Herman Minkowski en 1908. Il s'agit d'une représentation dans laquelle le référentiel (**R**) est considéré au repos et le second (**R'**) en mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse<sup>2</sup>  $V$  par rapport à (**R**). De ce fait, le diagramme de Minkowski est construit en donnant à (**R**) des axes orthogonaux. La première bissectrice représente la ligne d'univers d'un rayon lumineux. Les deux équations (1) entraînent que les points tels que  $ct' = 0$  sont donnés, dans (**R**), par la droite d'équation  $ct = \beta \cdot x$  et les points tels que  $x' = 0$  sont sur la droite d'équation  $x = \beta \cdot ct$ . Les deux droites obtenues

<sup>1</sup> Hermann Minkowski (1864 / 1909) est un mathématicien allemand. Il fut professeur de Albert Einstein à Zurich lorsque ce dernier était étudiant à l'Ecole Polytechnique Fédérale de 1896 à 1900  
<sup>2</sup> Cette dernière peut être positive (**R'**) s'éloigne de (**R**) - ou négative dans le cas contraire.

correspondent aux axes<sup>3</sup>  $0ct'$  et  $0x'$  et sont symétriques par rapport à la première bissectrice. L'angle  $\alpha$  que font entre eux les axes  $(0.ct, 0,ct')$  et  $(0x, 0x')$  est tel que :

$$\tan(\alpha) = \frac{x}{c.t} = \beta = \frac{V}{c}$$

Remarquons que cette représentation est asymétrique car elle privilégie le repère  $(R)$ , considéré au repos par rapport à  $(R')$ , ce qui n'est pas conforme à l'esprit de la relativité restreinte.



On a représenté, dans le diagramme de Minkowski dessiné ci dessus, un événement  $(E)$  avec ses coordonnées, construites en menant des parallèles aux axes dans les deux repères  $(x,c.t)$  et  $(x',c.t')$ .

On a déjà cité un défaut de ce type de diagramme – son asymétrie de traitement entre  $(R)$  et  $(R')$  – mais il en a un autre peut être plus grave : **les unités sur les axes  $ct'$  et  $x'$  sont plus grandes que celle sur les axes  $ct$  et  $x$ .** Montrons le :

A partir du diagramme on peut écrire les relations suivantes<sup>4</sup> :

$$x = x'.\cos(\alpha) + c.t'.\sin(\alpha)$$

$$c.t = x'.\sin(\alpha) + c.t'.\cos(\alpha)$$

<sup>3</sup> On ne confondra pas l'origine  $0$  du référentiel  $(R)$  et l'origine  $0$  du diagramme d'espace-temps.

<sup>4</sup> La démonstration suivante manipule les longueurs mesurées sur le diagramme de Minkowski et non pas les valeurs des grandeurs elles-mêmes de temps et de distance. Par exemple on sait qu'en relativité restreinte l'intervalle d'espace-temps  $\Delta s^2$  est un invariant donc  $\Delta s'^2 = \Delta s^2$ . Les longueurs correspondantes de la représentation graphique de ces deux quantités n'obéit pas à cette relation du fait que les unités dans le repère  $(0,x,t)$  ne sont pas les mêmes que celles du repère  $(0,x',t')$ .

Il en est de même pour les intervalles et nous avons :

$$\Delta x = \Delta x' \cdot \cos(\alpha) + c \cdot \Delta t' \cdot \sin(\alpha)$$

$$c \cdot \Delta t = \Delta x' \cdot \sin(\alpha) + c \cdot \Delta t' \cdot \cos(\alpha)$$

Formons le  $\Delta s^2$  et exprimons le en fonction du  $\Delta s'^2$  :

$$\Delta s^2 = (c \cdot \Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

$$= [\Delta x' \cdot \sin(\alpha) + c \cdot \Delta t' \cdot \cos(\alpha)]^2 - [\Delta x' \cdot \cos(\alpha) + c \cdot \Delta t' \cdot \sin(\alpha)]^2$$

Après développement on obtient :

$$\Delta s^2 = [\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] \cdot [(c \cdot \Delta t')^2 - (\Delta x')^2]$$

$$\Delta s^2 = [\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] \cdot \Delta s'^2$$

Or nous avons :

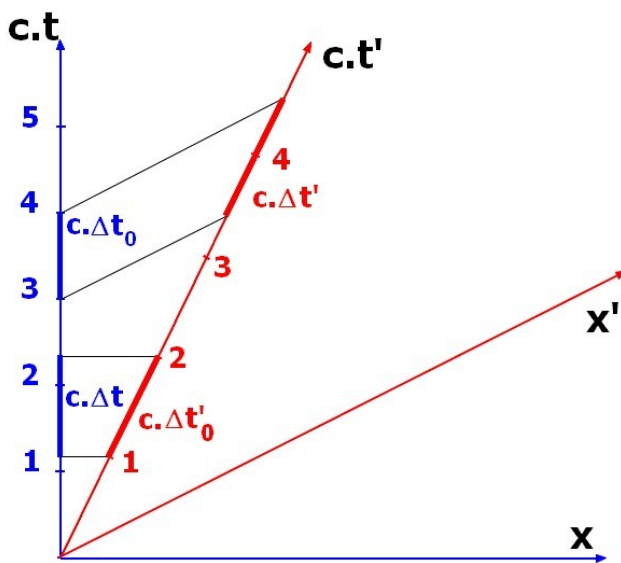
$$\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \frac{1 - \tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}$$

Finalement :

$$\Delta s^2 = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} \cdot \Delta s'^2$$

Pour retrouver des intervalles égaux il faut donc appliquer entre les mesures géométriques faites sur les deux axes un facteur d'échelle  $\varepsilon$  dont la valeur est donnée par l'expression :

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(1 + \beta^2)}}{\sqrt{(1 - \beta^2)}}$$



Le diagramme de Minkowski permet de retrouver toutes expressions habituelles de la relativité restreinte. Voyons, par exemple, comment on peut retrouver, la dilatation des intervalles de temps.

Sur le diagramme, à droite, on a représenté un intervalle  $c \cdot \Delta t'_0$  d'une unité de l'axe  $ct'$  et sa correspondance  $c \cdot \Delta t$  sur l'axe  $ct$  du repère  $(0, x, ct)$ . Pour cela on trace les parallèles à l'axe  $Ox$  passant par les extrémités 1 et 2 du segment  $c \cdot \Delta t'_0$ . Nous pouvons écrire

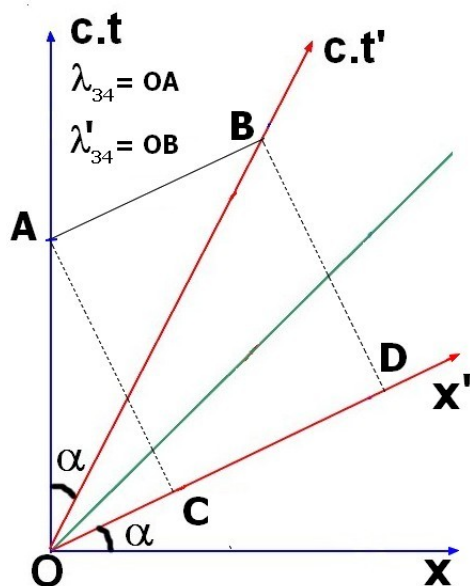
pour les longueurs  $\lambda_{12}$  et  $\lambda'_{12}$  de ces segments :

$$\lambda_{12} = \lambda'_{12} \cdot \cos(\alpha) \quad \text{et avec } \varepsilon : \quad c \cdot \Delta t = \frac{\sqrt{(1 + \beta^2)}}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \cdot c \cdot \Delta t'_0 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\text{or } \cos^2(\alpha) = \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)} = \frac{1}{1 + \beta^2}$$

$$c \cdot \Delta t = \frac{\sqrt{(1 + \beta^2)}}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \cdot c \cdot \Delta t'_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'_0}{\sqrt{(1 - \beta^2)}}$$

Montrons que la relation est la même si on exprime le temps propre  $\Delta t_0$  dans (R) en fonction du  $\Delta t'$  dans le repère (R') (points entre 3 et 4) pour un intervalle de temps entre deux événements vus respectivement par un observateur de (R) et de (R'). Pour cela raisonnons sur la figure ci dessous :



Considérons les triangles rectangles OAC et OBD. Nous pouvons écrire dans chacun d'eux :

$$AC = OA \cdot \sin(\hat{AOC})$$

$$\text{avec } \hat{AOC} = \alpha + \frac{\pi}{2} - 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$BD = OB \cdot \sin(\hat{BOD})$$

$$\text{avec } \hat{BOD} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$$

Comme  $BD = AC$  nous pouvons écrire :

$$OB \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = OA \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$OB \cdot \cos(2\alpha) = OA \cdot \cos(\alpha)$$

Donc :

$$\lambda_{34} = \lambda'_{34} \cdot \frac{\cos(2\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \text{et avec } \varepsilon : \quad c \cdot \Delta t_0 = \frac{\sqrt{(1 + \beta^2)}}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \cdot c \cdot \Delta t' \cdot \frac{\cos(2\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

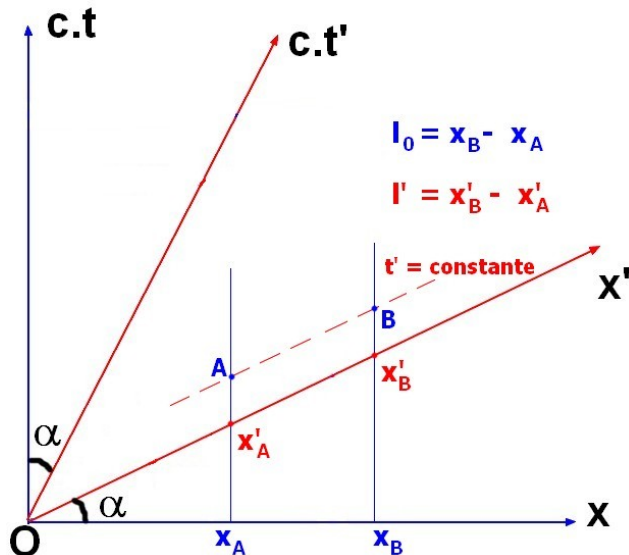
Finalement, sachant que  $\cos(2\alpha)/\cos(\alpha) = [1 - \tan^2(\alpha)] / [1 + \tan^2(\alpha)]^{1/2}$  :

$$c \cdot \Delta t_0 = \frac{\sqrt{(1 + \beta^2)}}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \cdot c \cdot \Delta t' \cdot \frac{(1 - \beta^2)}{\sqrt{(1 + \beta^2)}} \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{(1 - \beta^2)}}$$

Le diagramme de Minkowski permet donc bien de retrouver la réciprocité de la dilatation des durées. Il en est de même pour la contraction des longueurs et la relativité de la simultanéité.

Cependant, comme on l'a déjà indiqué, le diagramme de Minkowski souffre de plusieurs défauts :

- Les deux référentiels sont traités différemment (l'un des repère est rectangulaire alors que l'autre est oblique)
- Les unités sur les axes ne sont pas les mêmes et nécessitent donc l'utilisation d'un facteur d'échelle pour passer de l'un des repères à l'autre.



Ce dernier point peut être illustré en représentant dans un tel diagramme un objet au repos dans le repère (R) dans lequel sa longueur est  $l_0$  alors qu'elle a pour valeur  $l'$  dans le repère en mouvement (R').

**Les deux lignes parallèles à l'axe ct représentent les lignes d'univers des extrémités de l'objet au repos dans (R).** Ces extrémités ont donc, dans ce repère, des coordonnées constantes.

On a alors :

$$l_0 = x_B - x_A$$

Quelle procédure de mesure doit-on mettre en place pour obtenir sa longueur  $l$  dans le repère (R') ? La réponse est simple : **il faut mesurer la position des deux extrémités au même instant  $t'$** , mesuré dans le repère (R').

N'importe quelle ligne, parallèle à l'axe  $x'$  et représentant une quantité  $t' = \text{constante}$ , convient et va couper les deux lignes d'univers des extrémités de l'objet en deux points A et B du diagramme de Minkowski. Ces deux événements ont pour coordonnées, dans le système  $(x', t')$ , les couples  $(x'_A, t')$  et  $(x'_B, t')$  avec la même valeur de  $t'$  pour chacun d'eux. La longueur de l'objet mesurée dans (R') a donc pour valeur la quantité  $l' = (x'_B - x'_A)$ .

Mesurées dans (R), les coordonnées sur l'axe des  $x$  de ces deux événements sont respectivement égale à  $x_A$  et  $x_B$ , et sont indépendantes de l'instant  $t$  déterminé dans (R). De ce fait, en appliquant la transformation de Lorentz [symétrique de celle présentée en (1)] exprimant  $x$  en fonction de  $x'$  et  $t'$ , nous pouvons écrire<sup>5</sup> :

$$x_A = \gamma \cdot (x'_A + \beta \cdot ct')$$

$$x_B = \gamma \cdot (x'_B + \beta \cdot ct')$$

Par conséquent : 
$$x_B - x_A = \gamma \cdot (x'_B - x'_A)$$

<sup>5</sup> Il suffit de remplacer les grandeurs primées par celles qui ne le sont pas et de changer le signe de  $\beta$

Enfin :

$$l' = \frac{l_0}{\gamma} = l_0 \cdot \sqrt{(1 - \beta^2)}$$

On retrouve donc bien la contraction relativiste des longueurs.

Cependant, en regardant trop rapidement le diagramme dessiné sur la page précédente, on peut être induit en erreur car il y apparaît que  $l'$ , représentée par la distance  $(x'_B - x'_A)$ , est **plus grande** que  $l_0$ , représentée par  $(x_B - x_A)$ . Mais il faut se souvenir que, dans le diagramme de Minkowski, les unités des axes correspondants n'ont pas la même longueur et qu'il faut donc leur appliquer un facteur d'échelle  $\varepsilon$ . Si on prend cela en compte, la mesure de  $l'$  est toujours **plus petite** que celle de  $l_0$ .

### 3. Diagramme de Brehme ou Lorentz

Les inconvénients du diagramme précédent ont amené les scientifiques à proposer d'autres types de représentation. Parmi celles-ci nous retiendrons tout d'abord le diagramme proposé par Robert Brehme en 1968, et qu'il proposa d'appeler diagramme de Lorentz.

Pour cela, nous pouvons réécrire les deux relations (1) différemment :

$$x = \frac{1}{\gamma} \cdot x' + \beta \cdot c \cdot t \quad \text{à partir de la première équation de (1)}$$

$$c \cdot t' = \frac{1}{\gamma} \cdot c \cdot t - \beta \cdot x' \quad \text{en combinant l'équation précédente et la}$$

seconde du groupe (1)

Sachant que  $(1/\gamma)^2 + \beta^2 = 1$  on peut poser  $\beta = \sin(\alpha)$  et  $(1/\gamma) = \cos(\alpha)$  ce qui nous donne pour les relations ci dessus :

$$x = \cos(\alpha) \cdot x' + \sin(\alpha) \cdot c \cdot t$$

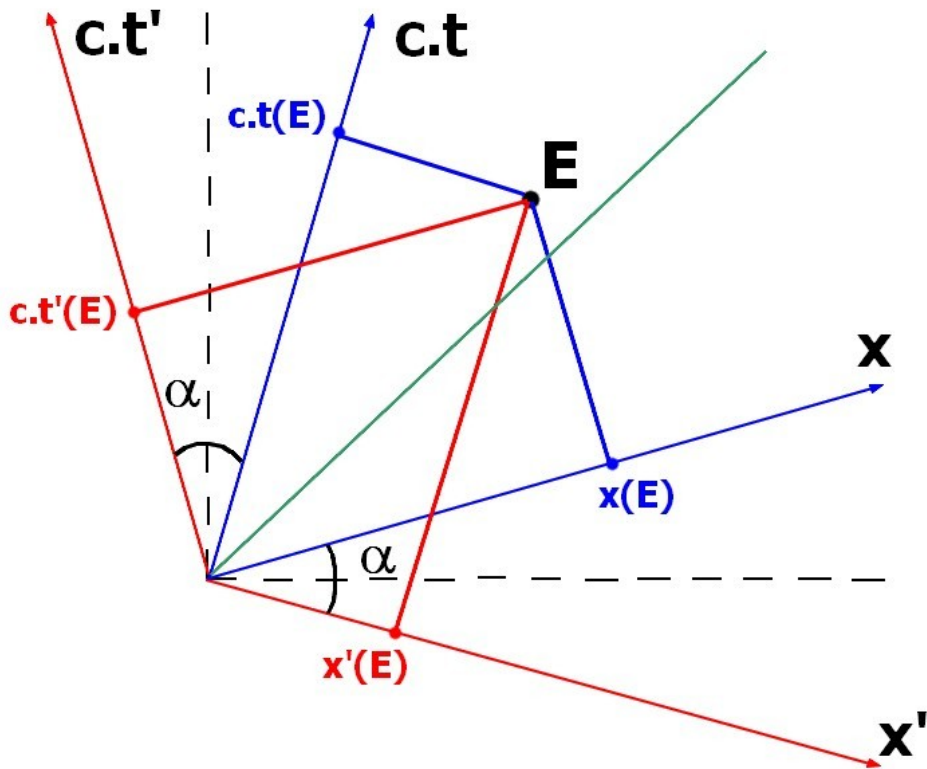
$$c \cdot t' = \cos(\alpha) \cdot c \cdot t - \sin(\alpha) \cdot x'$$

Ces relations de transformation correspondent donc à une rotation d'angle  $\alpha^6$  entre les systèmes d'axes  $(x', ct)$  et  $(x, ct')$ . En prenant le système  $(x', ct)$  avec ses deux axes perpendiculaires, il en sera de même du système  $(x, ct')$ . On obtient alors notre diagramme de Lorentz dans lequel les deux référentiels  $(R)$  et  $(R')$  sont représentés graphiquement par le système de coordonnées  $(0, x, ct)$  et  $(0, x', ct')$ , les deux origines étant, comme dans le diagramme de Minkowski, confondus.

Pour obtenir les coordonnées d'un événement on peut projeter son point représentatif soit perpendiculairement soit parallèlement aux axes. Pour le diagramme de Lorentz on le fait perpendiculairement. On a donc, au final, la construction suivante : on trace tout d'abord deux lignes de référence, l'une horizontale et l'autre verticale, qui vont nous permettre de tracer les axes  $ct$  et  $ct'$  symétriques par rapport à la

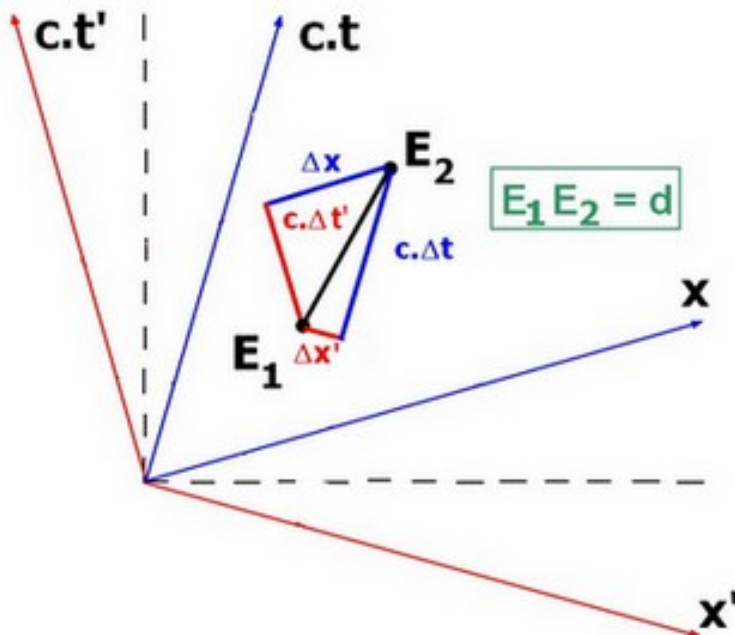
<sup>6</sup> L'angle  $\alpha$  du diagramme de Lorentz est différent, pour une même vitesse  $V$ , de celui du diagramme de Minkowski car, dans le premier cas,  $\beta = \sin(\alpha)$  alors que dans le second  $\beta = \tan(\alpha)$ . Par exemple si nous avons  $\beta = 0,99$ ,  $\alpha$  vaut pour le diagramme de Lorentz et pour celui de Minkowski.

référence verticale et les axes  $x$  et  $x'$  également symétriques par rapport à la référence horizontale. Le résultat de ce tracé est alors :



On constate bien, dans cette construction, la symétrie entre les deux systèmes de coordonnées : aucun n'a une position privilégiée par rapport à l'autre, ce qui respecte bien l'esprit de la relativité restreinte. Comme pour le diagramme de Minkowski, la ligne d'univers de la lumière est une droite – en vert sur la figure – qui fait un angle de  $45^\circ$  avec la ligne horizontale en pointillé.

Mettons en œuvre ce diagramme pour démontrer l'invariance de l'intervalle d'espace-temps  $\Delta s^2$  tel que :



$$\Delta s^2 = c \cdot \Delta t^2 - \Delta x^2$$

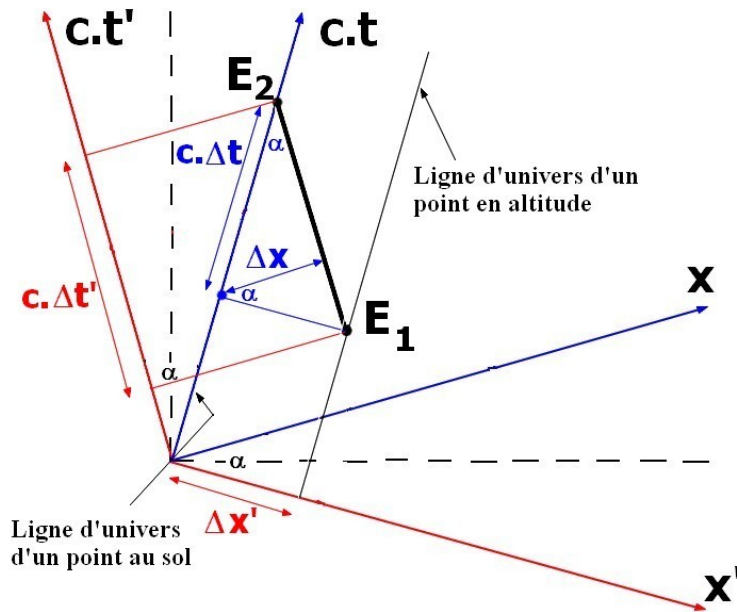
Géométriquement, nous pouvons écrire :

$$d^2 = (c.\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 = (c.\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$$

$$\text{donc } (c.\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c.\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = \Delta s^2$$

$\Delta s^2$  est bien un invariant puisque le choix de nos référentiel  $(R)$  et  $(R')$  est quelconque.

Utilisons le diagramme de Lorentz au cas de l'étude de la désintégration des muons atmosphériques.



$E_1$  représente l'événement associé à la création de cette particule et  $E_2$  celui attaché à sa désintégration au niveau du sol.

Considérons le muon au repos dans le repère  $(R)$  et le repère  $(R')$  attaché au sol, dans lequel le point de l'atmosphère où est créé le muon ainsi que le point au sol où il se désintègre sont au repos.

Les deux événements  $E_1$  et  $E_2$  sont séparés par un intervalle d'espace-temps dont les composantes, respectivement dans les repères  $(R)$  et  $(R')$ , sont  $(c.\Delta t, \Delta x)$  et  $(c.\Delta t', \Delta x')$ . La valeur de  $\Delta t$  représente la durée de vie propre du muon dans  $(R)$  puisqu'il se désintègre en arrivant au sol. Dans le référentiel terrestre  $(R')$  la quantité  $\Delta x'$  représente la distance parcourue par le muon et  $\Delta x$  est l'épaisseur de l'atmosphère, mesurée dans  $(R)$  par un voyageur accompagnant le muon.  $\Delta x$  est donc, dans le repère du muon, la distance, mesurée au même instant, entre le point de sa création et celui de sa désintégration.

La figure nous permet alors d'écrire :

$$c.\Delta t' = \frac{c.\Delta t}{\cos(\alpha)} \quad \text{avec} \quad \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \beta^2}$$

Donc  $\Delta t' > \Delta t$

De même nous avons :

$$\Delta x = \Delta x' . \cos(\alpha)$$

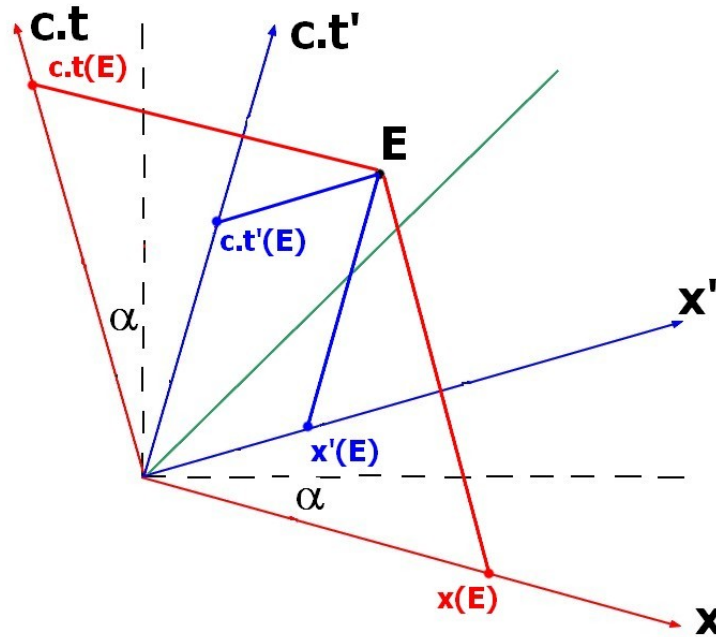


Donc  $\Delta x' < \Delta x$

Dans le repère terrestre la durée de vie d'un muon est donc augmentée et, dans le repère du muon, l'épaisseur de l'atmosphère est diminuée.

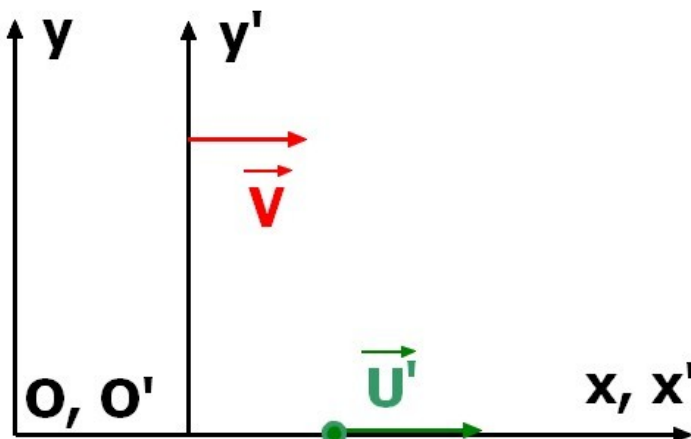
#### 4. Diagramme de Loedel

Il y a également celui imaginé par Enrique Loedel Palumbo en 1957. Ce dernier ressemble au précédent et est construit de la même façon mais la projection sur les axes se fait **parallèlement** à ces derniers et non pas **perpendiculairement**. De ce fait il est nécessaire d'invertir, par rapport au diagramme de Lorentz, la position des systèmes d'axes des deux référentiels en mouvement relatif.



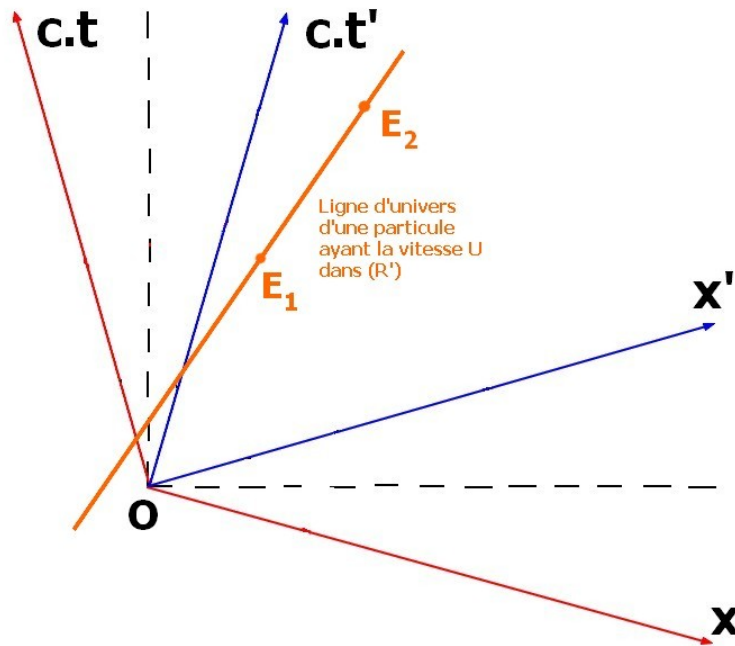
La figure ci dessus montre comment obtenir les coordonnées d'un événement dans chacun des deux systèmes d'axes.

Utilisons ce type de diagramme pour démontrer la loi de composition des vitesses en relativité restreinte. Supposons qu'un objet ait une vitesse  $U'$  par rapport à un référentiel ( $R'$ ) qui est lui-même en mouvement rectiligne uniforme, avec la vitesse  $V$ , par rapport à un référentiel inertiel ( $R$ ), comme indiqué sur la figure ci-dessous.

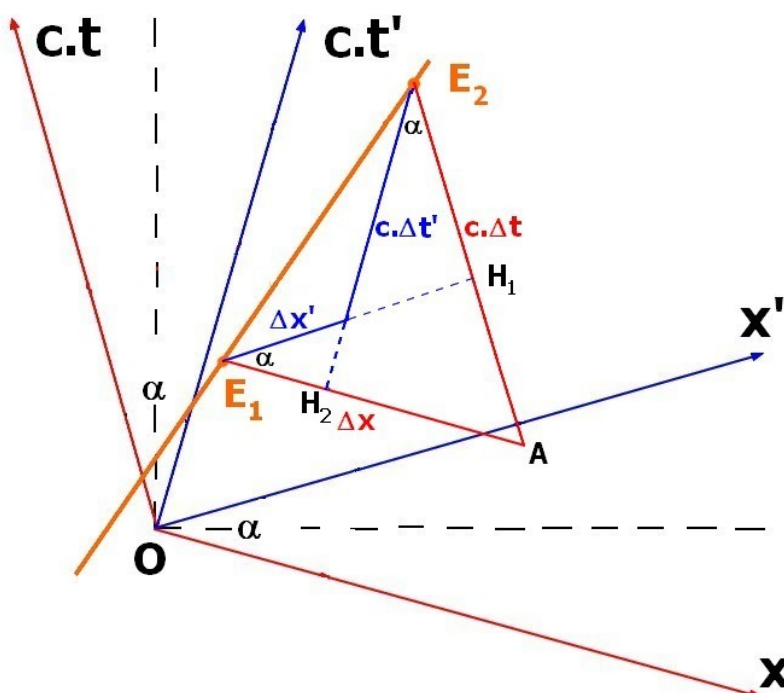


Nous cherchons donc la vitesse  $U$  de la particule par rapport au référentiel  $(R)$ . En physique classique, il découle de la transformation de Galilée que  $U = U' + V$ . Ce résultat n'est plus valable dans le cadre de la relativité restreinte. À l'aide du diagramme de Loedel, cherchons la nouvelle expression de  $V$ .

La ligne d'univers d'une particule se déplaçant à vitesse constante  $U$  dans  $(R')$  est une droite dans un diagramme d'espace-temps. Sur cette ligne d'univers, prenons deux événements  $E_1$  et  $E_2$ , représentant la position de l'objet à deux instants différents.



Représentons maintenant sur ce diagramme les intervalles spatiaux  $\Delta x$  et  $\Delta x'$  et les intervalles temporels  $\Delta t$  et  $\Delta t'$  entre ces deux événements, dans les référentiels  $(R)$  et  $(R')$ .



Sur cette figure, nous voyons que le triangle rectangle  $E_1H_1A$ , d'hypoténuse  $\Delta x$ , est semblable au triangle rectangle  $E_2H_2A$ , d'hypoténuse  $c.\Delta t$ . Par conséquent, le rapport des hypoténuses de ces deux triangles est égal au rapport de leur coté adjacente à l'angle  $\alpha$ . On peut donc écrire :

$$\frac{\Delta x}{c.\Delta t} = \frac{\Delta x' + c.\Delta t'.\sin(\alpha)}{\Delta x'.\sin(\alpha) + c.\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta x'}{c.\Delta t'} + \sin(\alpha)}{\frac{\Delta x'}{c.\Delta t'}.\sin(\alpha) + 1}$$

Le membre de gauche peut s'écrire :

$$\frac{\Delta x}{c.\Delta t} = \frac{1}{c}.U$$

De même nous avons :

$$\frac{\Delta x'}{c.\Delta t'} = \frac{1}{c}.U'$$

De plus, nous savons que, pour le diagramme de Loedel, nous avons :

$$\sin(\alpha) = \frac{V}{c}$$

La première équation s'écrit alors :

$$\frac{1}{c}.U = \frac{\frac{1}{c}.U' + \frac{V}{c}}{\frac{1}{c^2}.U'.V + 1} \Rightarrow U = \frac{U' + V}{1 + \frac{U'.V}{c^2}}$$

On retrouve bien ici la formule relativiste de composition des vitesses.

### **5. Question de cinématique traité avec un diagramme**

Les coordonnées  $x$  d'espace et  $t$  de temps de deux événements  $E_1$  et  $E_2$ , mesurées dans un référentiel  $(R)$  sont ( $y = z = 0$  dans les deux cas):

- $x_1 = x_0$  ,  $t_1 = x_0/c$  (événement 1)
- $x_2 = 2x_0$ ,  $t_2 = x_0/2c$  (événement 2)

a) Il existe un référentiel  $(R')$  où les deux événements se produisent en même temps. Quelle est la vitesse de ce référentiel par rapport à  $(R)$  ?

b) Quelle est la valeur du temps  $t'$  pour laquelle les deux événements ont lieu dans le nouveau référentiel  $(R')$ ?

Pour dessiner le diagramme, la difficulté est de connaître le sens du mouvement relatif entre (R) et (R') : y a t'il éloignement ( $V > 0$ ) ou rapprochement ( $V < 0$ ) ?

Vérifions que (R') existe en calculant le  $\Delta s^2$  entre  $E_1$  et  $E_2$  dans le référentiel (R) :

$$\Delta s^2 = (c.\Delta t)^2 - \Delta x^2$$

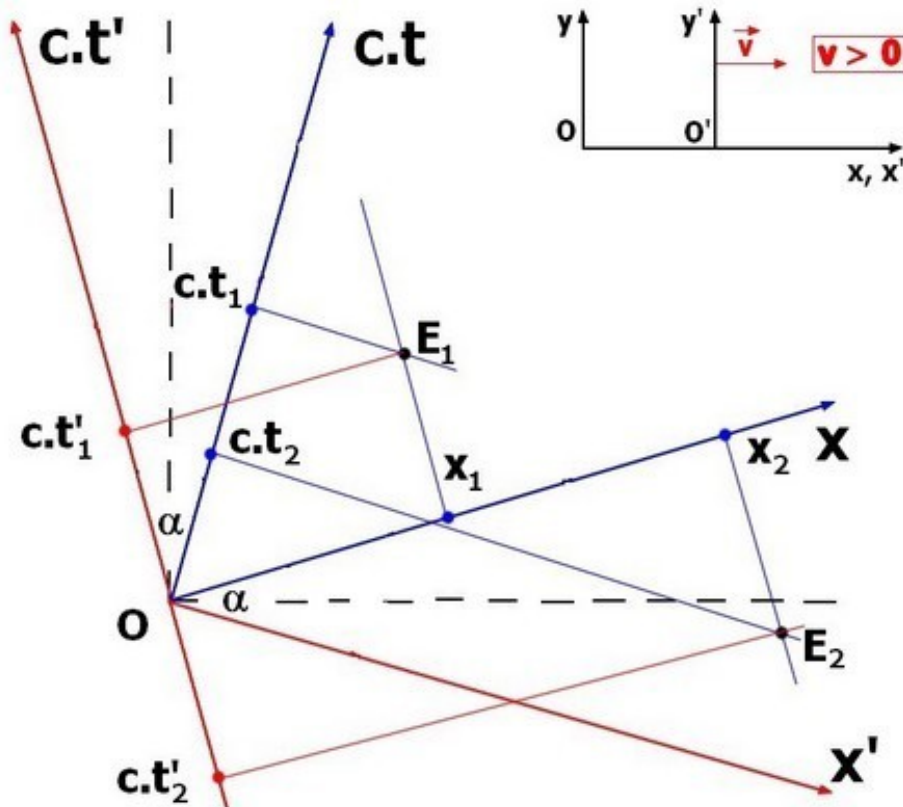
$$\Delta s^2 = c^2.(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$$

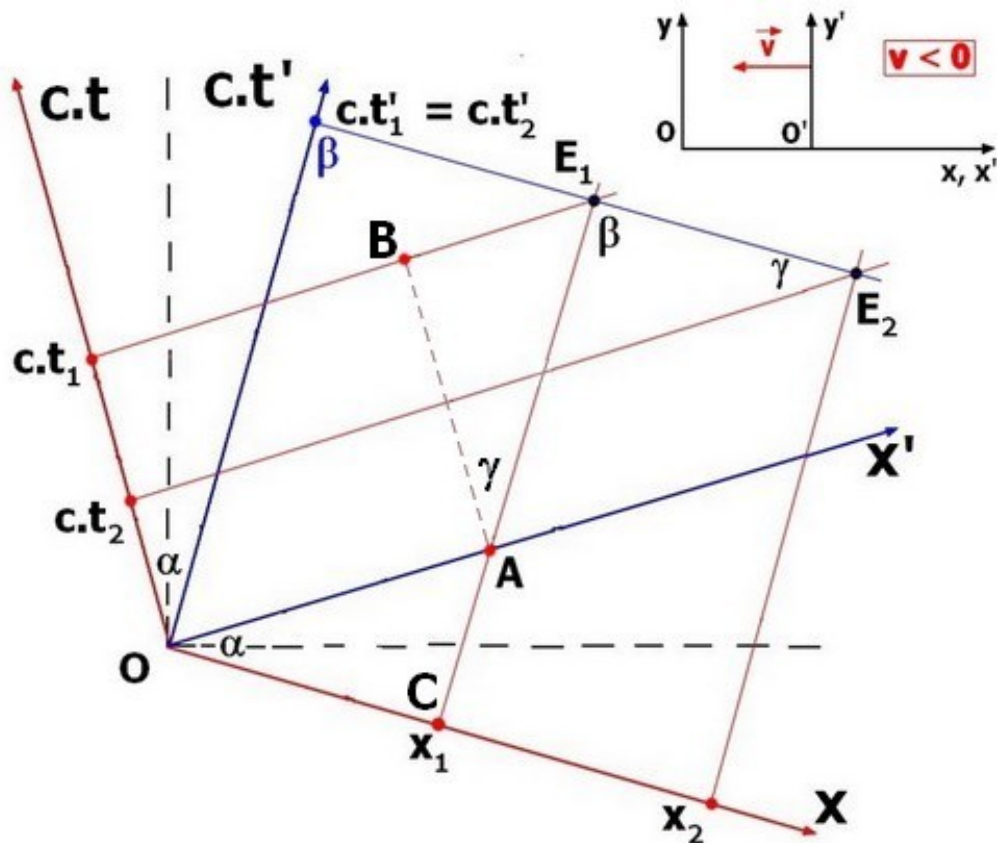
Remplaçons  $t_i$  et  $x_i$  par leurs valeurs données dans le texte :

$$\Delta s^2 = c^2.\left(\frac{x_0}{2.c} - \frac{x_0}{c}\right)^2 - (2.x_0 - x_0)^2 = -\frac{3.x_0^2}{4} < 0$$

L'intervalle d'espace - temps, qui est un invariant en relativité restreinte, est donc négatif. Il est alors du genre espace. Dans ce cas nous savons qu'il existe un référentiel (R') dans lequel les deux événements peuvent être simultanés.

Voyons maintenant les deux cas correspondant au signe de  $V$ . Rappelons auparavant que sur les diagrammes, les axes  $Oct$  et  $Ox'$ , ainsi que  $Ox$  et  $Ox'$ , sont inversés lorsqu'on passe d'un rapprochement à un éloignement. Les deux graphiques ci-dessous représentent ces deux situations. On constate que, pour la première - c'est à dire  $V > 0$  - il n'est pas possible d'avoir  $E_1$  et  $E_2$  simultanés dans (R').





Raisonnons sur ce second diagramme. Si les deux événements  $E_1$  et  $E_2$  sont simultanés dans  $(R')$  ils appartiennent à une droite  $ct' = \text{constante}$  qui est perpendiculaire à l'axe  $t'$ . De ce fait l'angle  $\beta$  est droit et l'angle  $\gamma = (\widehat{AE_1E_2})$  vaut alors  $\alpha$ . Dans le triangle  $E_1AE_2$  on peut écrire :

$$AE_1 = \frac{ct_1}{\cos(\alpha)} = \frac{x_0}{\cos(\alpha)}$$

De plus :

$$\tan(\alpha) = \frac{AE_1}{E_1E_2} = \frac{x_0}{2x_0 \cdot \cos(\alpha)} = \frac{1}{2 \cdot \cos(\alpha)}$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{2 \cdot \cos(\alpha)} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Nous savons que  $\sin(\alpha) = v/c$ . Donc  $v = c/2$  en module.

Comme nous avons un mouvement de rapprochement, nous avons  $v < 0$  et nous prendrons :

$$\boxed{v = -\frac{c}{2}}$$

Pour la question b) nous voyons, sur le diagramme, que :

$$ct'_1 = ct'_2 = CE_1$$

Or  $CE_1 = E_1A + AC$  avec :

$$E_1A = \frac{AB}{\cos(\gamma)} = \frac{c.t_1}{\cos(\alpha)} \text{ puisque } \gamma = \alpha \text{ dans notre cas}$$

$$\text{comme } c.t_1 = x_0 \Rightarrow E_1A = \frac{x_0}{\cos(\alpha)}$$

Nous avons également :

$$AC = OC.tan(\alpha) = x_1.tan(\alpha) = x_0.tan(\alpha) = x_0 \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Donc :

$$c.t'_1 = CE_1 = E_1 + AC = \frac{x_0}{\cos(\alpha)} + x_0 \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{x_0}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + x_0 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3.x_0}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.x_0$$

$$\boxed{t'_1 = t'_2 = \sqrt{3} \cdot \frac{x_0}{c}}$$

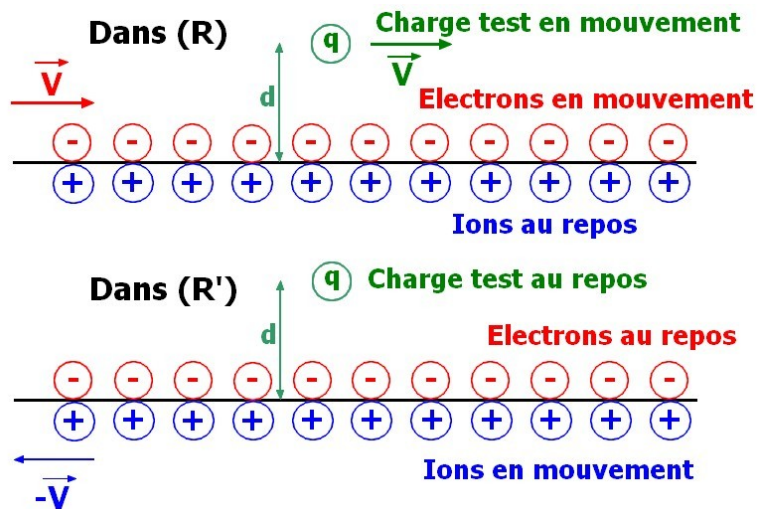
On aurait, bien entendu, pu retrouver ces résultats en appliquant les transformations de Lorentz. L'intérêt du diagramme, ici, est de permettre de mieux comprendre ce qui est possible et ce qui ne l'est pas en relativité restreinte comme, par exemple, la question de la simultanéité qui, dans notre cas, n'est possible que pour un sens de déplacement des référentiels (R) et (R') l'un par rapport à l'autre.

## **6. Question d'électromagnétisme traité avec un diagramme**

Abordons ici une question plus physique relative à la nouvelle approche que nous avons en relativité restreinte du concept de champ magnétique. Par exemple, dans l'expérience de la boucle conductrice et de l'aimant, il n'est plus nécessaire de faire appel à deux théories différentes : celle de la force de Lorentz lorsque la boucle se déplace et que l'aimant est « fixe » et celle de l'apparition d'un champ électromoteur décrit par une des équations de Maxwell – celle dite de Maxwell – Faraday – lorsque la boucle est « fixe » et que l'aimant se déplace.

Sans aborder des calculs assez longs, on peut montrer que l'existence d'un champ magnétique dans un référentiel dans lequel des charges électriques sont en mouvement relatif découle naturellement des équations de la relativité restreinte. On illustrera ensuite ceci à l'aide d'un diagramme espace – temps.

Pour montrer comment la relativité restreinte introduit élégamment la notion de champ magnétique nous allons raisonner sur un modèle simpliste mais pertinent pour la question que nous traitons ici.



Considérons un fil électrique en cuivre infiniment long parcouru par un courant. Les ions  $\text{Cu}^+$  restent fixes dans le repère  $(R)$  du laboratoire et les électrons y sont en mouvement avec une vitesse  $V$ <sup>7</sup>. Que perçoit alors une charge électrique test de valeur  $q$  en mouvement avec la même vitesse  $V$  le long du fil et à une distance  $d$  de ce dernier ? Les densités linéiques de charges positives et négatives dans le fil sont égales en valeur absolue et de signes contraires et valent  $\pm \lambda_0$ . Cette distribution de charges va donc créer deux champs électriques de sens contraire et de même module<sup>8</sup> ( $E_+ = E_- = 2k\lambda_0/d$ ), au niveau de la charge  $q$ . De ce fait la force électrique sur  $q$  est nulle.  $q$  serait au repos il n'y aurait rien de plus à écrire mais cette charge est en mouvement et elle doit être sensible à un champ magnétique. Pour découvrir quelque chose à propos de la force magnétique exercée sur  $q$  quand elle est observée dans  $(R)$ , plaçons nous dans un référentiel  $(R')$  qui se déplace avec la vitesse  $V$  par rapport à  $(R)$ , comme on peut le voir sur la figure précédente. Dans  $(R')$ , la charge  $q$  est au repos, les électrons également, et les ions positifs sont en mouvement avec la vitesse  $-V$ . Du point de vue d'un observateur au repos dans  $(R')$ , la distance entre les électrons a augmenté et, de ce fait, la densité linéique  $\lambda_-$  a diminué d'un facteur  $1/\gamma$ . On a alors la relation  $\lambda_- = \lambda_0/\gamma$ . D'un autre côté, la contraction relativiste de la distance entre les ions positifs en mouvement entraîne une augmentation de la densité linéique  $\lambda_+$  d'un facteur  $\gamma$ . Sa nouvelle valeur est donnée par  $\lambda_+ = \gamma \cdot \lambda_0$ , ce qui entraîne que, dans le référentiel  $(R')$ , les densités linéiques des charges positives et négatives du fil ne sont plus égales et opposées ! La charge  $q$ , au repos dans  $(R')$  va donc ressentir l'influence d'un champ électrique  $E'$  tel que :

La force appliquée, dans le référentiel  $(R')$ , sur la charge  $q$  est alors :

$$F' = q \cdot E' = 2 \cdot k \cdot \frac{\lambda_0}{d} \cdot \left( \gamma - \frac{1}{\gamma} \right) \cdot q$$

<sup>7</sup> Cette simplification peut être considérée comme grossière puisque, dans un conducteur, les électrons de conduction ont des vitesses dont le module et la direction sont de toute sorte. Cependant on peut dire que  $V$  est une vitesse de diffusion moyenne à l'équilibre et est associée au courant dans le fil.

<sup>8</sup>  $k$  est la constante  $1/4\pi\epsilon_0$  de la loi de Coulomb.

Sachant que  $F'$  est soit attractive soit répulsive selon le signe de  $q$  et qu'elle n'a qu'une composante  $F'_y$ <sup>9</sup> qui est donc perpendiculaire à l'axe du fil. Revenons maintenant dans le repère habituel ( $R$ ) pour déterminer la loi de force magnétique subie par  $q$  en utilisant la transformation des forces en dynamique relativiste dans ( $R$ ).

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma} = 2.k.\frac{\lambda_0}{d}.\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right).q$$

Comme :

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{V^2}{c^2} = \beta^2$$

Nous avons alors :

$$F_y = \beta^2.\left(\frac{2.k.\lambda_0}{d}\right).q = \beta^2.E.q$$

Rappelons que  $E$  est l'amplitude du champ électrique vu dans ( $R$ ) soit des charges positives soit des charges négatives contenues dans le fil. Comme il n'y a pas de force électrique sur  $q$  dans ( $R$ ), la force déterminée ici représente uniquement la force magnétique. Sa valeur est  $\beta^2$  fois plus faible que la force électrique qu'exercerait seule soit une distribution de charges positives soit de charges négatives. Elle est perceptible, même pour des valeurs faibles de  $\beta$ , car les forces électriques des deux distributions d'électrons et d'ions s'annulent rigoureusement. Son existence est directement liée ici à la contraction des longueurs en cinématique relativiste.

Cette situation peut être interpréter très simplement dans un diagramme espace -temps. On choisira celui de Lorentz dans lequel on va pouvoir montrer directement qu'il apparaît une densité linéique de charges globale différente de zéro dans le repère où les électrons et la charge  $q$  sont au repos et les ions en mouvement.

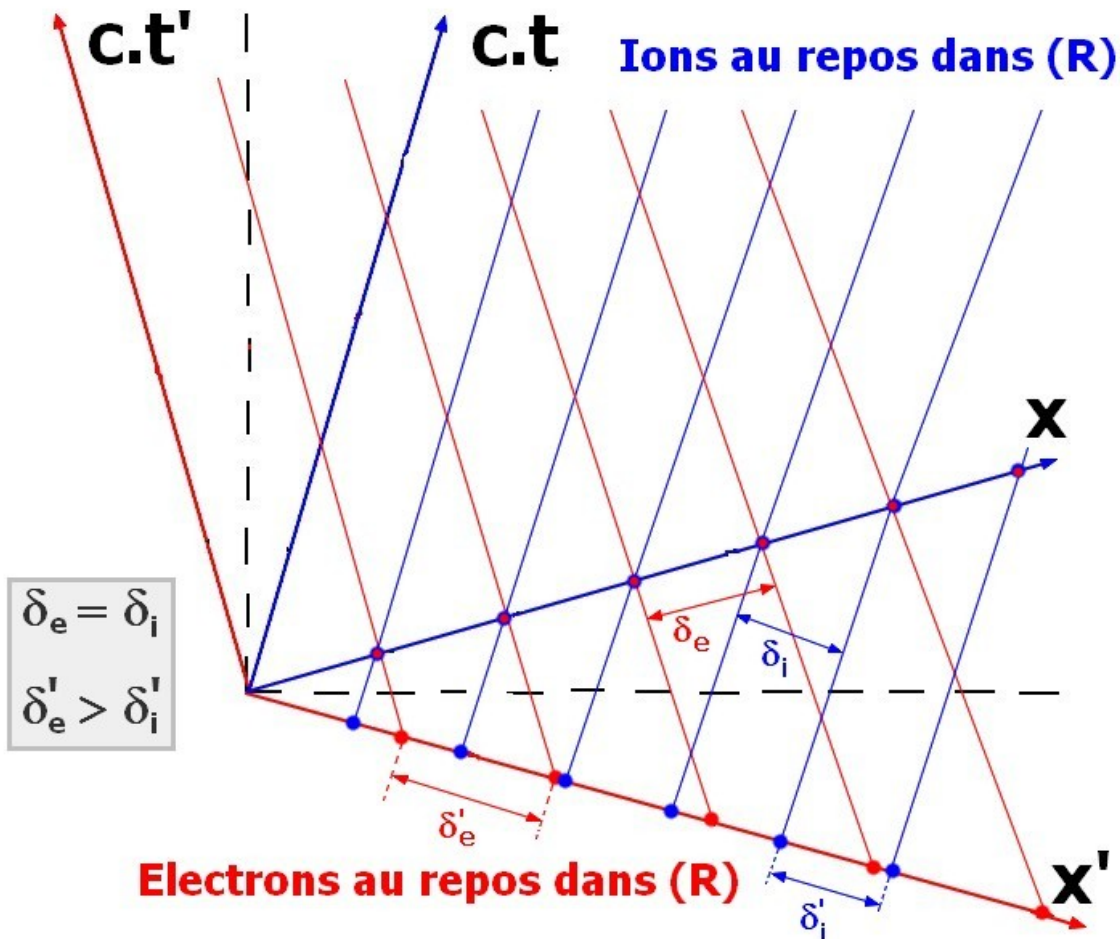
$$E' = 2.k.\frac{\lambda'}{d} \quad \text{avec} \quad \lambda' = \lambda_0.\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$E' = 2.k.\frac{\lambda_0}{d}.\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)$$

Les lignes d'univers des ions sont représentées par les lignes bleues parallèles à l'axe  $Oct$  et celles des électrons par les lignes rouges parallèles à l'axe  $Oct'$  puisque, par simplification, on a choisi une charge ayant la même vitesse  $V$  que les électrons qui sont au repos dans le repère ( $R'$ ).

<sup>9</sup> On ne détaille pas ici ce point qui nous emmènerait trop loin mais on peut le retrouver dans tous les ouvrages sur la relativité restreinte.





Comme, en moyenne, le fil de cuivre est électriquement neutre, le nombre de ligne d'univers des ions attachées à chaque élément du conducteur est égal à celui des lignes d'univers des électrons. Dans le repère  $(R)$  nous avons  $\delta_e = \delta_i$  et donc  $\lambda_e = \lambda_i$ , ceci restant vrai quelque soit l'instant  $t$  considéré.

Dans le référentiel  $(R')$  la position des ions positifs et des électrons négatifs à l'instant  $t' = 0$  est donné par l'intersection de leurs lignes d'univers avec l'axe  $Ox'$ . On visualise immédiatement sur la figure que, dans  $(R')$ , la distance  $\lambda'_e$  entre les électrons est plus grande que  $\lambda'_i$ , distance entre les ions. Ceci reste vrai pour n'importe quel instant  $t'$ . De ce fait nous constatons que, dans  $(R')$ , la densité de charge des ions est plus grande que celle des électrons. Ceci entraîne qu'une charge  $q$  extérieure au fil et au repos dans  $(R')$  subit une force électrique. Cette force, dans le repère  $(R)$ , est perçue comme un champ magnétique.

On peut montrer sans difficulté que le cas particulier que nous avons considéré ici (la charge  $q$  a la même vitesse  $V$  que les électrons dans le fil) peut se généraliser à celui où  $q$  a une vitesse  $U$  différente de  $V$ .

L'expression de  $F_y$  devient simplement :

$$F_y = \frac{U.V}{c^2} \cdot \left( \frac{2.k.\lambda_0}{d} \right) . q$$

## **7. Conclusion : avantages et inconvénients de la méthode**

On peut discuter tout d'abord des outils mathématiques mis en œuvre dans ces différentes méthodes. Pour celle du facteur  $k$  on manipule exclusivement des expressions algébriques en s'aidant qualitativement de diagrammes espace-temps simplifiés sur lesquels aucun calcul n'est directement entrepris. L'algèbre étant en général bien maîtrisée par nos élèves, ils n'ont pas de difficultés particulières pour les comprendre, hormis la logique des expériences de pensée utilisées qui nécessite beaucoup d'attention.

La démarche décrite ici s'appuie sur une représentation géométrique de la cinématique relativiste. Or, aujourd'hui, la géométrie n'est plus familière à nos élèves et, quelquefois, à nos collègues. Il n'est donc pas toujours facile à ce public de raisonner sur ces diagrammes et d'en saisir la mise en œuvre. On peut cependant contourner cette difficulté en les utilisant uniquement d'une manière graphique avec mesure d'angles et de longueurs. Ceci ne présente pas de difficulté particulière pour les diagrammes de Lorentz et de Loedel, celui de Minkowski étant de manipulation plus délicate du fait de sa dissymétrie et de l'inégalité des longueurs représentant les unités des différents axes.

Ces diagrammes ont également un avantage sur la méthode algébrique : comme le montrent les quelques exercices traités au cours des pages précédentes, ils permettent de représenter facilement une situation particulière et d'en déduire des résultats qualitatifs et quantitatifs. Ceci est plus malaisé dans le cas de la méthode proposée par H. Bondi qui l'avait développée essentiellement pour aider à mieux comprendre la relativité restreinte.

**Pierre MAGNIEN**