Le pendule de Foucault

Analyse du mouvement de la boule

Pierre Lauginie [1]

(version 3.5)

1. Groupe d'Histoire et de Diffusion des Sciences d'Orsay (GHDSO), Université Paris-Saclay.
<pierre.lauginie@universite-paris-saclay.fr>

Table des matières

Introduction

Qui n'a entendu parler du pendule de Foucault ? Il prouve que « la Terre tourne », voilà qui est bien connu :

> *« Avez-vous vu tourner la Terre ? Voulez-vous la voir tourner ? Allez jeudi, et jusqu'à nouvel ordre tous les jeudis suivants de dix heures à midi au Panthéon. ... et le Pendule, suspendu à la coupole de Soufflot ... manifeste à tous les yeux le mouvement rotatoire de notre planète. »*
>
> *Le National*, 26 mars 1851

Est-ce vraiment si clair ? La problématique du mouvement ou de l'immobilité de la Terre – deux mille ans de controverses – mérite davantage de subtilité : ce sera l'objet de la dernière partie de ce document (chap. 5). Auparavant, une étude fine du mouvement, des forces en présence, des approximations nécessaires et des problèmes mécaniques très concrets posés par l'anharmonicité des oscillations du pendule, sera nécessaire.

Ce document, destiné notamment à accompagner l'utilisation du « petit » pendule de Foucault de la Faculté des sciences d'Orsay (figure 1, haut), a en réalité une portée plus générale. Ce n'est pas un document historique ni de popularisation « grand public » : on vise ici à faire comprendre *dans le détail* le fonctionnement – et les dysfonctionnements – du pendule. Les démonstrations mathématiques y sont donc données *in extenso* ; le niveau requis est celui d'un étudiant de première ou seconde année d'études de sciences ; le public visé est celui des étudiants, leurs enseignants et techniciens, les enseignants de sciences physiques des lycées et collèges, mais aussi toute personne curieuse désireuse de comprendre dans le détail le fonctionnement de cet étrange instrument.

Organisation du document : outre la présente introduction, le document est organisé comme suit :

- **chapitres 1-2-3 :** dans l'approximation harmonique (petites amplitudes), étude mathématique détaillée des équations du mouvement de la boule du pendule et des trajectoires résultantes dans le référentiel terrestre :
  — *le pendule au pôle* (chap. 1, la base de tout) est traité comme un problème de *changement de référentiel* en mettant à profit la puissance de la représentation dans le plan complexe ;
  — *l'importance des conditions initiales* dans la résolution de l'équation du mouvement est fortement soulignée : trajectoires de la boule *très* différentes suivant

le mode de lancement, bonne leçon pour des étudiants ! Indispensable pour la compréhension ultérieure de l'accessoire « anneau de Charron » (chap. 4) ;

— *le pendule à toute latitude* (chap. 3) – la fameuse « loi du sinus » – est déduit de l'étude du pendule au pôle (chap. 1), et à l'équateur (chap. 2) ;

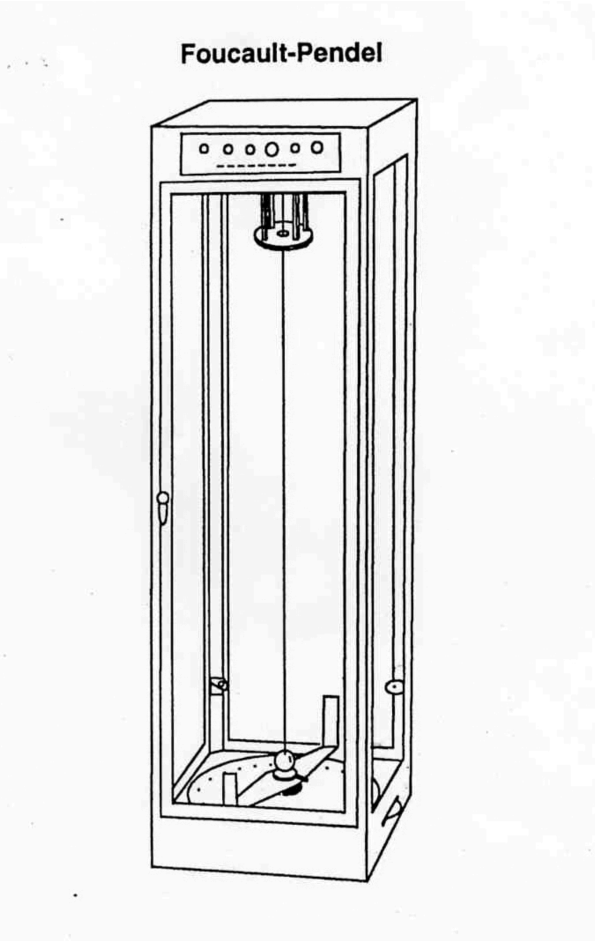
— enfin, le comportement hors du pôle (loi du sinus) est mis en relation avec une notion importante de *géométrie sur les surfaces riemanniennes*, dont la sphère : au cours de la rotation de la Terre, la direction d'oscillation du pendule subit un *transport parallèle* le long du parallèle du lieu. En ce sens – mais en ce sens particulier seulement, qui sera explicité – on peut dire que *à toute latitude*, la direction d'oscillation reste « parallèle à elle-même » au cours de la rotation de la Terre.

- **le chapitre 4** traite du problème fondamental rencontré dans la réalisation *pratique* d'un pendule de Foucault, surtout de petite taille : l'anharmonicité du pendule entraîne un mouvement de rotation parasite – la rotation dite *apsidale* – dans un sens ou dans l'autre ; il suffit d'une très faible « ovalisation » de la trajectoire pour que cette rotation domine la rotation de la Terre, rendant celle-ci inobservable. L'un des moyens d'y parer est « l'anneau de Charron », un dispositif très simple mais dont la compréhension complète requiert l'étude détaillée des formes des trajectoires effectuée au chapitre 1. Un joli problème de Mécanique, où de petites choses finissent par avoir de grands effets ! Une autre solution signalée est de rendre harmonique le mouvement du pendule par un dispositif adéquat.
- **le chapitre 5** replace le pendule de Foucault dans le Cosmos – l'espace et le temps – et dans l'Histoire comme déjà annoncé plus haut.
- plusieurs importantes **annexes** font suite au texte principal, notamment sur certains détails des trajectoires, sur le rôle de la force centrifuge et sur le *transport parallèle*, ainsi qu'une illustration du débat sur le mouvement de la Terre au début du XVII[e] siècle à partir de la lettre du cardinal Bellarmin au Père Foscarini, s'adressant de fait à Galilée.

Une attention particulière sera portée aux ordres de grandeur, la petitesse de la force responsable de la déviation du pendule sera notamment soulignée. Nous parlerons peu des dispositifs d'entretien des oscillations du pendule de Foucault, lorsqu'ils existent. Celui du « petit » pendule d'Orsay, dérivé de celui utilisé par Foucault pour l'exposition universelle de 1855, sera décrit. Mentionnons cependant une intéressante alternative mise en œuvre au Science Museum de Londres : l'entretien par *amplification paramétrique* : la longueur du câble de suspension est modulée à une fréquence double de la fréquence d'oscillation du pendule ; on montre en Mécanique que cela entraîne une amplification du mouvement. Le système est efficace, mais demande beaucoup de soin dans sa réalisation.

Un rêve pédagogique : Rêvons un peu !
Le rêve : enseigner l'essentiel de la Mécanique élémentaire à partir du pendule et de ses diverses réalisations :

— d'abord le pendule simple, puis pendule physique : forces, moments, lois de conservation ;



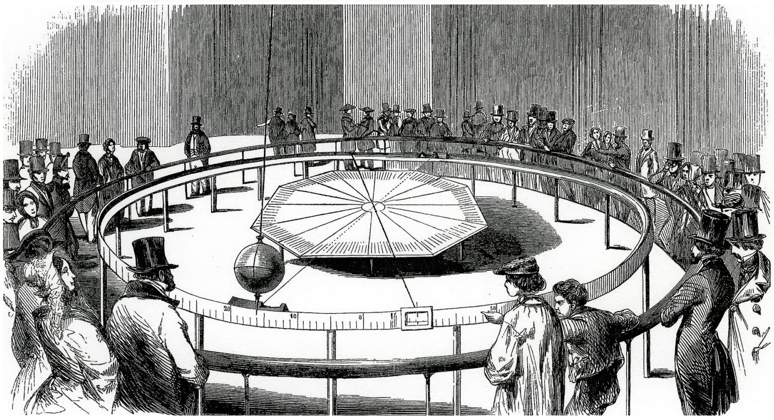


FIGURE 1 – *haut* : Pendule d'Orsay : longueur $l = 1,20\,\mathrm{m}$, boule de 250 g, entretenu, muni d'un anneau de Charron (fabrication *ELWE*) ; *bas* : Pendule du Panthéon (gravure de 1900), longueur $l = 67\,\mathrm{m}$, boule de 28 kg, non entretenu.

— puis le pendule de Foucault : initiation aux changements de référentiels – trajectoires simples relativement au référentiel stellaire, trajectoires compliquées relativement au sol ; équations du mouvement et conditions initiales, utilisation astucieuse des transformations dans le plan complexe, « illustration » par construction d'un modèle sur plateau tournant ; problème difficile de Mécanique, lié à l'anharmonicité des oscillations du pendule, et demandant des solutions *pratiques* ; enfin vision cosmique replaçant le pendule dans l'histoire des représentations du mouvement de la Terre.

Guide de lectures : bien entendu, l'article initial de Léon Foucault aux *Comptes-rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences* (1851, ref. [1]) est un « must ». De même, pour qui souhaiterait s'impliquer dans le détail de ses travaux, le *Recueil* (ref. [2]) s'impose, car Foucault a peu publié sur le sujet.

Par ailleurs, la meilleure introduction à notre sujet est certainement le chapitre 10 du livre de William Tobin : *Léon Foucault* (version française, 2002, ref. [3]) [1]. On y trouvera toutes les références sur l'histoire de Léon Foucault et de ses pendules, qu'il eût été inutile de plagier dans le présent document ; en revanche, les développements mathématiques détaillés, notamment l'étude fine du changement de référentiel et des trajectoires, le lien avec le « transport parallèle » ou l'explication détaillée de l'anneau de Charron, n'y figurent pas, le public visé étant beaucoup plus large.

Sur l'histoire précise des différents pendules de Foucault, on lira avec intérêt l'article de William Tobin et collègues dans *La Revue, Musée des arts et métiers* (2007, ref. [4]). Une remarquable mise au point, notamment sur l'histoire des « boules » des pendules de Foucault, histoire jusqu'alors maltraitée dans les diverses présentations au public [2].

Enfin, sur le lien du pendule de Foucault avec l'histoire des représentations du mouvement de la Terre et la Cosmogonie, la référence obligée est le livre de Jacques Gapaillard : *Et pourtant elle tourne ! Le mouvement de la Terre*, (ref. [8]).

1. La version anglaise est un peu plus riche, spécialement sur ce chapitre, l'éditeur de la version française n'ayant pas estimé le public français digne de recevoir certains développements pourtant essentiels à notre sens. Cependant, selon le dit de l'auteur « la version anglaise est un peu meilleure, coûte deux fois plus cher, mais n'est pas deux fois meilleure ». On peut la trouver par exemple à la Bibliothèque universitaire du centre d'Orsay.

2. La dernière aventure – postérieure à ladite publication – survint à la boule originale du pendule du Panthéon de 1851, parvenue ultérieurement au Conservatoire, et qui oscillait encore il y a peu d'années dans la chapelle du Musée des arts et métiers : le fil, fragilisé par quelques rudoiements récents, cassa et la boule en fut fortement cabossée, la rendant inutilisable. Bien évidemment, le pendule de Foucault n'avait pas été prévu pour servir de balançoire à de jeunes éméchées lors d'« évènements » plus ou moins rémunérateurs – si prisés de nos administrations – auxquels sont contraints nos établissements scientifiques et culturels. La boule a été remplacée par une copie, l'originale vivant désormais une retraite sereine dans une des vitrines. Cela fait désormais partie de l'histoire de ce pendule.

Chapitre 1

Le pendule de Foucault au pôle nord

Au départ, une idée simple : au pôle, le pendule est écarté de sa position d'équilibre. Lâché sans vitesse initiale par rapport aux étoiles, il oscille dans un plan qui demeure fixe par rapport à celles-ci. Donc ce plan pivote par rapport au sol à raison d'un tour par jour sidéral [1]. Ce n'est cependant pas ainsi que le pendule est lancé en général. Une analyse détaillée sera for instructive !

Hypothèses :

— le pendule est supposé au pôle nord ; la boule est assimilée à un point matériel de masse m.

— on se place dans l'approximation harmonique valable aux « petits angles ». Dans ces conditions, la force de rappel due à la gravité est proportionnelle à l'élongation angulaire ;

— on assimile la courbe décrite par la « boule » dans l'espace à sa projection sur le sol (valable dans l'approximation des petits angles).

On définit sur le sol deux systèmes de coordonnées cartésiennes planes, ou « référentiels » centrés au pôle O (cf. fig. 1.1) :

— les axes (OX, OY) liés aux étoiles – le Ciel – représentent le référentiel de Copernic ; il est notre référence en tant que *référentiel d'inertie* ou *galiléen* [2].

— les axes (Ox, Oy) liés à la Terre représentent le référentiel terrestre ; ils pivotent autour de la verticale en O dans le sens antihoraire avec la vitesse angulaire Ω correspondant à un tour en un jour sidéral (23 h 56 min, approx. 24 h). Les axes Ox et OX coïncident à l'instant zéro.

1. Le jour sidéral, soit 23 h 56 min 4 s ou 86164 s est l'intervalle de temps séparant deux passages successifs d'une même étoile au méridien. À cause du mouvement de la Terre sur son orbite, il diffère du jour solaire moyen – durée moyenne séparant deux passages successifs du Soleil au méridien – qui vaut, par définition, 24 h ou 86 400 s.

2. Nous savons qu'il ne peut exister de référentiel d'inertie totalement absolu, tous étant locaux dans le temps et l'espace ; cependant le référentiel de Copernic, lié aux étoiles de notre galaxie, l'est superbement au regard des conditions de notre problème, notamment au regard des échelles de temps, d'espace, et à la précision des mesures.

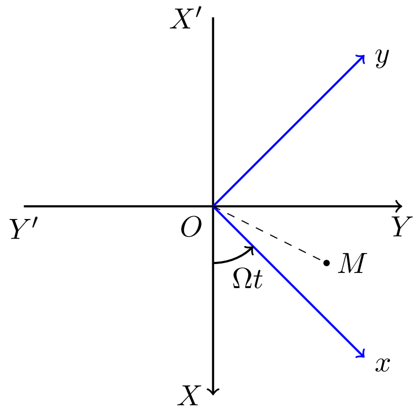


FIGURE 1.1 – Axes de coordonnées relatifs au référentiel de Copernic (OXY) et au référentiel terrestre (Oxy). Le point M représente la position de la boule à un instant donné.

— on identifie le plan horizontal au plan complexe $\mathbb{C}$ dans chaque référentiel : le vecteur $\overrightarrow{OM}$ représentant la position de la boule est identifié au nombre complexe affixe du point M, soit :
- dans le référentiel de Copernic, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est représenté par le nombre complexe Z :

  $\overrightarrow{OM} \iff Z = X + iY$ où X et Y sont les composantes de $\overrightarrow{OM}$ sur OX et OY respectivement ;
- dans le référentiel terrestre, le *même* vecteur $\overrightarrow{OM}$ est représenté par le nombre complexe z :

  $\overrightarrow{OM} \iff z = x + iy$ où x et y sont les composantes de $\overrightarrow{OM}$ sur Ox et Oy respectivement.

L'identification du plan géométrique au plan complexe permet de traiter les vecteurs comme des nombres complexes, ce qui simplifie considérablement l'écriture des démonstrations. On peut donc non seulement additionner des vecteurs, mais aussi les multiplier et les diviser entre eux (attention : ne pas confondre avec le produit scalaire ou le produit vectoriel !) [3]. Rappelons en particulier, car cela nous servira, que faire tourner le vecteur $\overrightarrow{OM}$ d'un angle φ autour de O revient à multiplier l'affixe de M par le nombre complexe $e^{i\varphi}$ (pensez à la représentation polaire des nombres complexes $z = |z|e^{i.arg z}$). Dans la suite, nous manipulerons donc des nombres complexes au lieu de vecteurs.

1.1 Mouvement de la boule dans le référentiel de Copernic

Dans le référentiel de Copernic, on se trouve dans la situation d'un pendule simple dans un référentiel galiléen ; la seule force agissante est la gravité : elle produit sur la boule une force de rappel proportionnelle au sinus de l'élongation angulaire, sinus que nous assimilons à l'angle dans l'approximation des petits angles ; dans cette approximation, la

3. On démontre qu'une telle identification n'est possible que si la dimension de l'espace est une puissance de 2. Pour info, si en dimension 2 le corps associé est donc le corps $\mathbb{C}$ des complexes, en dimension 4 c'est le corps des *quaternions*.

trace sur le sol suit les variations de l'élongation angulaire dans l'espace, le point M est donc soumis à une force rappel qui vaut :

$$-m\,\omega^2\,\overrightarrow{OM} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

où g est l'accélération de la pesanteur et l la longueur du pendule. L'équation du mouvement est alors l'équation différentielle classique de l'oscillateur harmonique, soit :

$$\ddot{\overrightarrow{OM}}_{\text{Copernic}} + \omega^2\,\overrightarrow{OM} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \ddot{Z} + \omega^2\,Z = 0 \tag{1.1}$$

où l'indice $()_{\text{Copernic}}$ indique qu'il s'agit de l'accélération du point M dans le référentiel de Copernic. La solution générale est de la forme (vérifiez en dérivant deux fois) :

$$Z(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \textit{ou} \qquad Z(t) = B\,e^{i\omega t} + C\,e^{-i\omega t} \tag{1.2}$$

où A, ϕ, B, C, sont des constantes dépendant des conditions initiales (C.I.) : *vitesse* et *position* à l'instant initial.

Comme pour toute équation différentielle du second ordre, le mouvement résultant (trajectoire, équation horaire) dépendra très fortement des conditions initiales. Dans la suite, nous traiterons en détail les deux types les plus importants de conditions initiales (il y en a bien sûr une infinité d'autres correspondant à l'infinité de manières de lancer le pendule). Tout d'abord, nous poserons :

$$k = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{\textit{période Terre}}{\textit{période pendule}}$$

k est le *nombre d'oscillations du pendule par tour de Terre* ; il serait, par exemple, de l'ordre de 5000 avec le pendule du Panthéon transporté au pôle.

1.1.1 Référentiel de Copernic : conditions initiales du type 1 ou « type Copernic »

À l'instant initial, le pendule est écarté de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale, *relativement au référentiel de Copernic*, d'un point de l'axe OX (l'opérateur est « dans le ciel »). Les C.I. sont donc :

$$Z(0) = X_0 \qquad \dot{Z}(0) = 0$$

où X_0 est l'amplitude initiale. L'équation horaire du mouvement est donc :

$$Z(t) = X_0 \cos\omega t \tag{1.3}$$

La trajectoire est le segment de droite $(-X_0,X_0)$ de l'axe réel $(X'X)$ décrit d'un mouvement sinusoïdal, comme attendu d'un pendule simple pour de petites élongations dans un référentiel galiléen [4] (cf. fig. 1.2 *a*).

4. Vous vous demandez comment on peut lancer le pendule *sans vitesse initiale par rapport aux étoiles* alors qu'on est soi-même entraîné par la rotation de la Terre. Faut-il être *hors de Terre*, faut-il

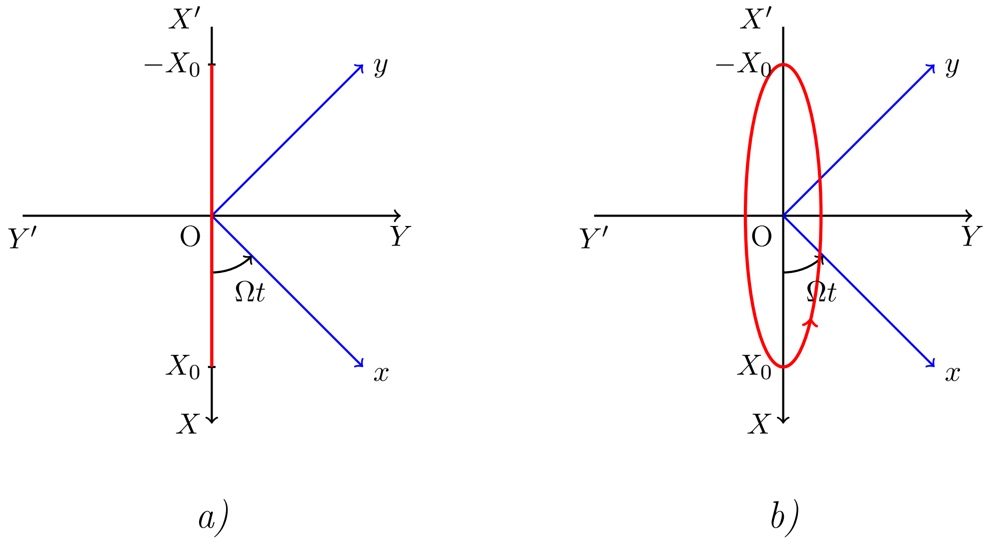


FIGURE 1.2 – Trajectoires de la boule (en rouge) dans le référentiel de Copernic : *a)* C.I. de type « Copernic » ; *b)* C.I. de type « Terre » (le petit axe de l'ellipse a été volontairement exagéré).

1.1.2 Référentiel de Copernic : conditions initiales du type 2 ou « type Terre »

À l'instant initial, le pendule est écarté de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale, *relativement au référentiel terrestre*, d'un point de l'axe OX (l'opérateur est « sur la Terre »). C'est ce que ferait un esquimau situé au pôle nord, et c'est de cette façon que le pendule est le plus souvent lancé sur Terre (par exemple au Panthéon ou au Musée des arts et métiers). La position initiale est toujours $Z(0) = X_0$; en revanche, la boule possède à l'instant initial une vitesse ΩX_0 dirigée vers l'est (c'est à dire dans la direction OY) due à la rotation de la Terre. Les nouvelles C.I. sont donc :

$$Z(0) = X_0 \qquad \dot{Z}(0) = i\Omega X_0$$

On reporte ces conditions initiales dans (1.2) en utilisant de préférence la forme exponentielle, plus simple dans ce cas. En tenant compte de $\omega/\Omega = k$, on obtient :

$$B = X_0(1 + 1/k) \qquad C = X_0(1 - 1/k)$$

soit finalement :

$$Z(t) = X_0(\cos \omega t + \frac{i}{k} \sin \omega t) \tag{1.4}$$

être un ange ou le bon Dieu pour cela ? Heureusement on peut facilement réaliser cela sur Terre, à savoir via les conditions initiales suivantes : à l'instant initial, le pendule est immobile, boule à l'origine ; on donne alors à la boule une impulsion *instantanée*, un bon coup de marteau qui lui donne une vitesse initiale v_0 dans la direction OX. Les C.I. sont alors : $Z(0) = 0, \quad \dot{Z}(0) = v_0$. L'équation horaire devient : $Z(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$. Le mouvement est le même, simplement déphasé de $\pi/2$ dans le temps.

Le mouvement est donc la combinaison d'un mouvement sinusoïdal selon $X'X$ de pulsation ω et d'un mouvement sinusoïdal de même pulsation déphasé de $\pi/2$ selon $Y'Y$. Le résultat est une ellipse droite ayant pour demi grand axe X_0 et pour demi petit axe X_0/k (cf. fig. 1.2 *b*). Il est important de souligner que, dans ce cas, la trajectoire de la boule *ne passe jamais par l'origine* [5].

1.2 Mouvement de la boule dans le référentiel terrestre

Nous allons traiter ce problème de changement de référentiel par une méthode particulièrement simple : rotation d'un nombre complexe. Reportons-nous à la figure 1.1 :

$$arg(z) = (Ox, \overrightarrow{OM}) \quad arg(Z) = (OX, \overrightarrow{OM}) \qquad (Ox, OX) = -\Omega t$$

Donc : $\quad arg(z) = arg(Z) - \Omega t$, et sachant que : $\quad |z| = |Z|$ il s'ensuit que :

$$z(t) = Z(t)\, e^{-i\Omega t} \tag{1.5}$$

Ainsi, pour avoir les trajectoires de la boule dans le référentiel terrestre, il suffit, *pour chaque type de conditions initiales*, de multiplier $Z(t)$ par $e^{-i\Omega t}$. On ne peut faire plus simple ! On obtiendra les coordonnées paramétriques du point courant de la trajectoire en prenant les parties réelle et imaginaire de l'équation (1.5).

1.2.1 Trajectoires dans le référentiel terrestre : conditions initiales du type 1 ou « type Copernic »

Dans ce cas, c'est un « plan d'oscillation » que l'on doit faire tourner.
Rappel : à l'instant initial, le pendule est écarté de sa position d'équilibre et lâché d'un point de l'axe OX, sans vitesse initiale *relativement au référentiel de Copernic*. À partir des équations (1.3 et (1.5), l'équation horaire du mouvement de la boule est donc :

$$z(t) = X_0 e^{-i\Omega t} \cos \omega t \tag{1.6}$$

ou, tenant compte de : $\omega = k\Omega$:

$$z(t) = X_0 e^{-i\Omega t} \cos k\Omega t \tag{1.7}$$

ce qui donne, en prenant les parties réelle et imaginaire [6] :

$$\begin{cases} x(t) = X_0\, [\ \ \cos \Omega t \cos k\Omega t] \\ y(t) = X_0\, [-\sin \Omega t \cos k\Omega t] \end{cases} \tag{1.8}$$

5. Il est donc dans ce cas incorrect, en toute rigueur, de dire, comme le font souvent les démonstrateurs, que « la boule va tout droit relativement aux étoiles » ; en pratique, k étant grand, l'ellipse est évidemment très aplatie. Ce détail deviendra cependant essentiel dans l'analyse du mouvement dans le référentiel terrestre si l'on veut comprendre le rôle de l'accessoire que nous appellerons dans la suite « anneau de Charron ».

6. On serait tenté ici de passer en représentation polaire en posant $|z| = \rho$, $\theta = -\,\Omega t$, ce qui donnerait $\rho = X_0|\cos k\theta|$. Or, la trajectoire comporte alors deux fois trop de lobes pour k impair ! L'erreur est d'écrire que $\theta = -\,\Omega t$, ce qui suppose $argZ = 0$. Or, $argZ = 0$ si $Z \in]0, X_0]$, tandis que $argZ = \pi$ si $Z \in [-X_0, 0[$ et dans ce dernier cas : $\theta = \pi - \Omega t$. Cela compliquerait beaucoup ! Voir aussi Annexe **A**.

En vue de la représentation graphique de la trajectoire *pour un tour de Terre*, on pose :

$$X_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \Omega t = u \quad u \in [0, 2\pi], \qquad \text{d'où :}$$

$$\begin{cases} x = \cos u \cos ku \\ y = -\sin u \cos ku \end{cases} \tag{1.9}$$

On injecte ces coordonnées paramétriques dans n'importe quel logiciel graphique, avec u décrivant l'intervalle $[0, 2\pi]$, et on obtient, par exemple pour $k = 10$, la jolie marguerite de la figure 1.3*a*.

1.2.2 Trajectoires dans le référentiel terrestre : conditions initiales du type 2 ou « type Terre »

Dans ce cas, c'est une ellipse que l'on doit faire tourner ; plus de « plan d'oscillation » ! Rappel : à l'instant initial, le pendule est écarté de sa position d'équilibre et lâché d'un point de l'axe OX, sans vitesse initiale *relativement au référentiel terrestre*. À partir des équations (1.4) et (1.5), l'équation horaire du mouvement de la boule est donc :

$$z(t) = X_0 e^{-i\Omega t}(\cos \omega t + \frac{i}{k} \sin \omega t) \tag{1.10}$$

ou, tenant compte de $\omega = k\Omega$:

$$z(t) = X_0 e^{-i\Omega t}(\cos k\Omega t + \frac{i}{k} \sin k\Omega t) \tag{1.11}$$

ce qui donne, en prenant les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} x(t) = X_0 \left[\cos \Omega t . \cos k\Omega t + \frac{1}{k} \sin \Omega t . \sin k\Omega t\right] \\ y(t) = X_0 \left[-\sin \Omega t . \cos k\Omega t + \frac{1}{k} \cos \Omega t . \sin k\Omega t\right] \end{cases} \tag{1.12}$$

En vue de la représentation graphique de la trajectoire *pour un tour de Terre*, on pose :

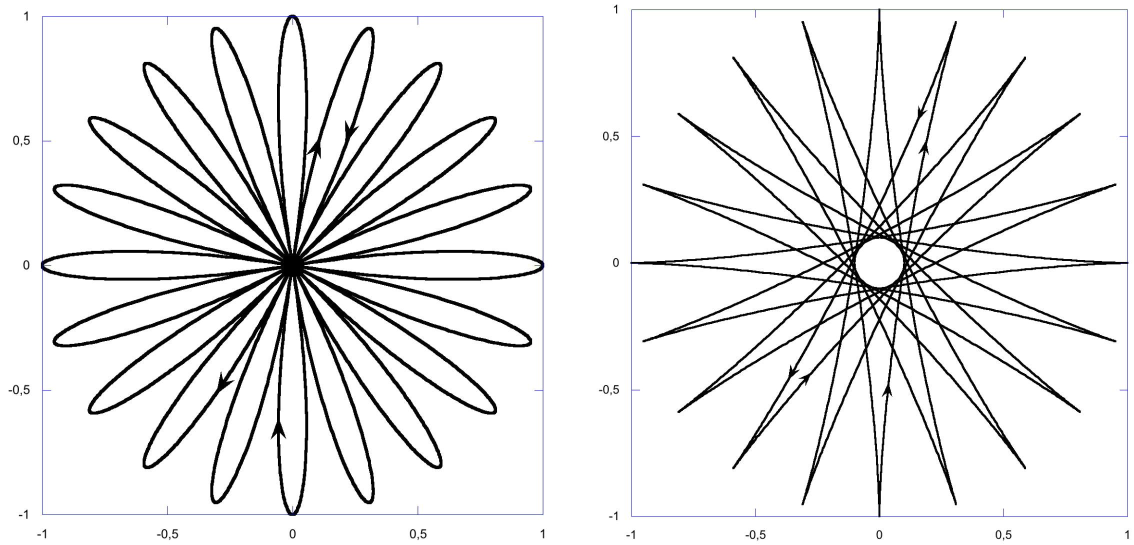
$$X_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \Omega t = u \qquad u \in [0, 2\pi], \qquad \text{d'où :}$$

$$\begin{cases} x = \cos u . \cos ku + \frac{1}{k} \sin u . \sin ku \\ y = -\sin u . \cos ku + \frac{1}{k} \cos u . \sin ku \end{cases} \tag{1.13}$$

On injecte ces coordonnées paramétriques dans n'importe quel logiciel graphique, avec u décrivant l'intervalle $[0, 2\pi]$ et on obtient, par exemple pour $k = 10$, la jolie hypocycloïde [7] de la figure 1.3*b*. Noter le « trou » au centre, de rayon $1/k$.

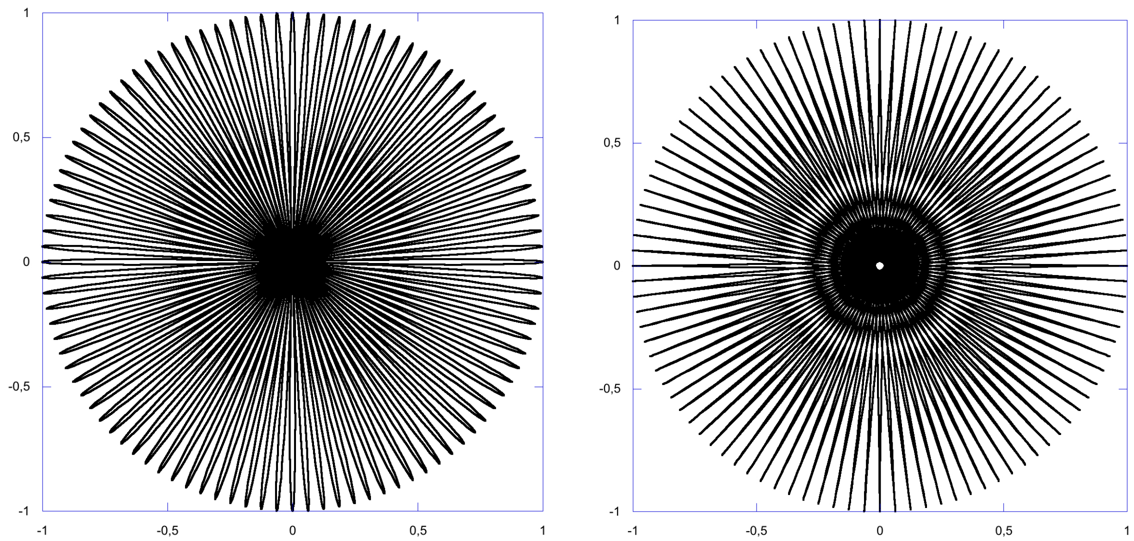
Pour des valeurs de k plus grandes, par exemple $k = 50$, on obtient la figure 1.4 : cela commence à ressembler au cas réel où les lobes sont tellement aplatis qu'on ne distingue plus leur forme. Dans le cas des C.I. de type « Terre », on notera qu'il reste un petit trou au centre (rayon 1/50 du rayon extérieur) confirmant que, strictement, le centre n'est jamais visité pour ce type de C.I. Voir détails pour k non entier en Annexe **A**.

7. On démontre en effet qu'il s'agit d'une hypocycloïde : courbe décrite par un point d'une roue de diamètre $(1 - \frac{1}{k})$ roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon 1.



a) *b)*

FIGURE 1.3 – Trajectoires de la boule dans le référentiel terrestre pour $k = 10$ (soit 10 oscillations du pendule par tour de Terre). *a)* C.I. de type 1 « Copernic » ; *b)* C.I. de type 2 « Terre ».



a) *b)*

FIGURE 1.4 – Trajectoires de la boule dans le référentiel terrestre pour $k = 50$ (soit 50 oscillations du pendule par tour de Terre). *a)* C.I. de type 1 « Copernic » ; *b)* C.I. de type 2 « Terre ».

1.2.3 Conditions initiales quelconques

Les deux solutions 1.7 et 1.11 de l'équation du mouvement que nous avons trouvées sont linéairement indépendantes (non identiquement proportionnelles l'une à l'autre) ;

elles constituent donc une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation du mouvement dans le référentiel terrestre. Toute autre solution, pour des C.I. quelconques, sera donc une combinaison linéaire des deux solutions déjà obtenues.

1.2.4 Équation du mouvement et bilan des forces dans le référentiel terrestre :

Nous avons déterminé les trajectoires de la boule dans le référentiel terrestre par un simple changement de référentiel sans écrire l'équation du mouvement (i.e. l'équation différentielle) dans le référentiel terrestre. Or, il est très instructif de le faire ; c'est en effet à partir de là que seront mises en évidence les diverses forces (de gravité et d'inertie) agissant dans ce référentiel, aboutissant ainsi à une compréhension plus physique du phénomène. Considérons l'équation du mouvement (1.1) dans le référentiel de Copernic. Pour passer au référentiel terrestre, il suffit d'exprimer Z en fonction de z, soit :

$$Z(t) = z(t)\, e^{i\Omega t} \tag{1.14}$$

On reporte cette expression dans (1.1), on dérive deux fois par rapport au temps l'expression ci-dessus (faites-le) et on obtient l'équation suivante :

$$\ddot{z} \quad + \quad 2i\,\Omega\,\dot{z} \quad + \quad (\omega^2 - \Omega^2)\,z = 0 \tag{1.15}$$

C'est l'équation du mouvement dans le référentiel terrestre. Ré-écrivons-la sous la forme :

$$\ddot{z} \;=\; -\,\omega^2 z \quad - \quad 2i\,\Omega\,\dot{z} \quad + \quad \Omega^2 z \tag{1.16}$$

Remarque : nous pourrions intégrer directement cette équation. Sa solution générale est évidemment la solution générale (1.2) dans le référentiel de Copernic *multipliée par* $e^{-i\Omega t}$, soit :

$$z(t) = Ae^{-i\Omega t}\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{ou} \qquad z(t) = e^{-i\Omega t}[\,B\,e^{i\omega t} + C\,e^{-i\omega t}\,] \tag{1.17}$$

Le lecteur pourra constater en dérivant deux fois, ou en résolvant à l'aide de l'équation caractéristique, que cette solution générale vérifie bien (1.15). En introduisant les conditions initiales « Copernic » ou « Terre », on retrouverait les équations paramétriques (1.8) et (1.12) des deux types de trajectoires, ce qui serait juste une façon de se vérifier.

Examinons maintenant les différents termes de l'équation (1.16). Au premier membre, $\ddot{z}$ est l'accélération dans le référentiel terrestre. Au second membre, nous avons trois termes :

— le premier n'est autre, selon (1.1), que l'accélération $\ddot{Z}$ dans le référentiel de Copernic ;

— le second terme mérite toute notre attention : rappelant que $\dot{z}$ désigne la dérivée du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps dans le référentiel terrestre, $\dot{z}$ représente donc la vitesse relative dans ce référentiel, notée usuellement $\overrightarrow{v_r}$; le produit par $-i$ représente l'opérateur rotation de $-\pi/2$ (donc sens horaire) appliqué au vecteur

$\overrightarrow{\dot{OM}}$ représenté par $\dot{z}$; enfin, Ω est la norme du vecteur axial $\overrightarrow{\Omega}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{v_r}$. On reconnaît donc là l'opposé du produit vectoriel $2\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_r}$, (voir note [8]) soit l'opposé de l'accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_{\text{Coriolis}} = 2\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_r} \tag{1.18}$$

— le troisième terme représente l'opposé de l'accélération d'entraînement (dite centripète) $\vec{a}_e = -\Omega^2\,\overrightarrow{OM}$: c'est l'accélération dite centrifuge $\Omega^2\,\overrightarrow{OM}$.

Nous pouvons donc ré-écrire tout cela sous la forme :

$$\ddot{z} \quad = \quad \ddot{Z} \quad - \quad a_{\text{Coriolis}} \quad - \quad a_e \tag{1.19}$$

Nous passons aux forces agissant dans le référentiel terrestre en introduisant la masse m de la boule :

$$m\ddot{z} \quad = \underbrace{-m\,\omega^2 z}_{\text{rappel}} \; \underbrace{-\; 2i\,m\,\Omega\,\dot{z}}_{\text{Coriolis}} \; + \underbrace{m\Omega^2 z}_{\text{centrifuge}} \tag{1.20}$$

Au premier membre, $m\ddot{z}$ est la force totale s'exerçant sur la boule dans le référentiel terrestre.
Au second membre :

— le premier terme représente la *force de rappel* due à la gravité (la même que dans le référentiel de Copernic) ;

— le second terme la *force d'inertie de Coriolis* (de sens opposé à l'accélération de Coriolis) ;

— le troisième terme la *force d'inertie centrifuge*, radiale, dirigée vers l'extérieur (de sens opposé à l'accélération centripète ou d'entraînement).

On peut ré-écrire cela sous forme vectorielle :

$$m\,\overrightarrow{\ddot{OM}}_{\text{Terre}} = -m\,\omega^2\overrightarrow{OM} - 2m\,\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_r} + m\,\Omega^2\,\overrightarrow{OM} \tag{1.21}$$

où l'indice $()_{\text{Terre}}$ rappelle qu'il s'agit de l'accélération du point M dans le référentiel terrestre. De même, $\overrightarrow{v_r}$ s'écrit : $\overrightarrow{\dot{OM}}_{\text{Terre}}$.

Nous avons donc identifié toutes les forces agissant sur la boule dans le référentiel terrestre. La force de rappel et la force centrifuge, dirigées suivant $\overrightarrow{OM}$, n'ont aucun effet pour dévier la trajectoire de la direction OM. En conséquence :

La force de Coriolis est seule responsable de la déviation de la trajectoire.

Soulignons encore que cette force, qui fait donc dévier vers la droite de la vitesse relative pour une rotation dans le sens antihoraire (hémisphère nord), est proportionnelle à la vitesse relative : si cette dernière est nulle, la force de Coriolis s'annulle.

8. Nous utilisons ici pour le produit vectoriel le symbole international $\times$, utilisé partout dans le monde sauf en France et on se demande pourquoi ; le symbole international $\wedge$ désigne le produit extérieur et cette confusion entre produit extérieur et produit vectoriel (qui n'ont les mêmes composantes strictes qu'en base orthonormée) est la source de nombreuses difficultés et incompréhensions en France.

Remarque : en supposant connues *a priori* les règles du changement de référentiel (équations 1.19 et1.21), nous aurions pu partir de la relation (1.21) pour retrouver les équations horaires (1.9 et 1.13) des trajectoires dans le référentiel terrestre. Cependant, la méthode d'exposition utilisée ici ne suppose aucune connaissance *a priori* sur les changements de référentiel et fait apparaître la force de Coriolis de manière naturelle [9].

Retour sur les trajectoires dans le référentiel terrestre – Ayant fait le bilan des forces intervenant, nous pouvons maintenant donner une compréhension plus physique des trajectoires. Pour cela, revenons à la figure 1.3.

a) C.I. de type « Copernic » (figure 1.3 *a*) : la boule est lâchée du point $(0, -1)$ sans vitesse initiale par rapport aux étoiles. Elle a donc, par rapport à la Terre, une vitesse initiale dirigée vers l'ouest (i.e. vers la gauche de la figure). La force de Coriolis est donc *non nulle à l'instant initial* : dès le départ, la trajectoire est déviée vers la droite du mouvement. Ensuite, la force de Coriolis continue d'agir, toujours courbant la trajectoire vers la droite (la vitesse vers l'ouest diminuant et la vitesse vers le centre augmentant lorsque la boule se rapproche de l'origine). L'origine est atteinte, puisqu'elle l'est dans le référentiel de Copernic (cf. figure 1.2 *a*) et que ce point est invariant dans le changement de référentiel. Ensuite le mouvement se poursuit selon les flèches, décrivant un double lobe de marguerite au cours d'une oscillation complète.

b) C.I. de type « Terre » (figure 1.3 *b*) : la boule est lâchée du point $(0, -1)$ sans vitesse initiale par rapport à la Terre. La boule est donc immobile dans le référentiel terrestre à l'instant initial et la force de Coriolis est alors nulle : sous l'action des deux autres forces, la boule part en direction de l'origine [10]. Mais dès qu'elle acquiert une vitesse, la force de Coriolis dévie la trajectoire vers la droite comme indiqué sur la figure, celle-ci ne passe donc plus par l'origine ; la courbure augmente avec la vitesse jusqu'à 1/4 de période, puis diminue en même temps que la vitesse pour s'annuler au bout d'une demi-période (car alors, vitesse nulle donc Coriolis nulle). La boule arrive donc radialement pour s'arrêter au bout de sa demi-oscillation, il n'y a pas de composante tangentielle de vitesse en ce point [11]. Elle repart alors en sens inverse, d'abord en direction de l'origine, dans les mêmes conditions qu'au départ, la trajectoire se courbe vers la droite comme indiqué par les flèches, pour décrire au total une portion d'hypocycloïde. Ceci montre que le point atteint à la demi-période est un point de rebroussement (ainsi que tous les points équivalents, correspondant à un nombre entier de demi-périodes), comme cela peut se vérifier sur les équations de la trajectoire.

9. Il y a de plus une raison très profonde : l'identification des vecteurs du plan au corps des complexes permet de traiter les vecteurs comme des nombres (les éléments d'un corps ayant les propriétés usuelles des nombres) ; inversement, les nombres complexes opèrent sur les vecteurs, le nombre devient *action*, ce qui va très au-delà de sa fonction d'énumération : algébrisation de la géométrie, et géométrisation du nombre. À ce niveau modeste, c'est un point de vue très moderne.

10. la force de gravité étant évidemment considérablement supérieure à la force centrifuge qui, sur le plan pratique, a une intensité négligeable.

11. Cela sera essentiel pour comprendre le fonctionnement de l'anneau de Charron (cf. chap. 4).

On remarquera que, pour une équation du mouvement identique, des conditions initiales différentes conduisent à des formes de trajectoire très différentes. Néanmoins, les propriétés de symétrie sont conservées. On trouvera dans l'annexe **A** un examen détaillé du cas où le paramètre k est non entier.

Ordre de grandeur de la force de Coriolis – La force de Coriolis est responsable de la déviation du pendule : d'où l'importance d'évaluer son ordre de grandeur. À cet effet, nous nous placerons dans le cas le plus simple, à savoir les C.I. de type « Copernic » pour lesquelles la boule passe par l'origine à chaque demi-oscillation. Nous comparerons la force de Coriolis maximale (c'est à dire lors du passage par la verticale) subie par la boule au poids de ladite boule ; ce qui revient à comparer l'accélération de Coriolis maximale à l'accélération de la pesanteur g. Pour ces conditions initiales, en vertu du théorème de l'énergie cinétique, la vitesse au passage inférieur de la boule est la même dans le référentiel de Copernic et dans le référentiel terrestre (en effet, le point origine « ne tourne pas »). On peut donc la calculer à partir de l'équation (1.3), soit :

$$\dot{Z}(t) = -X_0\,\omega \sin \omega t$$

d'où :

$$v_{\max} = X_0\,\omega = X_0\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{1.22}$$

Bien entendu, le même résultat serait obtenu en calculant $|\dot{z}(t)|$ pour $\omega t = \pi/2$ à partir de l'équation (1.7), en posant $\omega = k\Omega$. Pour des conditions initiales de type « Terre », on obtient tous calculs faits (à partir de 1.11) : $v_{\max} = X_0\,\omega(1 - 1/k^2)$, ce qui ne change pratiquement rien, k étant très grand en toute situation réelle.

L'accélération de Coriolis maximale vaut alors, d'après (1.18) : $a_{\text{Coriolis,max}} = 2\,\Omega\,v_{\max}$. D'où le rapport cherché :

$$\frac{a_{\text{Coriolis,max}}}{g} = \frac{2\,\Omega\,X_0}{\sqrt{gl}} \tag{1.23}$$

Nous examinerons deux cas réels : le pendule de la faculté d'Orsay, de petite taille (1,2 m) et celui du Panthéon (67 m). Dans les deux cas, $\Omega = 2\pi/86160\,\mathrm{s}^{-1}$, $\quad g = 9,81\,\mathrm{ms}^{-2}$, soit :

— pour le *pendule d'Orsay* : $l = 1,2$ m et X_0 vaut au plus 7,5 cm (correspondant à une amplitude angulaire de 1/16 rad ou 3,6°). D'où :

$$a_{\text{Coriolis,max}}/g = 3,19.10^{-6}$$

Ainsi, la force de Coriolis à son maximum est de l'ordre de seulement *trois millionièmes* du poids de la boule. La masse de la boule étant de 250 g, la force de Coriolis maximale est de l'ordre du poids d'une masse de $3,19.10^{-6} \times 250 = 797.10^{-6}$ g, soit un peu moins d'un milligrame. Mettre en évidence le mouvement de la Terre, c'est rendre visible un effet aussi petit. On comprend alors pourquoi un pendule de petite taille est si sensible aux perturbations diverses, qui peuvent largement atteindre cette valeur.

— pour le *pendule du Panthéon* : $l = 67$ m et $X_0 = 4,85$ m au plus (correspondant à une amplitude angulaire de $1/14$ rad ou 4,14° et une période de 16,4 s). D'où :

$$a_{\text{Coriolis,max}}/g = 27,6.10^{-6}$$

Ainsi, la force de Coriolis à son maximum est de près de *trente millionièmes* seulement du poids de la boule. C'est d'un ordre de grandeur au-dessus du petit pendule, mais s'appliquant à une boule de 28 kg au bout d'un fil de 67 m soumis à tous les courants d'air du Panthéon, c'est encore une très petite force : elle est de l'ordre du poids d'une masse de $27,6.10^{-6} \times 28.10^3 = 0,77$ g, soit de l'ordre du gramme équivalent-poids. Et cela suffit à « faire tourner la Terre » !

Les ordres de grandeur ci-dessus ont été calculés en supposant nos pendules placés au pôle. Nous verrons, dans le chapitre « Le pendule de Foucault hors du pôle », que, hors du pôle, la composante active de la force de Coriolis est réduite d'un facteur égal au sinus de la latitude, soit environ 0,75 pour Paris et ses environs (latitude 49° nord) ; les rapports ci-dessus sont donc ramenés localement à environ 2,4 millionièmes et 21 millionièmes pour le petit et le grand pendule respectivement, et les forces de Coriolis maximales à 0,60 mg et 0,58 g équivalent-poids respectivement.

La conclusion de cette – indispensable – estimation d'ordre de grandeur est donc que la réalisation d'un pendule de Foucault qui fonctionne réellement requiert d'importantes précautions et du savoir-faire.

1.2.5 Une constante du mouvement : le moment angulaire

Montrons que le moment angulaire est une constante du mouvement [12].

Plaçons-nous dans le *référentiel de Copernic*. Soit Oz l'axe vertical passant par O (cf. fig. 1.1). Le mouvement ayant lieu dans le plan horizontal, le vecteur moment angulaire $\vec{L}$, pris relativement à l'axe Oz est vertical. La seule force extérieure agissant sur la boule est la force de rappel due à la gravité ; cette force est dirigée vers l'axe, donc son moment par rapport à cet axe est nul. En vertu du théorème du moment angulaire, on a donc :

$$\boxed{\dot{\vec{L}} = 0 \quad \text{donc} \quad \vec{L} \text{ est une constante du mouvement.}}$$

Soit $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$ le repère local usuel. Posons :

$$(OX, \overrightarrow{OM}) = \Theta \quad \text{et} \quad (Ox, \overrightarrow{OM}) = \theta \quad \text{soit} \quad \Theta = \theta + \Omega t$$

d'où :

12. Le vecteur axial « Moment angulaire », est ce qui est le plus souvent désigné en France sous l'appellation « Moment cinétique », c'est à dire le moment du vecteur impulsion. Malheureusement, dans une large communauté de physiciens français travaillant dans le domaine de la diffraction (de la lumière aux neutrons en passant par les électrons et autres particules), le terme anglais *momentum* (soit le vecteur $\hbar\vec{k}$ en Mécanique quantique) qui se rapporte à *l'impulsion* est traduit par *moment cinétique*. Pour éviter toute confusion, nous employons de préférence le terme « Moment angulaire ».

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \rho\,\overrightarrow{u_\rho} \\
\dot{\overrightarrow{OM}}_{Copernic} &= \dot\rho\,\overrightarrow{u_\rho} + \rho\,\dot\Theta\,\overrightarrow{u_\theta} \\
\overrightarrow{L}_{Copernic} = \overrightarrow{OM} \times m\,\dot{\overrightarrow{OM}}_{Copernic} &= m\,\rho^2\,\dot\Theta\,\overrightarrow{u_z}
\end{aligned}$$

$\rho^2\,\dot\Theta$ est donc une constante du mouvement. Nous venons simplement de redémontrer le résultat bien connu que, sous l'action d'une force centrale, cette expression se conserve au cours du mouvement. Si la Terre ne tourne pas, $\Theta = \theta$; si elle tourne à vitesse angulaire Ω par rapport au référentiel de Copernic, $\Theta = \theta + \Omega t$. D'où le résultat :

$$\boxed{\text{L'expression } \rho^2\,(\dot\theta + \Omega) \text{ est une constante du mouvement, soit : } \rho^2\,(\dot\theta + \Omega) = C}$$

Ce résultat est général et ne préjuge pas de la forme particulière de la force agissante pourvu qu'elle soit centrale. Voyons ce que l'on peut en déduire pour notre pendule pour chacun des types de conditions initiales précédemment envisagés :

— **C.I. de type 1 ou « Copernic »** (fig. 1.2 *a*, 1.3 *a*, 1.4 *a*).
À l'instant initial le point M est immobile dans Copernic, donc $\dot\Theta(0) = 0$, soit :

$$\rho(0) = X_0 \quad \text{et} \quad \dot\theta(0) = -\Omega \quad \Longrightarrow C = 0, \quad \textit{donc} :$$

$$\dot\theta = -\,\Omega \tag{1.24}$$

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tourne donc, relativement au référentiel terrestre, à la vitesse angulaire constante $-\,\Omega$, opposée à celle de la Terre [13] : tous les points de la trajectoire ont la même vitesse angulaire, et *c'est le seul cas où il en est ainsi.* C'était aussi évident à partir de l'équation (1.7) où $arg\,(z) = -\,\Omega t$. Pour tout point M de la trajectoire, *la direction OM peut donc être vue comme la trace d'un plan vertical tournant continûment à la vitesse angulaire constante* $-\Omega$.

— **C.I. de type 2 ou « Terre »** (fig. 1.2 *b*, 1.3 *b*, 1.4 *b*). À l'instant initial :

$$\rho(0) = X_0 \quad \text{et} \quad \dot\theta(0) = 0 \quad \text{et donc :} \quad X_0^2\,\Omega = C \quad \text{soit :}$$

$$\rho^2\,(\dot\theta + \Omega) = X_0^2\,\Omega \quad \text{ou :} \quad \dot\theta = \Omega\,(\frac{X_0^2}{\rho^2} - 1) \tag{1.25}$$

$\dot\theta$ devant rester borné (conservation de l'énergie), ρ *ne peut s'annuler* ; conformément à l'analyse illustrée par la figure 1.3 *b* : $\rho_{min} = X_0/k$; $\dot\theta$ varie de 0 (pour $\rho = X_0$) à $\dot\theta_{max} = (k^2 - 1)\Omega \sim k\omega$, correspondant au minimum de ρ.
Contrairement au cas précédent, $\dot\theta$ dépend (très fortement) de ρ : les différents vecteurs $\overrightarrow{OM}$ n'ont donc plus du tout la même vitesse angulaire [14]. Si l'aplatissement des lobes – dû aux valeurs très élevées du rapport $k = \omega/\Omega$ dans tous les cas pratiques – peut donner l'impression d'un plan tournant à la vitesse angulaire $-\Omega$, ce n'est maintenant vrai qu'en moyenne.

13. nous savions déjà que la trajectoire passe par l'origine, donc nécessairement $C = 0$, on le retrouve.
14. $\dot\theta$ *est* ≥ 0 : $\overrightarrow{OM}$ tourne même dans le sens antihoraire ! mais d'un peu moins d'un tour par période du pendule (cf. fig.1.3 *b*). D'où le décalage *en sens horaire* des points de rebroussement.

Ceci reste vrai néanmoins : au bout de chaque période successive T du pendule, soit $T = 2\pi/\omega$, $\arg z$ augmente exactement de $-\Omega T$ ou $-2\pi\Omega/\omega = -2\pi/k$ comme on peut le voir sur l'équation (1.11).
Si $M_0,\ M_1, \dots M_i \dots$, sont par exemple les extrema pairs successifs de la trajectoire – soit les points de rebroussement pairs ($\omega t = 0$, modulo 2π) –, chaque direction OM_i tourne donc *par sauts* de $2\pi/k$ (comme la trotteuse de votre montre) à la vitesse angulaire moyenne $-\Omega$. Cela peut être vu comme la trace d'un plan vertical affecté de ce même mouvement. Il en serait de même en remplaçant M_0 par tout point *donné* de la trajectoire, de phase ωt_0 *fixée*.
Pour ces conditions initiales, qui sont celles le plus fréquemment utilisées pour lancer le pendule, on a donc l'image générale d'un *plan tournant par sauts de $2\pi/k$ à la vitesse angulaire moyenne $-\Omega$.*

1.2.6 Remarques diverses

Remarque 1 : nous verrons (chap. 3) que, hors du pôle, il suffit de remplacer partout, et notamment dans les expressions ci-dessus, Ω par $\Omega.\sin\lambda$ où λ est la latitude du lieu.

Remarque 2 : Les résultats ci-dessus ont été obtenus, sans autre hypothèse que l'approximation harmonique [15]. Ils sont donc valables *même pour une Terre tournant vite*. Or, beaucoup d'exposés sur le pendule de Foucault croient devoir faire l'approximation consistant à négliger le terme centrifuge dans l'équation du mouvement (par exemple dans eq. 1.15), sous prétexte qu'étant en Ω^2, il est négligeable devant Ω dans le cas de la Terre réelle. Or, au lieu de simplifier, cette approximation supplémentaire complique les choses : l'examen de l'équation caractéristique de l'équation (1.15) sans le terme centrifuge montre que la pulsation du pendule serait alors $\omega' = \sqrt{\omega^2 + \Omega^2}$, expression dans laquelle il faut à nouveau négliger Ω^2 pour retomber sur la vraie pulsation ω qui, ô miracle, est en réalité exacte sans approximation [16]. En fait, le terme du premier ordre ($2i\Omega\,\dot{z}$) introduit le couplage nécessaire entre z et $\ddot{z}$ pour retomber sur la vraie pulsation (eq. 1.17), et le terme centrifuge est indispensable pour cela. Le rôle de la force d'inertie centrifuge hors du pôle sera examiné plus en détail dans l'annexe B.

Remarque 3 : et si l'on tenait compte de l'anharmonicité du pendule, les résultats précédents en seraient-ils modifiés ? En ce qui concerne la rotation d'ensemble de la trajectoire dans le référentiel terrestre, la réponse est non, au moins pour des C.I. de type « Copernic ». En effet, le mouvement du pendule demeure alors rectiligne et périodique dans le référentiel de Copernic, donc développable en série de Fourier. Ce qui est vrai pour la pulsation ω l'est pour chacun des harmoniques séparément, en particulier la rotation s'effectue à la *même* vitesse angulaire $-\Omega$ pour chacun d'eux ; la forme des trajectoires (figure 1.3 a et b) est plus ou moins modifiée, mais la rotation d'ensemble à vitesse Ω (ou $\Omega\sin\lambda$ hors du pôle) est inchangée. Un bémol doit cependant être mis à cette affirmation

15. Pour cela, soit on se limite aux oscillations de faible amplitude ; soit on rend le mouvement harmonique par un artifice électromagnétique modifiant légèrement la force de rappel.

16. Il n'est pas besoin de fouiller longtemps sur internet pour trouver que la pulsation du pendule dans le référentiel terrestre serait, faussement : $\omega' = \sqrt{\omega^2 + \Omega^2}$. Résultat d'une application formelle et irréfléchie d'une approximation inutile.

dans le cas des des C.I. de type « Terre » : nous verrons en effet (chap. 4), que si cette trajectoire est plus ou moins « ovalisée » – et elle l'est dans ce cas – les fréquences longitudinale et transversale sont légèrement différentes ce qui entraîne une rotation parasite dite « apsidale ». L'amplitude ne doit donc pas être « trop grande ».

1.2.7 L'expérience de la tige vibrante

Il vous faut un tour de mécanicien. Une simple chignole bloquée dans un étau ou un établi peut convenir pour une expérience « à la maison ».

Le tour étant à l'arrêt : prenez une tige métallique, par exemple en laiton, et bloquez l'une des extrémités dans le mandrin du tour. Donnez un coup sec, par exemple vers le bas, sur l'autre extrémité : la tige se met à vibrer. Vous aurez choisi le diamètre et la longueur de la tige de manière à obtenir facilement une vibration conséquente (pour du laiton, 1 cm et 60 à 100 cm respectivement conviennent).

Si vous avez de la chance, la vibration de la tige sera rectiligne. Sinon, vous observerez une légère ovalisation du mouvement de l'extrémité et une lente précession de cette « ellipse » autour de l'axe de la tige : c'est un effet de l'anharmonicité des vibrations et des légères anisotropies internes de la tige, analogue de la « rotation apsidale » qui sera décrite au chapitre 4. Cependant, il existe alors deux directions de vibration mutuellement perpendiculaires dites « directions principales » pour lesquelles la vibration est rectiligne et ne pivote pas (voir [3]). Vous les cherchez par tâtonnements, et vous donnez votre coup de marteau selon l'une d'elles : vous aurez alors une belle vibration rectiligne, le tour étant à l'arrêt.

Faites tourner le mandrin : ô surprise ! le plan d'oscillation de la tige ne tourne pas, il demeure fixe par rapport aux murs de la salle qui constituent, à l'échelle de temps de cette expérience, un suffisamment bon référentiel galiléen. Cette expérience étonne toujours, y compris le public informé !

Foucault lui-même raconte que c'est l'observation de ce phénomène qui l'a mis sur la voie de l'expérience du pendule [3]. L'expérience du Musée des arts et métiers qui sera relatée au chap.3, dans laquelle la tige est remplacée par une corde à piano lestée, est exactement du même type.

1.2.8 Simulation d'un pendule au pôle sur un plateau tournant

Un pendule de Foucault élémentaire a été simulé en situation d'enseignement et avec les moyens du bord, avec un plateau tournant simple taillé dans une planche d'aggloméré et un pendule constitué d'un écrou muni d'une aiguille, suspendu à une potence au-dessus du centre du plateau. Le plateau est mis en rotation à une vitesse d'un tour en quelques secondes, par un petit moteur prélevé sur un autre montage. Les traces des trajectoires sont visualisées dans la semoule placée sur une assiette [17] (voir fig. 1.5). Dans ces conditions, l'axe de rotation du plateau simule l'axe de la Terre, et, relativement à la vitesse de rotation du plateau, les murs de la salle peuvent être considérés comme

17. Merci à notre collègue Fewzi Benhabib pour cette authentique semoule algérienne !

un référentiel galiléen tenant lieu du référentiel de Copernic, la Terre tournant très peu pendant un tour de plateau.

Les formes des trajectoires sont visibles sur la figure 1.5.

FIGURE 1.5 – Pendule de Foucault élémentaire monté sur un plateau tournant. Traces des trajectoires dans la semoule. *À gauche* : C.I. type « Copernic » ; *à droite* : C.I. type « Terre ». Les irrégularités sont dues aux à-coups du système d'entraînement bricolé sur place.

Les irrégularités (notamment décalages aux extrema d'oscillations) sont dues aux soubresauts du système, le plateau étant trop lourd pour le petit moteur qui peinait à l'entraîner. N'oublions pas qu'il s'agit d'un bricolage improvisé ! Néanmoins, par comparaison avec la figure 1.3, on reconnaît :

— *à gauche* : les lobes « en marguerite » des C.I. de type « Copernic », notamment toutes les trajectoires passent par le centre ;

— *à droite* : les trajectoires « hypocycloïdes » des C.I. de type « Terre », notamment aucune trajectoire ne passe par le centre.

Les formes des trajectoires s'éloignent plus ou moins des formes idéales de la figure 1.3, notamment à cause de l'anharmonicité résultant des fortes amplitudes que nous utilisons ici (cf. remarque ci-dessus) et aussi du frottement de la pointe dans la semoule.

Remarque : pour réaliser les conditions de lancement de type « Terre », (lancement sans vitesse initiale par rapport au plateau) il faut accompagner le mouvement du plateau tout en maintenant l'écrou écarté de sa position d'équilibre, ce qui n'est guère facile ; un peu d'entraînement est nécessaire pour y parvenir.

Chapitre 2

Le pendule de Foucault à l'équateur

2.1 L'essentiel à l'équateur

À l'équateur, le vecteur axial $\overrightarrow{\Omega}$ « rotation de la Terre » est maintenant horizontal, tangent au méridien local, orienté du sud vers le nord (cf. figure 3.1). La vitesse relative de la boule dans le référentiel terrestre est horizontale, donc la force de Coriolis $-2m\,\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_r}$ est verticale (ou nulle lorsque $\overrightarrow{v_r}$ est tangente au méridien). Les autres forces : force de rappel (toujours dirigée vers le centre d'oscillation, pied de la verticale du point de suspension), et centrifuge (verticale à l'équateur) ne contribuent pas non plus à la déviation de la direction d'oscillation. Ainsi, *la composante horizontale de la force de Coriolis est toujours nulle*, et, en vertu de la relation générale :

$$\ddot{\overrightarrow{OM}}_{\text{Terre}} = \ddot{\overrightarrow{OM}}_{\text{Copernic}} - \vec{a}_{\text{Coriolis}} - \vec{a}_{\text{entraînement}} \tag{2.1}$$

aucune autre force n'est présente pour dévier la boule de sa direction initiale d'oscillation[1]. Ainsi,

$$\boxed{\text{À l'équateur, le pendule de Foucault ne pivote plus dans le référentiel terrestre !}}$$

Essayons de mieux visualiser les choses :

— supposons le pendule oscillant à un certain instant dans la direction *tangente au méridien* (i.e. nord-sud) dans le référentiel de Copernic ; contrairement au cas du pôle, cette direction n'est pas affectée par le mouvement de la Terre : elle reste fixe à la fois par rapport aux étoiles et par rapport au référentiel terrestre au cours du temps. Le pendule continuera donc d'osciller vers le nord, sans pivotement. On peut dire aussi que, au cours du mouvement diurne de la Terre, seule est modifiée la direction de la pesanteur dans le référentiel de Copernic (le vecteur $\vec{g}$ fait un tour en un jour sidéral), mais la trace du mouvement sur le sol ne varie pas.

— supposons maintenant le pendule oscillant à un certain instant dans la direction *tangente à l'équateur* (i.e. est-ouest) dans le référentiel de Copernic ; le mouvement

1. Rappelons que : $-\vec{a}_{\text{entraînement}} = \vec{a}_{\text{centrifuge}}$.

a lieu dans le plan de l'équateur qui contient aussi le point de suspension ; la rotation de la Terre entraîne une rotation du vecteur $\vec{g}$ dans ce plan, sans jamais en sortir ; la direction d'oscillation ne quittera donc pas ce plan, et restera donc fixe (est-ouest) dans le référentiel terrestre.
— pour une oscillation dans une direction quelconque : chaque composante du mouvement, nord-sud et est-ouest respectivement, restant fixe dans le référentiel terrestre, la direction d'oscillation ne varie pas.

Comparaison Pôle/Équateur : Au pôle, le plan horizontal est fixe par rapport aux étoiles, et le mouvement de la Terre induit une rotation des axes de coordonnées, i.e du référentiel terrestre, dans ce plan. À l'équateur, le plan horizontal « bascule » autour de la direction nord-sud, laquelle reste fixe par rapport aux étoiles.

Au pôle, la direction d'oscillation comme le plan d'oscillation du pendule sont fixes par rapport aux étoiles. À l'équateur :

— supposons d'abord un lancement dans la direction nord-sud : par rapport aux étoiles, la direction d'oscillation reste fixe (et aussi par rapport à la Terre), tandis que le plan d'oscillation pivote autour de l'axe nord-sud en un jour sidéral ;
— supposons maintenant un lancement dans la direction est-ouest, donc dans le plan équatorial : par rapport aux étoiles, la direction d'oscillation (fixe par rapport à la Terre) pivote autour de l'axe nord-sud en un jour sidéral, tandis que le plan d'oscillation (le plan équatorial) reste fixe ;
— pour les directions d'oscillation intermédiaires, la normale au plan d'oscillation décrit en un jour sidéral un cône d'axe nord-sud dont l'angle au sommet se réduit à zéro lorsque le lancement a lieu est-ouest.

2.2 À l'équateur : remarque savante et d'extrême détail *(pour les puristes)* :

Au pôle, nous avons tenu compte, dans l'équation du mouvement, du terme centrifuge $+m\,\Omega^2\,\overrightarrow{OM}$; c'est même lui qui nous a permis d'obtenir très simplement la solution rigoureuse au pôle – valable pour toute vitesse de rotation – bien que ce terme soit archi-négligeable dans le cas de la Terre réelle. C'est un effet différentiel qui apparaît sous forme de force d'anti-rappel (dirigée vers l'extérieur) lorsque la boule s'écarte du point d'équilibre. À l'équateur, aurions-nous donc oublié quelque chose ? La réponse, en toute rigueur, est oui.

Supposons une oscillation, à l'équateur, dans la direction nord-sud. La boule oscille d'un hémisphère à l'autre ! Lorsqu'elle est au nord, la force centrifuge n'est plus tout à fait verticale ; nous verrons, dans l'annexe B, qu'elle possède alors une petite composante horizontale dirigée vers le sud qui vaut $-\,m\,\Omega^2\,\overrightarrow{OM}$; lorsque la boule passe dans l'hémisphère sud, c'est l'inverse qui se produit. Ainsi, la composante horizontale de la force centrifuge est ici une force de rappel proportionnelle à l'élongation (au lieu de force d'anti-rappel au pôle) [2]. Cela ne modifie en rien la direction d'oscillation, mais ajoute une contribution à la pulsation du pendule qui devient $\omega' = \sqrt{\omega^2 + \Omega^2}$.

Supposons maintenant une oscillation dans la direction est-ouest. Cette fois, la composante horizontale de la force centrifuge est strictement nulle, il n'y a pas de contribution centrifuge à la force de rappel et la pulsation du pendule redevient égale à ω [3].

Ainsi, la pulsation dépend de l'orientation de l'oscillation ! Que se passe-t-il pour une orientation oblique quelconque ? Les composantes S-N et E-O n'ont pas exactement la même fréquence, il va donc y avoir une lente dérive à la fréquence angulaire $\omega' - \omega$. Simplement : boule vers le nord, elle subit un rappel vers l'équateur (vers l'équateur, pas vers le point d'équilibre, faites un petit dessin) ; boule au sud, symétriquement opposée par rapport au centre d'oscillation : idem, force de rappel aussi vers l'équateur. Donc la direction d'oscillation va pivoter lentement vers l'équateur jusqu'à ce que l'oscillation s'effectue dans la direction est-ouest où elle demeurera stable. Autrement dit : la direction d'oscillation nord-sud, en toute rigueur, est instable, elle va pivoter jusqu'à atteindre l'orientation stable est-ouest. Rassurez-vous : c'est extrêmement lent – de l'ordre de Ω/k comme il sera montré dans l'annexe –, il faudrait des milliers de jours pour le voir, c'est donc insensible dans le cas de la Terre réelle. Noter que le moment angulaire par rapport à l'axe d'oscillation sera alors finalement dirigé dans la direction nord-sud. Cela ressemble diablement à un compas gyroscopique, dont l'axe est contraint de demeurer dans le plan horizontal, mais libre dans ce plan, et qui subit de la part de la rotation de la Terre un couple jusqu'à ce qu'il ait atteint la direction stable nord-sud.

L'intérêt de cette discussion – qui n'aurait de sens pratique que pour une Terre en « rotation rapide » – est de comprendre ce qui se passe au niveau de l'équation du mouvement : à l'équateur, contrairement au pôle, il n'y a plus d'équation du mouvement unique pour toutes les directions. En tous cas, si vous avez envie d'emmener vos étudiants ou un groupe de touristes vérifier la loi du pendule de Foucault à l'équateur : si vous ne voulez pas avoir de souci – ne serait-ce que vis à vis des questions savantes que l'on pourrait vous poser – lancez le pendule dans la direction est-ouest et tenez-vous y. Après tout, c'est logique : si vous voulez tester le comportement du pendule à l'équateur, ne commencez pas par envoyer la boule hors du plan équatorial !

Un traitement plus détaillé de cet effet centrifuge *différentiel* est donné dans l'annexe B. Il ne doit pas être confondu avec avec l'effet centrifuge *statique* qui sera traité au chapitre 3, qui est nul au pôle et à l'équateur, et qui induit en tout autre lieu une légère déviation de la verticale locale.

2. Cette composante horizontale de la force centrifuge doit donc s'annuler quelque part entre le pôle et l'équateur. Ce que nous verrons dans l'annexe B.

3. L'intensité de la pesanteur est évidemment réduite à l'équateur à cause de la force centrifuge, mais cette contribution *statique* est déjà prise en compte dans la valeur de ω.

Chapitre 3

Le pendule de Foucault en un lieu de latitude quelconque

3.1 La loi du sinus de la latitude

Plaçons-nous maintenant en un lieu de latitude quelconque λ (différente de 0 et de $\pi/2$). Le vecteur rotation de la Terre n'est ni vertical comme au pôle, ni horizontal comme à l'équateur (cf. figure 3.1 a). Que se passe-t-il ? Eh bien : les choses se passent *partiellement comme au pôle* et *partiellement comme à l'équateur*. Expliquons-nous.

L'idée de décomposer le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ en ses composantes respectivement horizontale $\vec{\Omega}_h$ et verticale $\vec{\Omega}_v$ est due à Liouville (cf. figure 3.1 a) ; elle donne la clé de l'interprétation du pendule de Foucault en tout lieu. On a :

$$\Omega_h = \Omega\,\cos\lambda \qquad \Omega_v = \Omega\,\sin\lambda$$

Nous considérons séparément l'effet de chaque composante. On peut dire que, *à la fois, le plan horizontal local pivote autour de la verticale à vitesse* $\Omega \sin\lambda$ *et « bascule » autour de la tangente au méridien (horizontale nord-sud) à vitesse* $\Omega\cos\lambda$. Le caractère vectoriel de $\vec{\Omega}$ nous autorise à additionner ensuite les résultats [1].

— pour la composante horizontale $\vec{\Omega}_h$: tout se passe comme si nous étions sur l'équateur d'une Terre fictive qui tournerait à la vitesse angulaire $\Omega\cos\lambda$ autour de la direction $\vec{\Omega}_h$, tangente au méridien. Cet équateur, que nous appellerons dans la suite « équateur local » n'est autre que le grand cercle situé dans le plan diamétral de la Terre passant par le lieu du pendule et incliné de l'angle λ sur le plan équatorial de la Terre réelle (cf. fig. 3.1 a) ; il est tangent au parallèle du lieu. Cette

1. Un vecteur peut toujours être considéré comme la somme de ses composantes, effectuée dans un ordre quelconque. Cependant, deux rotations autour d'axes différents *ne commutent pas* en général : le résultat dépend de l'ordre dans lequel on les applique. Est-ce à dire que le décomposition de Liouville serait problématique ? Heureusement non. La direction d'oscillation de notre pendule n'est définie que dans le plan tangent à la sphère terrestre, c'est une propriété *locale*. Et, localement, nous savons aussi que des rotations *infinitésimales* autour d'axes différents commutent. Pendant un temps dt, les rotations $\vec{\Omega}_h dt$ et $\vec{\Omega}_v dt$ peuvent donc être opérées dans un ordre quelconque. Cela suffit à notre propos.

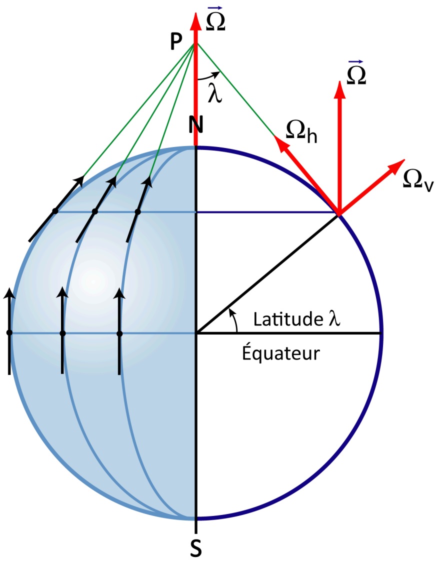


FIGURE 3.1 – *à droite* : décomposition du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ en ses composantes horizontale Ω_h et verticale Ω_v (coupe selon un demi-plan méridien) ; *à gauche* : vue perspective de la Terre ; en un lieu de latitude λ (différente de 0 ou $\pi/2$), les tangentes au méridien du lieu, avant et après rotation convergent en P sur l'axe SN, au-dessus du pôle. À l'équateur, ces tangentes sont parallèles à l'axe de la Terre ; au cours de la rotation de celle-ci, elles conservent alors une direction constante par rapport aux étoiles (merci à Pierre Causeret du CLEA pour la graphie de cette figure figurant dans notre article du n° 184 des *Cahiers Clairaut*).

composante donne lieu, comme nous l'avons vu, à des forces d'inertie verticales, qui ne modifient pas la direction du mouvement. *La composante $\vec{\Omega}_h$ n'intervient donc pas dans l'équation du mouvement de la boule*[2].

— pour la composante verticale $\vec{\Omega}_v$: tout se passe comme si nous étions au pôle d'une Terre fictive qui tournerait autour de la verticale à la vitesse angulaire $\Omega \sin \lambda$ (verticale inclinée de l'angle λ sur le plan équatorial de la Terre réelle). Cette composante est donc la seule à contribuer à la composante horizontale de la force d'inertie de Coriolis, dirigée vers la droite du mouvement, comme au pôle.

Il s'ensuit que tout se passe comme si la vitesse de rotation de la Terre était réduite par le facteur $\sin \lambda$ et donc :

L'analyse effectuée pour le pendule de Foucault au pôle est valable à la condition de remplacer Ω par $\Omega \sin \lambda$.

On ne peut faire plus simple !

2. L'analyse faite précédemment (§ 2.2) demeure valable pour cette composante : ce résultat contient en réalité une très petite approximation absolument négligeable sur la Terre réelle : il faudrait des milliers de jours d'observation continue pour la mettre en évidence, hypothèse totalement irréaliste au regard de la précision d'un pendule de Foucault réel (voir l'annexe B pour une étude plus détaillée).

Ordres de grandeur – La période de rotation du pendule à la latitude λ est donc :

$$T = \frac{T_0}{\sin\lambda}$$

où $T_0 = 86\,160\,\mathrm{s}$ est la durée du jour sidéral (soit $23\,\mathrm{h}\,56\,\mathrm{min}$).

À Paris (latitude 48°51′ N), $\sin\lambda = 0,753$ (soit environ 3/4), le plan d'oscillation « pivote », par rapport au référentiel terrestre, à raison d'un tour en un peu moins de 32 h ($31\,\mathrm{h}\,47\mathrm{min}$ exactement), soit $11,3°/h$; en un tour de Terre, il n'a pivoté que de 3/4 tour. À Rome il effectuerait un tour en 36 h, au Caire en 48 h, à Assouan en 60 h et à Abidjan en 258 h par exemple. Dans l'hémisphère sud, la rotation reprend, mais en sens inverse.

Transcription des équations du mouvement obtenues au pôle – Pour la pratique, ré-écrivons les résultats obtenus au pôle, en introduisant explicitement le facteur $\sin\lambda$:

— *l'équation du mouvement* dans le plan complexe horizontal s'écrit maintenant, similairement à (1.15) :

$$\ddot{z} \quad + \quad 2i\,(\Omega\sin\lambda)\,\dot{z} \quad + \quad (\omega^2 - \Omega^2\sin^2\lambda)\,z = 0 \tag{3.1}$$

dont la solution générale, similairement à (1.17), est :

$$z(t) = Ae^{-i(\Omega\sin\lambda)t}\cos(\omega t + \phi) \quad \text{ou} \quad z(t) = e^{-i(\Omega\sin\lambda)t}[\,B\,e^{i\omega t} + C\,e^{-i\omega t}\,] \tag{3.2}$$

— *la conservation du moment angulaire* (cf. § **2.2.4**) s'écrit maintenant :

$$\rho^2\,(\dot{\theta} + \Omega\sin\lambda) = C$$

ce qui donne, en fonction des conditions initiales :

- pour les C.I. de type « Copernic », similairement à (1.24) :

$$\dot{\theta} = -\,\Omega\sin\lambda \tag{3.3}$$

- pour les C.I. de type « Terre », similairement à (1.25) :

$$\rho^2\,(\dot{\theta} + \Omega\sin\lambda) = X_0^2\,\Omega\sin\lambda \quad \text{ou :} \quad \dot{\theta} = \Omega\sin\lambda\,(\frac{X_0^2}{\rho^2} - 1) \tag{3.4}$$

Toute l'étude des deux formes principales de trajectoires effectuée au pôle demeure valable, étant entendu que le paramètre initialement défini au pôle par $k = \omega/\Omega$ devient maintenant : $k = \omega/\Omega\sin\lambda$. On voit qu'*il suffit de bien comprendre le pendule de Foucault au pôle et à l'équateur pour le comprendre partout*.

3.2 Correction à la latitude

En dehors du pôle ou de l'équateur, la force centrifuge entraîne une déviation vers le sud du fil à plomb, lequel définit la verticale locale autour de laquelle le pendule oscille. L'angle qui intervient hors du pôle (cf. fig. 3.1) est l'angle entre cette verticale locale et le vecteur $\vec{\Omega}$. Une correction à la latitude est donc, en principe, nécessaire. Afin de vérifier si nous pouvons la négliger, calculons-la.

Soit un lieu de latitude géographique λ_0. La force centrifuge est radiale dans le plan du parallèle. Le rayon du parallèle est $R\cos\lambda_0$ (R étant le rayon de la Terre), la valeur de l'accélération centrifuge est donc $\Omega^2 R\cos\lambda_0$. Sa direction fait un angle $(\pi/2-\lambda_0)$ avec le plan horizontal (faites-donc vous-même une petite figure). La composante horizontale de cette accélération est dirigée vers le sud et vaut donc : $\Omega^2 R\cos\lambda_0\sin\lambda_0$ ou $\frac{1}{2}\Omega^2 R\sin 2\lambda_0$. La déviation de la verticale est donc (en radians) :

$$\delta\lambda = \frac{\Omega^2 R\cos\lambda_0\sin\lambda_0}{g} = \frac{1}{2}\frac{\Omega^2 R\sin 2\lambda_0}{g}$$

$\delta\lambda$ est toujours dans le sens d'une augmentation apparente de latitude, la correction est maximale à la latitude de 45° et décroît vers zéro en allant vers le pôle ou vers l'équateur.

Tout ce qui a été dit pour le pendule de Foucault à une latitude quelconque doit par conséquent s'entendre au sens de la latitude corrigée $\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda$.

La période de rotation du pendule étant inversement proportionnelle à $\sin\lambda$, le raccourcissement relatif de la période de rotation T dû à la correction de latitude est :

$$\frac{dT}{T} = -\frac{d(\sin\lambda)}{\sin\lambda} = -\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}\,d\lambda$$

Ordre de grandeur de cette correction de latitude : pour la latitude de 45° où cette correction est maximale, la variation relative de la période T se simplifie en :

$$\frac{dT}{T} = -\,d\lambda \quad \text{avec :} \qquad \delta\lambda = \frac{\Omega^2 R}{2g} = 1,73.10^{-3}\ \text{(radian)}$$

ce qui correspond à $0,10°$ ou $6'$ environ.

Le raccourcissement relatif de la période de rotation dû à la correction de latitude est donc de $1,73.10^{-3}$ à 45°. La période étant à cette latitude $86\,160/0,707$ s, soit près de 34 h, le raccourcissement de période résultant de cette correction est donc de 149 s, soit environ 2,5 minutes, à comparer à 34 h. À Paris (latitude 48°51′), la correction sera peu différente. Aucun pendule de Foucault réel n'atteint une telle précision, et donc nous sommes en droit de négliger en pratique la correction de latitude. On reconnaîtra cependant qu'il était bon de s'en assurer et qu'il n'en serait pas forcément de même dans d'autres applications.

3.3 Des vidéos intéressantes, à voir absolument !

La maquette-modèle de Serge Picard, du Musée des arts et métiers – Si l'on voulait simuler un pendule de Foucault hors du pôle avec un plateau horizontal tournant autour d'un axe vertical, il faudrait être capable d'incliner la direction de la pesanteur, ce qui n'est guère évident ! Serge Picard s'en sort astucieusement en remplaçant le pendule par une tige vibrante lestée : une corde à piano semi-rigide, de longueur et diamètre adéquats.

La tige vibrante est suspendue perpendiculairement à un plateau incliné dont l'inclinaison correspond à la latitude de Paris ; le plateau peut tourner lentement autour d'un axe vertical ; on repère la direction d'oscillation de la tige au départ ; lorsque le plateau a décrit un tour complet autour de la verticale, on constate que la direction d'oscillation de la tige n'a effectué qu'environ 3/4 de tour relativement au plateau, conformément à la prévision ($\sin\lambda = 0,75$). Ceci confirme le caractère universel et purement géométrique de l'effet « sinus de la latitude ». La vidéo se trouve, parmi d'autres, dans une série : « Le petit théâtre du Musée des arts et métiers ». Allez la voir à l'adresse :

https ://www.dailymotion.com/video/xfzx8i . C'est spectaculaire !

La vidéo ferroviaire d'Alain Bernard – Un point de vue intéressant !
Notre collègue Alain Bernard a posté une très belle vidéo : la Terre est supposée fixe dans l'espace, et on y fait tourner des trains. Voir :

https ://www.youtube.com/watch ?v=YhXLxc1hzxM

L'auteur imagine donc une Terre fixe. Un train circule sur l'équateur à la vitesse à laquelle nous sommes emportés sur la Terre réelle (soit $v = 465$ m/s ou 1670 km/h). Dans un tel train, le pendule de Foucault ne tourne pas, comme nous l'avons vu. Peut-il en être de même en un point de latitude quelconque, par exemple à Paris ? Oui, à la condition de faire circuler le train sur le grand cercle passant par Paris et perpendiculaire au méridien (sur la figure 3.1 a, la trace du plan de ce grand cercle est inclinée de l'angle λ sur l'équateur). Le train décrit alors ce que les navigateurs appellent une *orthodromie*, plus courte distance entre deux points sur la sphère : tout en allant vers l'est, le train descend progressivement vers le sud et revient de l'autre côté en remontant progressivement vers le nord (aidez-vous d'une petite mappemonde et manipulez-la dans tous les sens !). C'est une illustration de ce que nous avons dit plus haut : ce grand cercle est l'équateur d'une Terre qui tournerait autour de la direction $\vec{\Omega_h}$ à la vitesse angulaire $\Omega\cos\lambda$. Imaginez un aiguillage à Paris : comme le fait remarquer l'auteur, selon que le train choisit le parallèle ou le grand cercle, la direction d'oscillation du pendule de Foucault pivotera ou ne pivotera pas par rapport au méridien local.

3.4 Une autre vision de la loi du sinus

3.4.1 « L'effet Belfield-Lefèvre »

Cette vision, due à Belfield-Lefèvre, un ami de Foucault, est décrite dans le livre de William Tobin [3].

Plaçons-nous à Paris où le sinus de la latitude vaut à peu près $0,75$ soit 3/4. Lançons le pendule, par exemple vers le nord. Au cours de la rotation de la Terre, la tangente au méridien engendre un cône dont le sommet est au-dessus du pôle, sur l'axe de la Terre, et dont le demi-angle au sommet est égal à la latitude λ de Paris (voir figures 3.2 et 3.3). Au cours de cette rotation, la direction d'oscillation du pendule s'écarte progressivement du méridien et, au bout d'un tour de Terre, elle a pivoté de 3/4 de tour (soit 270°) par rapport au méridien : le pendule oscille alors dans la direction du parallèle.

On trace sur le cône, pour chaque position du méridien, la direction d'oscillation du pendule en respectant la loi du sinus (voir la figure 3.2, *a*) : cette direction pivote dans le sens horaire par rapport au méridien local. Puis on coupe le cône selon la génératrice initiale et on aplatit le tout (figure 3.2, *b*)[3]. Miracle : toutes les directions d'oscillation du pendule sont parallèles entre elles ! En ce sens, la direction d'oscillation n'a pas varié, on peut même dire qu'elle est restée fixe, et cela demande quelques explications.

L'explication de l'effet Belfield-Lefèvre Nous supposons la loi du sinus acquise. Rappelons d'abord une propriété du cône droit circulaire de demi-angle au sommet λ, :

Si une génératrice du cône tourne d'un angle θ autour de l'axe du cône, elle tourne d'un angle $\alpha = \theta \cdot \sin \lambda$ autour du centre sur le cône développé (ou « aplati »).

Démonstration : (voir figure 3.3) Si nous appelons r la longueur de la génératrice SA, le rayon du cercle de base (ici le parallèle de Paris) est $r \sin \lambda$. La longueur du développement du cercle de base est inchangée, soit $l = 2\pi r \cdot \sin \lambda$. L'angle au centre correspondant à un tour complet autour de l'axe (rotation de 2π) vaut donc, sur la figure développée, $\alpha = 2\pi \sin \lambda$. De même, à une rotation d'angle θ autour de l'axe correspondra sur le cône développé une rotation d'angle $\theta \cdot \sin \lambda$.

Revenons alors à la figure 3.2. Si la Terre a tourné d'un angle θ dans le sens direct, le méridien a tourné dans le même sens d'un angle $\alpha = \theta \cdot \sin \lambda$ sur le cône développé. D'après la loi du sinus, nous savons par ailleurs que la direction du pendule a tourné, dans le plan tangent au cône, par rapport au méridien mais *en sens inverse*, de la même quantité. Elle garde donc une direction constante sur la figure développée.

Remarque : l'angle α de rotation du méridien se mesure sur la figure développée et non dans l'espace. Par exemple, lorsque la Terre a fait un demi-tour, l'angle dans l'espace entre les directions initiale et finale du méridien est 2λ, soit environ 98° à Paris, tandis qu'il est égal à $\pi \sin \lambda$ soit 135° sur la figure développée.

3.4.2 Pendule de Foucault et transport parallèle « à la Riemann »

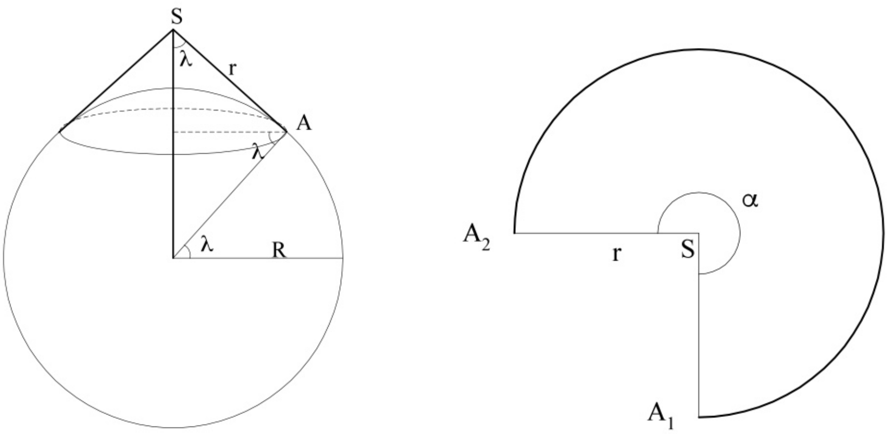
Nous avons une première réponse : hors du pôle ou de l'équateur, la direction d'oscillation d'un pendule de Foucault, qui n'est fixe ni par rapport au référentiel des étoiles, ni par rapport au référentiel terrestre (matérialisé par le parallèle et le méridien locaux) serait-elle, comme au pôle, fixe par rapport à quelque chose ? La réponse est oui : elle est fixe dans le plan du cône développé, cône engendré par la tangente au méridien local.

Ceci se relie à une notion beaucoup plus générale : le *transport parallèle sur une surface courbe.* Considérons le plan tangent à la sphère terrestre contenant la tangente

3. Cela est possible sans déchirure parce que le cône est une surface *réglée*, c'est à dire engendrée par le déplacement d'une droite.

a) *b*)

FIGURE 3.2 – L'aplatissement du cône : *a*) Le cône tangent au parallèle de Paris ($\sin \lambda = 0.75$) vu en perspective ; *b*) le cône développé, ou « aplati ». Les flèches indiquent la direction d'oscillation d'un pendule de Foucault initialement lancé vers le nord.



a) *b*)

FIGURE 3.3 – Développement du cône circulaire. *a*) Le cône tangent au parallèle de Paris de rayon $r \sin \lambda$. *b*) le cône développé (« aplati ») sur le plan du parallèle.

au méridien de Paris à l'instant initial (donc tangent à la génératrice du cône) et faisons-le rouler le long du parallèle de Paris ; nous l'appellerons le *plan rouleur*. Supposons que, simultanément, nous déplacions le long du parallèle un vecteur restant constamment dans le plan tangent, mais à part cela pouvant varier arbitrairement en direction. À chaque instant, nous marquons la trace de ce vecteur sur le plan rouleur et nous regardons l'ensemble de ces traces après un tour complet. Nous avons alors la

Définition : si et seulement si toutes les traces sur le plan rouleur sont parallèles entre elles, on dit que le vecteur a subi un *déplacement parallèle* sur la surface de la Terre le long du parallèle de Paris.

Or, le plan rouleur enveloppe exactement le cône engendré par la tangente au méridien lors de la rotation de la Terre. Développer (ou aplatir) le cône, c'est se placer dans le plan rouleur. Nous avons vu que la loi du sinus implique que toutes les traces du pendule sont alors parallèles entre elles. Conclusion :

Lors de la rotation de la Terre, la direction d'oscillation du pendule de Foucault subit un transport parallèle le long du parallèle du lieu.

C'est donc au sens du *transport parallèle* sur une surface courbe – la Terre – que le pendule conserve une direction d'oscillation fixe. Cette fixité a un sens profond : par rapport à l'espace euclidien environnant, le repère local (constitué par les tangentes au parallèle et au méridien) pivote par rapport aux étoiles lors de la rotation de la Terre ; un vecteur subissant un transport parallèle compense exactement cette rotation par une rotation en sens inverse : c'est justement le cas de la direction d'oscillation du pendule. Cela est valable à toute latitude ; à l'équateur, le cône dégénère en un cylindre, toutes les génératrices sont parallèles : la direction d'oscillation subit toujours un transport parallèle mais, de plus, conserve une direction fixe par rapport au méridien car la tangente à ce dernier ne pivote plus. On dit que l'équateur est *auto-parallèle.*

Cette définition du transport parallèle est très générale : vous pouvez remplacer la Terre par n'importe quelle surface munie d'une connexion (c'est à dire une notion de distance et d'angle), le parallèle par n'importe quelle courbe sur la surface, le pendule par n'importe quel vecteur tangent, la définition s'applique. Les courbes auto-parallèles sont alors les *géodésiques* de la surface (courbes réalisant la plus courte distance entre deux points) ; sur la sphère, ce sont les grands cercles, dont l'équateur terrestre.

Des détails supplémentaires sur le transport parallèle sont donnés dans l'annexe C.

3.4.3 Pendule de Foucault et mouvement des étoiles

On fait souvent remarquer que la direction d'oscillation du Pendule pivote, dans le plan horizontal, à la même vitesse que la composante horizontale du mouvement d'une étoile quelconque à son lever (ou à son coucher), ou encore que cette direction pivote à la vitesse de rotation « en azimut » d'une étoile à son lever (ou à son coucher).

C'est maintenant une évidence : toute étoile pivote, dans le référentiel Terre, à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe de la Terre. Cet axe fait, avec la verticale du lieu, l'angle $(\pi/2-\lambda)$. La vitesse angulaire de l'étoile autour de la verticale, ou « vitesse en azimut », au moment où elle franchit l'horizon est donc $\Omega\cos(\pi/2-\lambda) = \Omega\sin\lambda$, exactement celle de la direction d'oscillation du pendule. C'est ni plus ni moins la décomposition du vecteur axial $\vec{\Omega}$ en ses composantes verticale et horizontale effectuée pour le pendule.

Chapitre 4

Anharmonicité du pendule, précession apsidale et anneau de Charron

On le sait : le pendule *n'est pas* un oscillateur harmonique, la force de rappel n'étant pas proportionnelle à l'élongation angulaire mais à son sinus. L'approximation harmonique nous a suffit pour déterminer l'allure des trajectoires selon les conditions initiales, sous la condition des « petites élongations angulaires ». Rien n'empêche d'ailleurs de tenir compte de l'équation du mouvement exacte, au prix de solutions non explicitables à l'aide des fonctions usuelles, donc calculables seulement numériquement avec des logiciels de calcul formel. Rappelant que la déviation du plan d'oscillation est entièrement due à la force de Coriolis, l'analyse effectuée précédemment n'en sera pas fondamentalement changée, seules les formes des « lobes » seront plus ou moins modifiées.

Il n'en va plus du tout de même si l'on veut *construire* un pendule de Foucault, particulièrement un pendule de Foucault de petite taille. Du fait de l'accumulation de l'erreur systématique à chaque oscillation, l'anharmonicité du pendule va poser au constructeur un problème redoutable, y compris pour des amplitudes considérées habituellement – dans d'autres situations – comme petites, par exemple moins de 5°.

4.1 Un redoutable problème de mécanique dû à l'anharmonicité du pendule : la précession apsidale

La principale conséquence de l'anharmonicité du pendule est que que la période d'oscillation T dépend de l'amplitude α du mouvement (élongation angulaire maximale). Si T_0 est la période à la limite des amplitudes infiniment petites, on a, en se limitant au premier terme correctif (i.e. amplitudes encore « pas trop grandes ») :

$$T \sim T_0\,(1+\alpha^2/16)$$

Par exemple, l'allongement de période est d'environ $0,05\,\%$ pour une amplitude de $5°$ et $0,2\,\%$ pour une amplitude de $10°$; on pourrait penser que cela est négligeable et ne pose aucun problème, d'autant que l'amplitude utilisée pour le « petit » pendule de la faculté d'Orsay (longueur 120 cm) ne dépasse pas $3,5°$ environ, soit un allongement de période de $0,025\,\%$. En réalité il n'en est rien.

Tout irait bien si, *en l'absence de rotation de la Terre*, la trajectoire de la boule, lâchée sans vitesse initiale, était rectiligne (cf. C.I. de type « Copernic »). Mais c'est un cas idéal, qui ne marche que sur le papier ! Toute poussée latérale a pour effet de rendre la trajectoire peu ou prou elliptique (comparer par exemple les figures 1.2 a et 1.2 b). Or un pendule réel est soumis à diverses pertubations aléatoires :

- courants d'air aléatoires (même dans un cage de verre, d'ailleurs non étanche) dues notamment aux différences locales de température dans la pièce : un souffle latéral ovalise le mouvement ;
- chocs et vibrations diverses du support et du bâtiment ;
- non isotropie du fil de suspension qui provoque aussi une ovalisation (surtout avec des fils métalliques, moins avec un fil tissé).

Le mouvement réel de la boule, même en l'absence supposée de rotation de la Terre, est donc toujours plus ou moins légèrement elliptique en raison de ces perturbations non maîtrisables. Or, s'il est elliptique, cela peut devenir catastrophique en raison de l'anharmonicité du pendule.

En effet, une trajectoire elliptique pour un oscillateur harmonique à deux dimensions s'analyse comme la superposition de deux mouvements sinusoïdaux orthogonaux déphasés de $\pi/2$. Soit par exemple une ellipse de demi grand axe a et de demi petit axe b (fig. 4.1) ; à cause de l'anharmonicité, la période selon le grand axe est un peu plus grande que selon le petit axe ; en conséquence, au bout d'un aller-retour « en long », le mobile aura fait un peu plus d'un aller-retour « en large ». Le résultat est que la trajectoire ne se referme plus comme indiqué sur la figure 4.1 : on peut décrire la trajectoire, en première approximation, comme une *ellipse qui pivoterait dans son plan autour de son centre, dans le sens même où elle est parcourue*, ceci même en l'absence de rotation de la Terre.

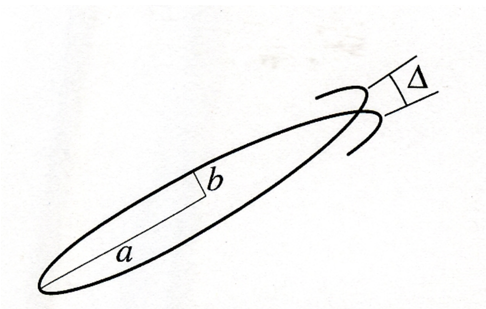


FIGURE 4.1 – Rotation apsidale (figure extraite du livre de W. Tobin [3])

Ce mouvement de rotation, appelé *précesssion apsidale* est général pour tous les oscillateurs harmoniques à deux dimensions légèrement perturbés. Il s'agit maintenant d'évaluer l'ordre de grandeur de sa période relativement à la période de la Terre. On trouvera un calcul limité au premier terme d'un développement en série dans [6], soit :

$$T_{\text{apsidale}} = \frac{8l^2}{3ab} \cdot T_{pendule} = \frac{8l^2}{3ab} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{4.1}$$

Sachant que a/l et b/l sont les amplitudes angulaires respectivement longitudinale et transversale supposées données, il s'ensuit que, pour des «ovalisations» (ou excentricités) similaires, la période de rotation apsidale varie comme $l^{1/2}$; cette rotation parasite sera donc beaucoup moins gênante pour un très grand pendule (67 m !) que pour un tout petit où elle représente la principale difficulté. Examinons donc deux exemples :

— pour le « petit » pendule d'Orsay, de longueur $l = 1,2\,\text{m}$, et de période $2,20$ s : en supposant une amplitude $a = 7,5\,\text{cm}$ et une « ovalisation » $b = 1\,\text{mm}$ (ce qui est couramment observé en l'absence d'autre artifice), on obtient : $T_{\text{apsidale}} = 112\,000\,\text{s}$. Ainsi, la vitesse de rotation apsidale est du même ordre de grandeur que la vitesse de rotation d'un pendule de Foucault placé à Paris dont la période de rotation est d'environ 32 h soit 115 000 s ; elle s'y ajoute ou s'en retranche selon le sens de la perturbation : il est clair dans ces conditions que notre petit pendule de Foucault *ne peut pas fonctionner tel quel*. Or, ce pendule, muni d'un dispositif d'entretien, est fait pour être observé en continu pendant des heures, des jours, des semaines (nous l'avons fait). Il y a donc un truc, et ce n'est pas de la triche.

— pour le « grand » pendule du Panthéon, de longueur $l = 67\,\text{m}$, et de période $16,4$ s : l'amplitude maximale du balancement au lancement est $a = 4,80\,\text{m}$; si on suppose une « ovalisation » b de l'ordre de 2 cm voire davantage (ce que nous avons personnellement observé), on obtient : $T_{\text{apsidale}} = 2,04 \,.10^6$ s. Ainsi, la vitesse de rotation apsidale n'est plus que le 1/20 environ de celle du pendule, et les choses peuvent s'améliorer sensiblement lorsque a diminue par amortissement, le pendule ne possédant pas de système d'entretien. Le pendule du Panthéon *peut donc fonctionner tel quel* sans autre artifice ; cependant, on voit les limites de la précision que l'on peut en attendre : 1/20, cela fait tout de même $\pm 5\%$, ce n'est pas une très bonne horloge ! On ne peut guère espérer mieux, et c'est d'autant plus facilement acceptable que, le pendule n'étant pas entretenu, le mouvement s'amortit (ce qui ralentit la rotation apsidale) et ne peut être suivi au-delà de probablement 2 ou 3 heures. C'est déjà, néanmoins, un excellent résultat.

Une expérience simple pour rendre sensible la rotation apsidale : prenez un pendule simple court : par exemple, un boulon attaché au bout d'un fil de 20 à 30 cm ; ou le pendule du plateau tournant d'Orsay, sans faire tourner le plateau ; lâchez-le en lui donnant une amplitude importante et, d'une petite chiquenaude, une petite vitesse initiale vers la droite ; le mouvement de la boule est alors approximativement une ellipse allongée ; laissez osciller librement ; au bout d'une demi-minute, vous observez que le grand axe de l'ellipse a déjà pivoté de plusieurs dizaines de degrés, c'est spectaculaire ! L'amplification du phénomène est due au fait que vous avez donné au départ une amplitude importante et une « ovalisation » conséquente.

Solutions du problème : deux solutions sont possibles pour supprimer, ou du moins rendre négligeable, la rotation apsidale :

a) conserver l'anharmonicité du mouvement, mais empêcher l'ellipse de se former, par un dispositif mécanique adéquat. C'est la méthode réalisée sur le pendule d'Orsay avec « l'anneau de Charron » ;
b) une méthode sophistiquée : rendre le pendule harmonique en linéarisant l'équation du mouvement grâce à un dispositif approprié ; la période étant alors indépendante de l'amplitude, il n'y a plus de rotation apsidale et l'axe de l'ellipse – si ellipse il y a – peut être pris comme direction d'oscillation du pendule idéal.

Rien n'interdit, d'ailleurs, de cumuler les deux méthodes.

Remarque : nous avons vu (§ 1.1.2 et fig. 1.2, *b*) que, si le pendule est lancé avec les conditions initiales du second type, dit type « Terre », la trajectoire de la boule dans le référentiel de Copernic est alors déjà une ellipse, très aplatie bien sûr, de petit axe $b = a/k$ avec $k = \omega/\Omega = T_{Terre}/T_{pendule}$. Il y a donc déjà une rotation apsidale (dans le sens direct) indépendamment de la rotation de la Terre, et indépendamment de toute perturbation. Cet effet peut-il être négligé ?

Revenant à l'équation (4.1), avec $b = a/k$, $\theta_0 = a/l$ et $T_{Terre}/T_{pendule} = k$, nous obtenons pour cette « rotation apsidale intrinsèque » :

$$\frac{T_{aps,intr.}}{T_{Terre}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{\theta_0^2} \tag{4.2}$$

valeur indépendante de la longueur du pendule. Pour une amplitude réaliste de 1/16 radian, (soit 3,5°, correspondant à une amplitude linéaire de 7,5 cm pour le petit pendule d'Orsay, ou 4,18 m pour celui du Panthéon) cette rotation a une période de plus de 680 jours ; cet effet peut donc être négligé. Il deviendrait notable aux grandes amplitudes, mais personne n'aurait l'idée de faire fonctionner un pendule de Foucault à des amplitudes de plusieurs dizaines de degrés, les effets d'anharmonicité s'aggravant alors considérablement.

4.2 La solution du problème par l'anneau de Charron

La présence d'une rotation apsidale entraîne nécessairement que la boule possède, dans le référentiel terrestre, une vitesse tangentielle (i.e. non radiale) à l'extrémité de chaque demi-période, y compris dans le cas des conditions initiales de type « Terre » où la boule « devrait » arriver radialement à chaque extrémité d'oscillation (cf. figure 1.3, b). Dans le cas des C.I. de type « Copernic », cette composante parasite s'ajoute, dans un sens ou dans l'autre, à la composante intrinsèque résultant du mouvement de la Terre (cf. figure 1.3 a).

C'est le professeur F. Charron qui apporta, en 1931, une solution extrêmement simple – géniale – à ce problème [5]. Elle s'applique si, et seulement si, le pendule est entretenu. C'est la solution du type a) mentionné plus haut.

4.2.1 Description de l'anneau de Charron

Un anneau circulaire est placé sur l'axe du fil, à une petite distance en-dessous du point de suspension. L'amplitude de l'oscillation est ajustée (via le moteur d'entretien) de manière qu'à chaque demi-période, le fil vienne juste toucher le bord de l'anneau. Il faut qu'il « touche » tout juste, sans briser franchement, mais touche quand même ! rappelons que la vitesse radiale est nulle (évidemment) à chaque extremum d'élongation. Ainsi, si une composante non radiale de vitesse existe au moment du contact, elle est alors annulée par frottement sur l'anneau. Si cela ne réussit pas tout à fait à la première oscillation, c'est réalisé en tous cas au bout de quelques oscillations.

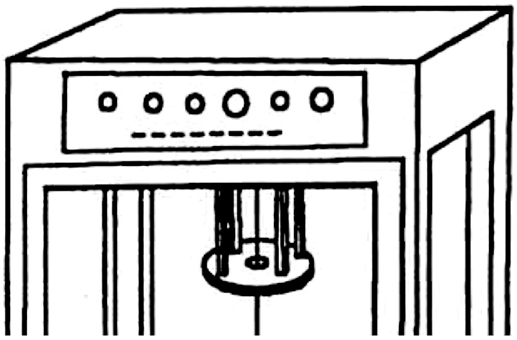


FIGURE 4.2 – Anneau de Charron du pendule d'Orsay (zoom sur la figure 1 a)

Ainsi, le mobile repart avec une vitesse initiale nulle relativement à l'anneau, c'est à dire relativement au référentiel terrestre : il repart donc exactement avec les C.I. type « Terre » de la figure 1.3 b, quelle que soit la façon dont il a été lancé. Il va donc décrire l'arc suivant d'hypocycloïde ; si, au cours de cette demi-période, il acquiert une petite vitesse de rotation apsidale, celle-ci est annulée lors du (ou des) contact suivant avec l'anneau. Notons que, même s'il a été lancé avec les C.I. de type « Copernic », (ou toutes conditions intermédiaires), il repart avec une vitesse nulle par rapport à l'anneau et à la Terre. Le double rôle de l'anneau de Charron est donc d'empêcher l'apparition d'une rotation apsidale parasite en empêchant l'ovalisation du mouvement, et d'autre part de nous rendre indépendants des conditions initiales de lancement : quelle qu'elles soient, on est toujours ramené aux C.I. de type « Terre » et aux trajectoires representées sur les figures 1.3 b et 1.4 b[1]. Ce système requiert quelques précautions, mais, même s'il ne saurait être parfait, il est remarquablement efficace.

Contraintes d'utilisation de l'anneau de Charron – Il y a quelques précautions à prendre pour que l'anneau de Charron soit réellement efficace :

— l'horizontalité de la base de l'appareil doit être très bien ajustée ;

1. Ceci répond à une objection qui nous a parfois été faite : « mais votre anneau de Charron détruit le mouvement de rotation du pendule, illustrant celui de la Terre, que vous cherchez à mettre en évidence ! ». Pas du tout : son rôle est de nous ramener aux C.I. de type « Terre » qui sont parfaitement légales. La rotation instantanée est alors nulle aux extrema (cf. figure 1.3 b), et cela n'empêche pas la Terre de tourner ! toute la déviation de la direction d'oscillation se produit lors du parcours entre extrema, jamais aux extrémités.

— la symétrie du mouvement par rapport à l'anneau doit être très bien assurée : pour le pendule d'Orsay, un outil de centrage est fourni à cet effet. Le fil doit venir légèrement toucher l'anneau de la même manière de chaque côté ;
— ne pas être tenté d'augmenter l'amplitude d'oscillation en espérant que « ça ira mieux ». Nous avons fait de tels essais, la ligne du fil a alors une brisure nette au niveau de l'anneau. Nous avons alors observé que cela introduisait un artefact, une augmentation systématique de la vitesse de pivotement de la direction d'oscillation, qui peut atteindre 2 à $3\,^\circ/\mathrm{h}$ au regard des $11,3\,^\circ/\mathrm{h}$ attendus à la latitude d'Orsay ; le fil doit toucher l'anneau « tout juste » et symétriquement de chaque côté, ce qui suppose un bon centrage. Par la suite, nous avons pu lire que Charron avait lui-même prévu cet effet dans son article [5].

Moyennant quoi, nous obtenons des résultats tout à fait honorables avec le petit pendule d'Orsay (cf. ci-dessous).

Faut-il un anneau de Charron sur un « grand » pendule, entretenu ou non ? Insistons sur le fait que l'utilisation d'un anneau de Charron, a priori, n'a de sens que sur un pendule entretenu : en effet, les oscillations d'un pendule libre s'amortissent avec le temps ; si le fil touchait juste l'anneau à chaque demi-période au début, il ne le touchera plus au bout d'un certain temps.

Alors, faut-il placer un anneau de Charron sur un pendule qui serait à la fois « très grand » et entretenu ? Notre réponse est oui, bien que nous n'ayions pas d'exemple sous la main. Quand on voit le bon résultat du pendule du Panthéon en libre (pour lequel l'ovalisation de trajectoire, bien que faible, est visible), il n'y a pas de doute qu'un anneau de Charron le rendrait beaucoup plus précis, à condition qu'il soit entretenu.

Toutefois, on peut poser la question : un anneau de Charron aurait-il du sens sur un (grand) pendule non entretenu ? a priori, non, comme nous l'avons dit plus haut. Cependant, cet avis doit être relativisé. Nous savons qu'il est important de lancer le pendule sans déviation initiale afin d'éviter toute ovalisation. Pour cela, on utilise en général la méthode du fil brûlé (C.I. de type « Terre »). L'anneau de Charron, qui, en l'absence d'entretien, n'est efficace qu'au début, peut constituer une excellente alternative à cette méthode : vous pouvez lâcher la boule sans précautions extrêmes, l'anneau de Charron vous ramènera rapidement aux conditions initiales de type « Terre » : au moins, vous avez un « bon » lancement. Ensuite, dès que l'amortissement deviendra sensible, il ne servira plus à rien. Par exemple, le pendule de la bibliothèque de l'université d'Oldenburg en Allemagne (hauteur $13,5\,\mathrm{m}$, boule de $25\,\mathrm{kg}$, non entretenu) que nous avons pu observer en détail, possède un anneau de Charron dont la raison d'être est peut-être celle-ci, outre qu'il sert en même temps de parachute en cas de rupture du fil au niveau de la suspension.

4.2.2 Résultats sur le pendule d'Orsay

Rappel des caractéristiques du pendule d'Orsay (cf. Introduction, fig. 1, haut) : longueur 1,20 m ; masse de la boule 250 g ; avec anneau de Charron (cf. fig. 4.2) ; fil textile tissé ; oscillations entretenues. Réalisation : société ELLWE (1998), sur un plan plus ancien de Leybold.

Système d'entretien. Il s'inspire de celui installé par Foucault [2, 3] sur le pendule de l'exposition universelle de 1855 visible aujourd'hui au Musée des arts et métiers [2], sauf que le passage par la verticale est aujourd'hui détecté par un système électro-optique.

Un champ magnétique à symétrie cylindrique d'axe vertical est créé par une bobine placée à l'intérieur de la base de l'appareil ; la boule est en acier, elle est attirée lorsqu'elle se rapproche de la verticale ; une fois passé la verticale, le champ doit être immédiatement coupé (faute de quoi, la boule serait attirée en arrière) ; à cet effet, une cellule photo-électrique est placée au centre de la base, elle est illuminée par une couronne lumineuse placée au sommet de l'appareil et allumée en permanence ; au passage de la boule par la verticale, la cellule n'est plus éclairée à cause de l'ombre de la boule, ce qui déclenche le signal de coupure du courant dans la bobine ; le courant est ensuite rétabli en temps voulu grâce à un système à retard de manière que la boule soit à nouveau attirée lors du retour suivant vers la verticale.

Résultats. Sur le long terme (des jours, des semaines en continu), et moyennant un bon réglage au départ, des résultats proches de la valeur attendue à Orsay, soit $11,3\,^\circ/\mathrm{h}$, correspondant à un tour en 32 h environ, sont obtenus (cf. fig. 4.3, haut). En revanche, pour un si petit pendule, le fonctionnement sans anneau de Charron serait totalement erratique (il suffit pour le voir de réduire légèrement la puissance d'entretien de manière que le fil ne touche plus l'anneau). Notons toutefois que, sur le court terme (quelques heures), même en présence de l'anneau, la vitesse de pivotement peut s'écarter aléatoirement de 1 ou $2°\,/\mathrm{h}$ voire plus, de la valeur obtenue par régression linéaire sur le long terme ($\sim 11,3\,^\circ/\mathrm{h}$) (cf. fig. 4.3, bas). L'anneau de Charron est génial, il permet de rendre visible la rotation de la Terre avec un petit pendule, mais il ne peut tout. Il fait déjà beaucoup, vu l'extrême petitesse des forces déterminant le phénomène à mettre en évidence.

4.2.3 Un autre exemple de pendule avec anneau de Charron

Notre collègue Éric Durand, professeur de sciences physiques, a réalisé dans la décennie 2000 au collège Jean Vilar de Grigny (91), un excellent Pendule entretenu « déplaçable » de hauteur intermédiaire : 4 m (cf. fig. 4.4 ci-dessous). Cet instrument a remarquablement fonctionné à partir du moment où un anneau de Charron lui é été adjoint – et seulement à partir de ce moment – avec les mêmes contraintes de réglage qu'à Orsay. Il est actuellement exposé au musée de l'École polytechnique «Mus'X» à Palaiseau.

2. Le second pendule de Léon Foucault, présenté à l'exposition universelle de Paris en 1855 (hauteur : 17 m), était à la fois grand et entretenu. Il a été confié par la suite au Musée des arts et métiers, où l'on peut le voir osciller aujourd'hui dans la chapelle Saint-Martin du musée. Le musée a reconstitué un système d'entretien sur le principe de l'original de 1855, mais il manque d'efficacité, n'étant capable d'assurer en continu que des oscillations d'amplitude insuffisante pour des démonstrations publiques. Avec un entretien efficace, il serait un bon candidat pour tester un anneau de Charron « en grand » et faire des mesures sur le long terme. Toutefois, Foucault n'utilisait évidemment pas d'anneau de Charron.

4.3 Autre solution : linéariser l'équation du mouvement via un dispositif adéquat

La seconde solution consiste à rendre le mouvement du pendule harmonique ; de la sorte, même s'il y a ovalisation de la trajectoire indépendamment du mouvement de la Terre, l'ellipse ne subira pas de rotation « apsidale » parasite.

4.3.1 Linéarisation par dispositif électromagnétique

Strictement, la force de rappel du pendule est proportionnelle au sinus de l'élongation angulaire ; l'équation du mouvement n'est donc pas linéaire et le mouvement du pendule n'est pas harmonique. Pour qu'il le soit, il faudrait que la force de rappel soit proportionnelle à l'élongation elle-même. Or, sur $[0, \pi/2]$, le sinus de l'angle est toujours inférieur à l'angle. La force de rappel est donc trop faible aux grandes amplitudes, ou, ce qui revient au même, elle est trop forte aux petites amplitudes. Voici alors le dispositif réalisé dans les années 1990's par des collègues de l'université Pierre et Marie Curie :

Une petite bobine supplémentaire d'axe vertical est placée à l'intérieur de la bobine principale ; elle produit un petit champ magnétique *permanent* ; un petit aimant permanent est collé sous la boule de manière qu'il soit repoussé par ce champ permanent. Cela réduit par conséquent l'intensité de la force de rappel dans la région centrale, comme souhaité. En ajustant soigneusement le courant continu dans la petite bobine, on arrive à annuler le premier terme non linéaire du développement du sinus, l'anharmonicité résiduelle étant alors du cinquième ordre. Les auteurs ont mis toutes les chances de leur côté en ajoutant un anneau de Charron. Ce pendule, plus important que le nôtre (longueur 2 m, masse 2 kg), a ultérieurement été donné au Palais de la Découverte où il se trouve toujours.

4.3.2 Suggestion : un anneau de Charron cycloïdal ?

On sait que Huygens a rendu le pendule isochrone (période indépendante de l'amplitude) en faisant décrire à la boule un arc de cycloïde inversée qui est une courbe tautochrone (temps de parcours indépendant du point de départ). S'appuyant sur le fait qu'une cycloïde est elle-même une développante de cycloïde, il suffit pour cela que le fil du pendule s'appuie, au cours de son mouvement, sur un arc de cycloïde de part et d'autre du point d'attache : c'est le pendule cycloïdal « à la Huygens ».

Considérons les deux arcs de cycloïde symétriques au sommet d'un tel pendule et faisons leur effectuer une rotation complète autour de la verticale du point de suspension ; ils engendrent un solide de révolution qui est une sorte de cône circulaire dont les génératrices, au lieu d'être des droites, sont des arcs de cycloïde. Plaçons cet objet au sommet du pendule où il joue en même temps le rôle d'anneau de Charron : l'ovalisation est de ce fait largement évitée ; et, dans la mesure où ce résultat n'est pas parfait (comme nous l'avons vu sur le pendule d'Orsay), s'il reste un résidu d'ovalisation, la rotation apsidale parasite est évitée grâce à l'isochronisme du pendule. En somme, un tel dispositif, totalement passif, cumulerait les avantages des deux précédents.

Cette idée n'a jamais été exploitée à notre connaissance. Pour savoir si cela marche effectivement, si de nouveaux artefacts n'apparaissent pas, il faut essayer. Qui aurait le courage de s'y lancer ?

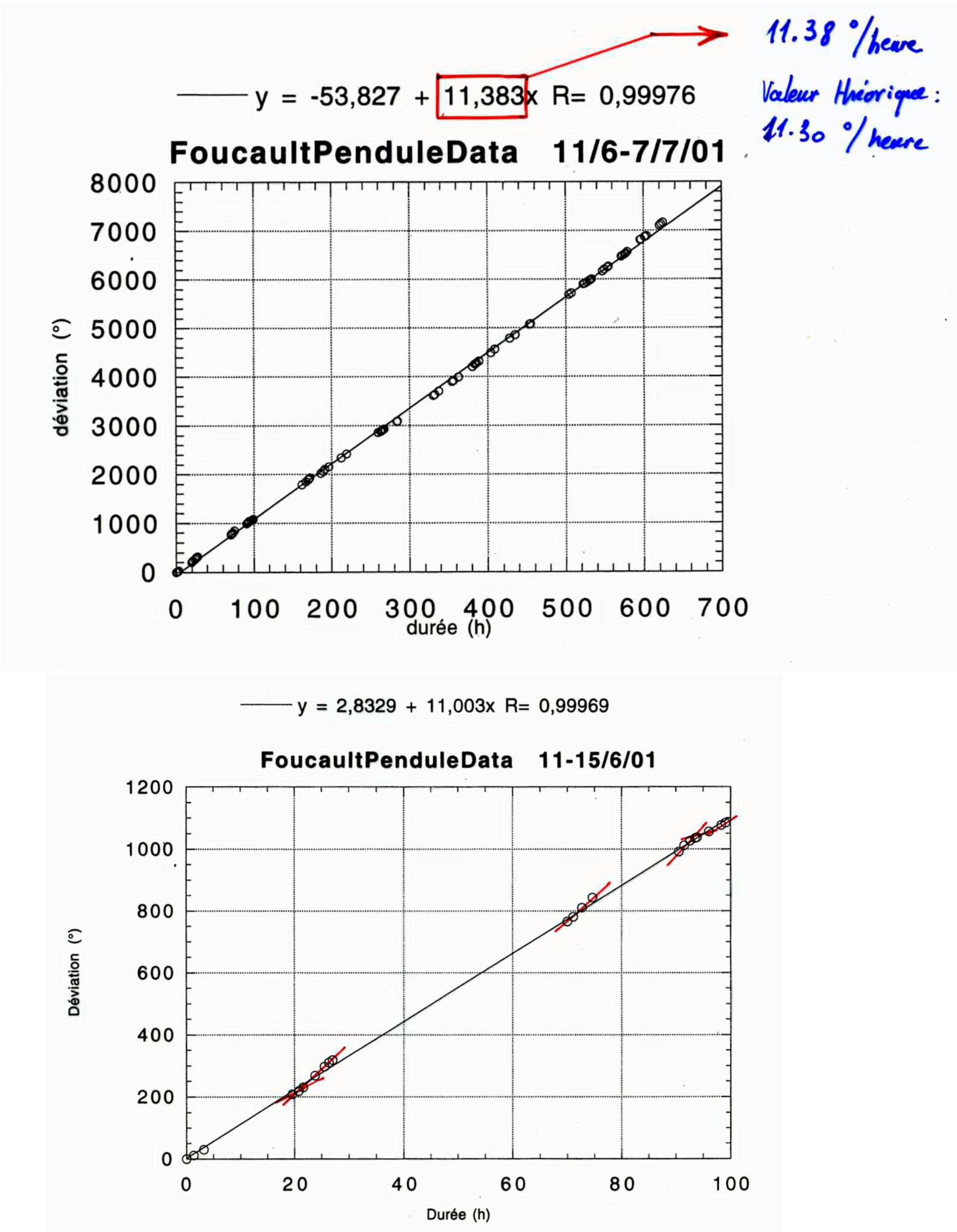


FIGURE 4.3 – Déviation cumulée du pendule d'Orsay : *en-haut* : enregistrement sur trois semaines ; la pente attendue est 11,3°/h. *en-bas* : zoom sur les 100 premières heures : on voit, sur des durées de quelques heures, des écarts aléatoires notables à la pente moyenne.

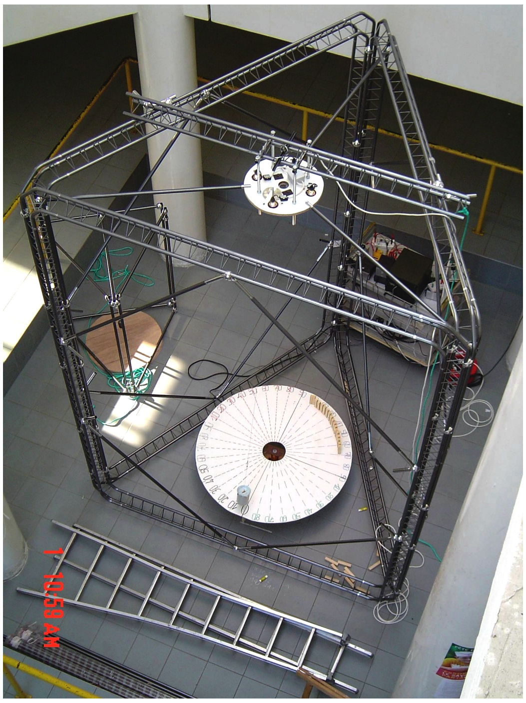


FIGURE 4.4 – Pendule de Foucault du collège Jean Vilar à Grigny (91), désormais exposé au Mus'X, École polytechnique, Palaiseau. Hauteur : 4 m. Photo : Éric Durand.

Chapitre 5

Le pendule de Foucault dans le Cosmos : la Terre tourne-t-elle ? et qu'est-ce que cela veut dire ?

Père et Fils sont en train de regarder le pendule de Foucault au Musée. Père est dans la cinquantaine et déjà grisonnant, Fils paraît très jeune, il est plus grand et plus mince que son père. Ils se tiennent par la main.

Fils : Papa, qu'est-ce que c'est ?

Père : C'est un pendule de Foucault, ça prouve que la Terre tourne.

Fils : Mais cela, je le sais depuis longtemps, je n'ai que faire de la démonstration !

Père : Pourtant, cela a été une fameuse idée !

P. Lauginie, in : [7]

La Terre tourne-t-elle ? À l'évidence, le pendule de Foucault s'inscrit dans cette problématique. « Venez-voir tourner la Terre, venez la voir jeudi au Panthéon ! » écrivait-on en mars 1851. La Terre tourne-t-elle ? Et qu'est-ce que cela veut dire ? Tout a été dit, semble-t-il, mais vraiment tout bien assimilé ? Voire. Car on ne s'est pas disputé pendant deux mille ans sur le sujet sans qu'existe un réel problème. Géocentrisme, héliocentrisme et enfin a-centrisme moderne, le « grand débat », déjà présent chez les Grecs, avec Aristarque de Samos et Aristote, traverse toute l'Histoire : Ptolémée, Copernic, puis Galilée, Képler, Newton pour finir, mais seulement alors, avec Poincaré et Einstein. Aujourd'hui, nous savons que le mouvement est relatif : il faut dire par rapport à quoi on tourne, si on tourne. Et si la Terre tourne par rapport au Ciel, n'est-il pas équivalent de dire que le Ciel tourne par rapport à la Terre ? Et nul besoin d'un pendule de Foucault pour prouver cela, il suffit de regarder en l'air, le Soleil le jour, les étoiles la nuit ! Au pôle, le plan d'oscillation du pendule – convenablement lancé (cf. § 1.1.1) – est fixe par rapport aux étoiles. Il est donc rigidement lié au Ciel. Sur le sol, la trace fait un tour en un jour sidéral. Que conclure ? C'est immédiat : le Ciel tourne donc autour de la Terre ! Vous pouvez toujours ergoter, disant : « mais je sais bien que ce n'est pas le ciel qui tourne, ce n'est qu'une apparence, je sais que c'est la Terre ! », vous n'avez toujours pas de démonstration.

Alors quel est l'apport du pendule de Foucault au « grand débat » ? Son mouvement est simple par rapport aux étoiles ; au contraire, sur le sol, la boule décrit les courbes complexes que nous avons étudiées. Et pourquoi ? À cause des forces d'inertie, essentiellement, en l'occurence, la force de Coriolis. Ce que prouve le pendule, ce n'est donc pas un mouvement, qui est à la fois évident et relatif ; il prouve que le référentiel terrestre n'est pas galiléen (ou inertiel), alors que le référentiel stellaire – celui de Copernic – l'est excellemment, au moins au regard de la précision pertinente pour ce sujet : les lois de Newton, et d'abord la loi de l'inertie, y sont, par exemple, très bien vérifiées par le mouvement des planètes. Le pendule donne raison aux coperniciens, mais c'est plus subtil que de dire « la Terre tourne ». La Terre est en rotation, oui, mais *par rapport à un référentiel d'inertie* ; faute de donner cette précision, vous n'avez rien dit.

La saga de l'Esquimau. Reprenons, en l'adaptant et en la développant, une image utilisée par Jacques Gapaillard ([8], p. 256). Imaginez un Esquimau regardant osciller un pendule de Foucault placé au pôle nord, et supposez la Terre éternellement couverte de nuages. L'Esquimau voit la trace pivoter, et la durée d'un tour définit pour lui la durée d'un « jour ». Il est savant. D'abord, il conclut qu'il existe un référentiel par rapport auquel le pendule ne pivote pas : c'est trivial, c'est évidemment un référentiel lié au plan d'oscillation du pendule ! Un tel référentiel est donc en rotation à une certaine vitesse angulaire Ω dans le sens horaire par rapport au référentiel terrestre, le seul qu'il considérait jusque-là. À ce niveau, c'est une façon d'introduire la relativité du mouvement et cela ne lui apprend rien de physique.

Mais l'Esquimau est vraiment très savant : dans cette expérience de pensée, nous supposons qu'il connaît bien les lois de Newton, il analyse soigneusement le mouvement tel qu'observé sur Terre, et comprend que celui-ci résulte de la combinaison de trois forces, une force de rappel centrale, une force radiale et une force latérale responsable de la déviation. Il peut monter des expériences pour tester sa conclusion. Et comme il a appris (à la fac) les lois du changement de référentiel, et qu'il est très perspicace, il effectue le changement de référentiel : et, ô miracle, il découvre que dans le référentiel lié au plan d'oscillation du pendule, une seule force est nécessaire pour expliquer le mouvement : la force de rappel centrale due à la gravité. Il comprend alors qu'un tel référentiel est vraiment intéressant : tout y est tellement plus simple ! il décide de l'appeler « référentiel d'inertie ». La symétrie initiale entre les deux référentiels est rompue : la Mécanique y est différente. Ou encore : tant que vous vous limitez à la Cinématique (description du mouvement), les deux points de vue – le Ciel tourne, ou la Terre Tourne – sont équivalents. Dès que vous introduisez la Dynamique (le mouvement et ses causes), le pendule définit un référentiel d'inertie, plus simple et *inéquivalent au référentiel terrestre.*

Survient alors un brusque changement de climat (naturel, bien sûr !), les nuages sont balayés. L'Esquimau découvre, stupéfait, l'immense beauté de la voûte céleste. Avouons qu'il l'a bien mérité. Et, ô surprise : le Ciel est rigidement lié à la direction d'oscillation de son pendule. Ou serait-ce l'inverse ? Le pendule avait le choix, ou de suivre la Terre, ou de suivre les étoiles. Il a choisi les étoiles [1]. Cela, nulle géométrie ne peut le démontrer, c'est un choix *physique*. À partir de là, le reste – les trajectoires sur la Terre, la loi du sinus, etc. – n'est plus que géométrie.

Le Pendule dans le Cosmos. L'apport du pendule de Foucault est donc important, en tant que preuve interne, même si tout le monde, en 1851, est bien persuadé de la supériorité et de la véracité du point de vue de Copernic [2]. Bien persuadé, mais pas toujours avec de bonnes raisons : il n'est en effet pas facile de se débarrasser de « l'espace absolu » (voir le livre, très complet sur le sujet, de Jacques Gapaillard [8]).

Sur cette question, pouvons-nous encore dire quelque chose ? Nous le pensons. Par rapport à quoi peut-on dire que le plan d'oscillation d'un pendule de Foucault placé au pôle demeure fixe ? Réponse usuelle : par rapport aux étoiles lointaines de la galaxie, qui définissent un « bon » référentiel d'inertie, et cela suffit amplement à nos besoins. Mais « bon », même « très bon » ne signifie pas parfait. Aux grandes échelles de temps, les étoiles lointaines de notre galaxie effectuent une rotation d'ensemble, à une vitesse dépendant de leur éloignement du centre de la galaxie, par exemple le Soleil tourne en un peu plus de 200 millions d'années autour du centre galactique. Donc ce paysage se déforme au cours du temps. Alors, strictement, par rapport à quoi le plan de notre pendule devrait-il rester fixe ? Réponse : par rapport à un référentiel constitué de galaxies choisies parmi les plus lointaines. Bien. Mais à des échelles de temps encore plus grandes, ce paysage lointain se déforme lui aussi. Nous ne faisons que repousser le problème à l'infini ! Alors diable, par rapport à quoi ce plan est-il fixe, si tant est qu'il soit fixe par rapport à quelque chose ? La vraie question qui est derrière est celle de l'origine de l'inertie, un problème redoutable, et qui demeure un problème [3]. On voit où conduit notre ridicule petit pendule. Le maximum que nous pouvons dire est donc que le plan d'oscillation reste fixe par rapport aux étoiles lointaines, ou aux galaxies lointaines, *pour une durée limitée dans le temps*, et qui dépend de la précision recherchée. Voilà pour le temps.

La Relativité générale apporte une précision supplémentaire [4]. Non seulement la gravitation s'explique par une déformation de l'espace-temps au voisinage des masses, mais

1. Variante : les étoiles avaient le choix, ou de suivre le pendule, ou de suivre la Terre. Elles ont choisi le pendule.

2. Une remarque au sujet de « l'affaire Galilée » (admonestation de 1615 et procès de 1632) : seule la possession de la Dynamique de Newton, nous l'avons vu, permet d'établir définitivement une dissymétrie entre les deux points de vue. Mais Newton (1643-1727) n'est pas encore né en 1632 ! Les Coperniciens et Galilée ont eu la juste intuition, celle qui permettra l'avancée des connaissances. Mais ils ne possèdent pas, à l'époque, les moyens techniques, « mathématiques » (au sens de l'époque), permettant d'apporter une preuve logique d'une double rotation « absolue » de la Terre. Si le procès de Galilée avait été un procès scientifique – si tant est que ce terme ait un sens – les protagonistes n'auraient pu que temporairement se renvoyer la balle. Mais c'était un procès politique, et d'importance « planétaire » : le pouvoir sur les intellectuels allait-il échapper à l'Église ? La célèbre lettre du cardinal Bellarmin au père Foscarini (1615) en est une excellente illustration : un modèle de diplomatie, d'intelligence (oui) et pour finir d'autorité et de dogmatisme. Voir cette lettre en Annexe D, avec notre commentaire.

3. Même si la découverte du boson de Higgs a fait progresser le sujet, on est loin d'une compréhension complète de la masse.

4. Voir à ce sujet la conclusion du chapitre 10 du livre de W. Tobin [3].

de plus la rotation de la Terre entraine une rotation locale de l'espace-temps : un objet soumis à aucune interaction ne conserve pas sa direction par rapport aux étoiles, il est légèrement dévié (très très peu, bien entendu). C'est l'effet Lense-Thirring, un effet extrêmement faible, mais qui a été confirmé, avec le bon ordre de grandeur, par le satellite Gravity-Probe B en 2011, et d'autres mesures, plus précises, sont attendues. Un référentiel par rapport auquel le plan d'oscillation d'un pendule de Foucault placé au pôle serait fixe ne pourrait donc, en toute rigueur, qu'être également *local dans l'espace*.

Vu de la Terre, le rayonnement du fond cosmologique à 2,7 K apparaît « polarisé » ; c'est une conséquence, par effet Doppler-Fizeau, du mouvement de la Terre et du groupe local de galaxies par par rapport aux galaxies les plus lointaines [5]. Il est dit parfois que la direction de ce « dipôle » définirait une direction privilégiée permettant de construire un référentiel qui donnerait un caractère « absolu » aux rotations [6]. Outre qu'il est déterminé, en l'état actuel, avec une faible précision, un tel référentiel lié au mouvement de la Terre demeure local dans l'espace et local dans le temps. Même la carte – aujourd'hui bien établie – des irrégularités du fond diffus ne constitue pas un référentiel immuable pour un observateur terrestre. Sur ces questions, on pourra lire en complément ci-dessous une réponse de l'astrophysicien Alain Riazuelo illustrant bien la complexité du sujet.

Local dans le temps, et local dans l'espace : nous voilà donc revenus sur Terre, et à des choses raisonnables ! Ceci est conforme à la définition d'un référentiel d'inertie donnée par Taylor et Wheeler [9] :

> « On dit qu'un système de référence est inertiel dans une certaine région de l'espace et du temps si, dans toute cette région de l'espace-temps et *pour un degré de précision donné*, toute particule initialement au repos reste au repos et que toute particule initialement en mouvement poursuive son mouvement sans changement de vitesse ni de direction. D'après cette définition, les systèmes de référence inertiels sont toujours *locaux*, c'est à dire seulement inertiels dans des régions limitées de l'espace-temps. »

Tout est dit : rapporté à un tel référentiel, le plan d'oscillation du pendule de Foucault placé au pôle demeure fixe au cours du temps, et pour toute latitude fixée, sa direction d'oscillation demeure fixe au sens du *transport parallèle*. Mais, au risque de nous répéter, soulignons les points essentiels :

— *pour un degré de précision donné* ;
— et *dans des régions limitées de l'espace-temps.*

Notre conclusion sera donc que l'étude du pendule de Foucault conduit à de riches réflexions touchant aux lois fondamentales de la nature. Mais après tout, n'en serait-il pas de même à partir de l'étude serrée de n'importe quel objet de science ?

---

5. « polarisé », au sens de « orienté » : fréquence plus élevée vers l'avant du mouvement, moins élevée vers l'arrière, ce qu'on traduit en fausses couleurs par du bleu vers l'avant et du rouge vers l'arrière.

6. En effet, des spécialistes de la Relativité générale tendent à considérer les rotations par rapport à ce référentiel comme « absolues ». Précisons que ce référentiel n'est, en droit, ni plus ni moins « absolu » que pouvait l'être le référentiel stellaire à l'époque de Newton. Cela ne recréée pas son « espace absolu, sans relation aux choses externes [qui] demeure toujours similaire et immobile ».

Complément

Une discussion avec l'astrophysicien Alain Riazuelo[7].

de : Alain Riazuelo
à : Pierre Lauginie
Le 15/11/2019
(en réponse aux questions de P.L. concernant le choix d'un système de référence par rapport auquel le plan d'oscillation d'un pendule de Foucault, placé au pôle terrestre, serait censé demeurer fixe.)

Cher Pierre,

Le pendule de Foucault est toujours source de réflexion sur l'origine de l'inertie, et je ne sais pas à quel point cela représente quelque chose de « trivial » ou de « profond ».

Tout d'abord, on ne peut pas prendre un ensemble de trois étoiles pour faire un repère. Chaque étoile à un mouvement propre, et le référentiel déterminé par trois étoiles ne sera pas, sur le « long » terme, le même qu'avec un ensemble de trois autres étoiles : l'un tournera par rapport à l'autre, fatalement. Ici, j'ai mis long entre guillemets, car cela dépend en fait d'une combinaison entre la précision de pointage que l'on veut et la durée d'observation. Par contre, on peut sans doute définir de façon plus précise un référentiel statistique donné par la moyenne des positions des étoiles : la moyenne des positions stellaire pointe (avec un peu de chance) vers le centre galactique, et l'asymétrie de la distribution (puisque c'est un disque) permet de définir une longitude galactique. Mais là encore, ça n'est pas parfait : le Soleil tourne autour de la Galaxie à raison d'un tour en 200 millions d'années, soit, à la louche, 1 degré tous les 500 000 ans, ou bien une seconde d'arc en 150 ans ; ou bien une milliseconde d'arc en deux mois. Ça n'est donc pas un repère parfaitement inertiel comparé à la position de galaxies plus lointaines. À l'heure actuelle, on est à la limite de pouvoir mesurer le mouvement propre de nos deux voisines M31 et M33, mais pour des distances 10 à 100 fois plus grandes, cela finit par ne pas marcher.

Il me semble que les systèmes de références se font avec des sources qui sont :
(i) le plus ponctuelles possibles,
(ii) les plus éloignées possibles,
(iii) et localisables avec le plus de précision.
Les quasars dans le domaine radio sont ceux qui satisfont le mieux à cette définition, modulo diverse hypothèses que je connais mal. Parmi les problématiques liées à ces systèmes de références, il y a le fait que nous ne voyons pas la « vraie » sphère céleste, mais une version déformée de celle-ci du fait

7. Aujourd'hui chercheur CNRS, Institut d'Astrophysique de Paris. Alain Riazuelo, alors « moniteur d'enseignement supérieur » pendant son doctorat, avait participé à *La théorie au bout des doigts* dans l'option de seconde année à Orsay.

de la déviation de la lumière, et celle-ci est tout sauf négligeable. Quand on regarde vers la perpendiculaire au plan de l'écliptique (à 90° du Soleil, donc), on voit un rayon dévié de 8 millisecondes d'arc (le fameux $4GM/Rc^2$ de la relativité générale en prenant R comme la distance Terre-Soleil). Le tout est également déformé par le mouvement des planètes, et même le fait qu'elles ne sont pas parfaitement sphériques : la distorsion causée par Jupiter n'est pas exactement à symétrie de révolution ! Donc définir un système de référence est compliqué, mais plus les sources sont loin, moins leur mouvement intrinsèque est une source de nuisance. Mais ce n'est pas le seule, l'effet Lense-Thirring en étant une autre, plus tous les effets locaux de relativité générale (déviation de la lumière, cf. plus haut).

On peut peut-être utiliser le dipôle du fond diffus comme axe pour définir un système de coordonnées, mais en pratique c'est très peu précis. Il me semble que la précision de la direction du dipôle est de l'ordre du degré, contre quelques dizaines de microsecondes avec les quasars. Par ailleurs, il n'y a rien qui assure que le dipôle du fond diffus est uniquement local : il peut avoir une contribution cosmologique, liée au fait que la sphère d'où est issu ce dipôle (et que de nous jours fait dans les 100 milliards d'al de diamètre) peut se trouver au sein d'une région où règne un gradient de densité. Un écart de densité entre un point de la sphère et le point opposé va participer au dipôle sans qu'il soit le moins du monde d'origine locale, c'est-à-dire la combinaison du mouvement de la Terre, du Soleil, de notre Galaxie, du Groupe local, etc.

Par ailleurs, la carte du fond diffus n'est pas figée dans le temps. Elle sonde d'une façon tomographique des sphères concentriques centrées sur nous. Si on néglige l'expansion et que l'on suppose que l'Univers a 13,8 milliards d'années, on voit aujourd'hui le fond diffus émis par une sphère de 13,8 milliards d'al de diamètre, mais il y a 100 millions d'années, on voyait celui d'une autre sphère, de 13,7 milliards d'al de diamètre, etc, et le dipôle cosmologique n'a aucune raison d'être nul pour l'une ou pour l'autre, ni, quand il n'est pas nul, de pointer dans la même direction. Le dipôle est donc inutilisable en principe (ce n'est pas une bonne définition), et encore moins en pratique (on ne sait pas déterminer sa direction avec précision).

Indépendamment de tout cela, il n'y a aucune garantie que l'Univers est parfaitement homogène et isotrope : l'expansion pourrait en principe se faire suivant des taux différents dans des axes différents, etc, et encore cela n'est qu'une complication très basique par rapport à tout ce que l'on peut imaginer. Donc entre le calcul minkowskien (où l'inertie est définie rigoureusement) et la vraie structure de notre Univers, rien ne garantit que toutes ces discussions restent valables à grande échelle spatio-temporelle.

Donc pour revenir à ce que l'on peut dire, et sans entrer dans les détails, on peut présenter les choses ainsi :

* C'est un fait d'observation que l'Univers est un milieu statistiquement homogène et isotrope en expansion

* Au flot d'expansion se superposent des mouvements propres, typiquement de quelques centaines de km/s

* Si on suppose l'homogénéité, alors les mouvements propres angulaires des objets décroissent avec la distance, donc un jeu d'objets lointains permet de définir le « référentiel le moins mouvant possible ».

* Mais cela est difficile, et il faut bien avoir en tête que définir un référentiel ne sert à rien si on ne se donne pas de moyen de se repérer dans un référentiel. C'est le problème de la métrologie : on peut définir une unité (le kilogramme) d'une façon non ambiguë (anciennement, la masse du prototype), mais cela n'assure pas qu'on peut « réaliser » cette unité (= dupliquer le kilogramme pour faire des mesures). Donc un référentiel céleste n'est pas juste donné par les coordonnées de trois quasars, mais par un ensemble de quelques centaines de sources, dont les distances les unes par rapport aux autres sont déterminées au mieux.

* Dans ce contexte, et avec les limites (qu'on espère connues !) du système de référence, la Relativité Générale (modulo les hypothèses du point 1) indique que loin de toute source de perturbation, le pendule de Foucault à la surface d'un corps homogène autogravitant va avoir un plan d'oscillation fixe.

* Si on considère les perturbations locales (effet Lense-Thirring par ex., plus distorsions de la sphère céleste), alors vérifier explicitement cette assertion ne peut se faire sans y rajouter un modèle de comment l'environnement local (au moins le Système solaire) altère ce que tu définis à la fois comme système de référence (déviation de la lumière, réfraction radio) et comme « plan fixe ».

Voilà ce qui me vient en tête en te lisant. Du coup, je ne suis pas certain d'avoir été très court, mais le résumé à la fin offre peut-être un bon compromis.

Amitiés,
Alain

Annexe A

Trajectoires pour k quelconque, entier ou non

Un étrange comportement pour k impair ? Rappel : k est le nombre d'oscillations du pendule par tour de Terre. Par exemple, pour $k = 10$, il y a, par tour de Terre, 20 lobes ou 20 pointes (selon C.I.), soit 2 par oscillation. On s'attend à en trouver 22 pour $k = 11$. Or on n'en trouve que 11 ! (cf. fig.A.1). C'est un phénomène général pour k impair et pour le comprendre, il faut examiner les cas intermédiaires entre deux entiers successifs.

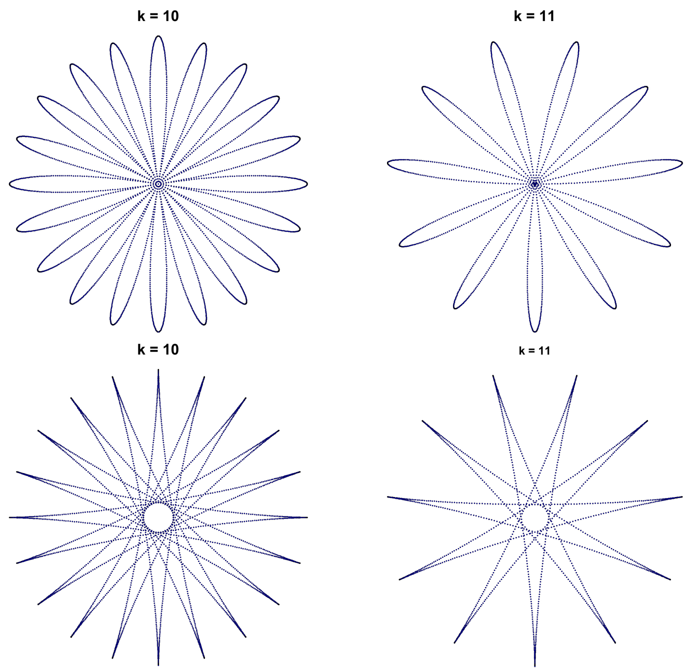


FIGURE A.1 – Trajectoires dans le référentiel terrestre pour $k = 10$ et $k = 11$ pour les deux types de conditions initiales : *en-haut* : type « Copernic » ; *en-bas* : type « Terre ».

Examinons ce qui se passe, par exemple pour k variant de 4 à 5 par étapes comme indiqué sur la figure A.2. Pour $k = 4$, il y a 8 lobes, soit 2 par oscillation : partant du point 1, on va en $1'$ (demi-oscillation) puis en 2 (début de la suivante), etc. Or, la demi-oscillation $3'$ tombe entre 1 et 2, exactement au milieu. Pour k variant de 4 à 5 par étapes, $3'$ se rapproche progressivement de 1, $4'$ se rapproche de 2, etc., et pour $k = 5$ les lobes prime et non-prime sont superposés : il y a dégénérescence et la courbe est parcourue deux fois par tour de Terre. De même pour tout k impair.

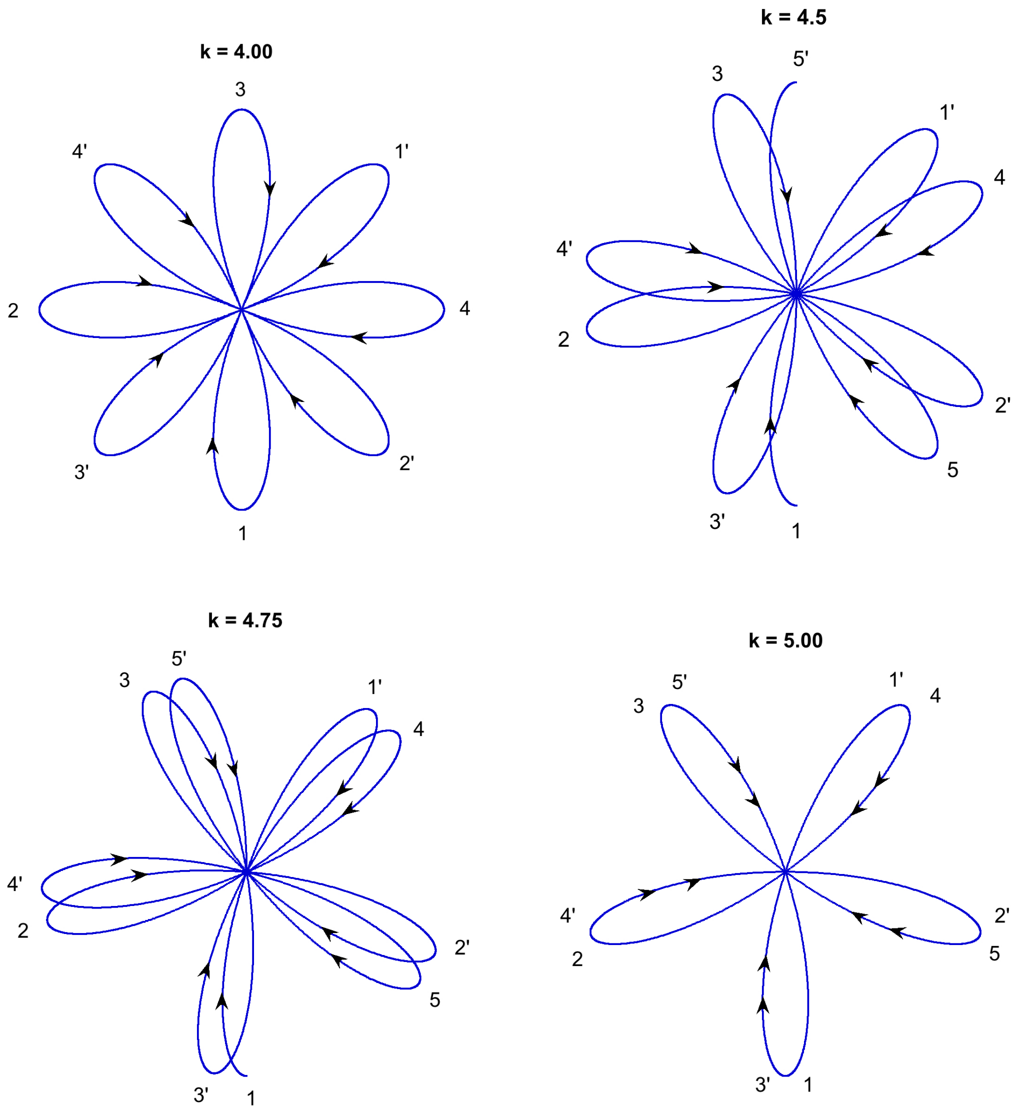


FIGURE A.2 – Conditions initiales « Copernic ». Trajectoires dans le référentiel terrestre pour k variant d'un nombre pair ($k = 4$; 8 lobes) à un impair ($k = 5$; 5 lobes parcourus 2 fois par tour de Terre).

Naturellement, il en sera de même pour les conditions initiales de type « Terre » comme le montre la figure A.3

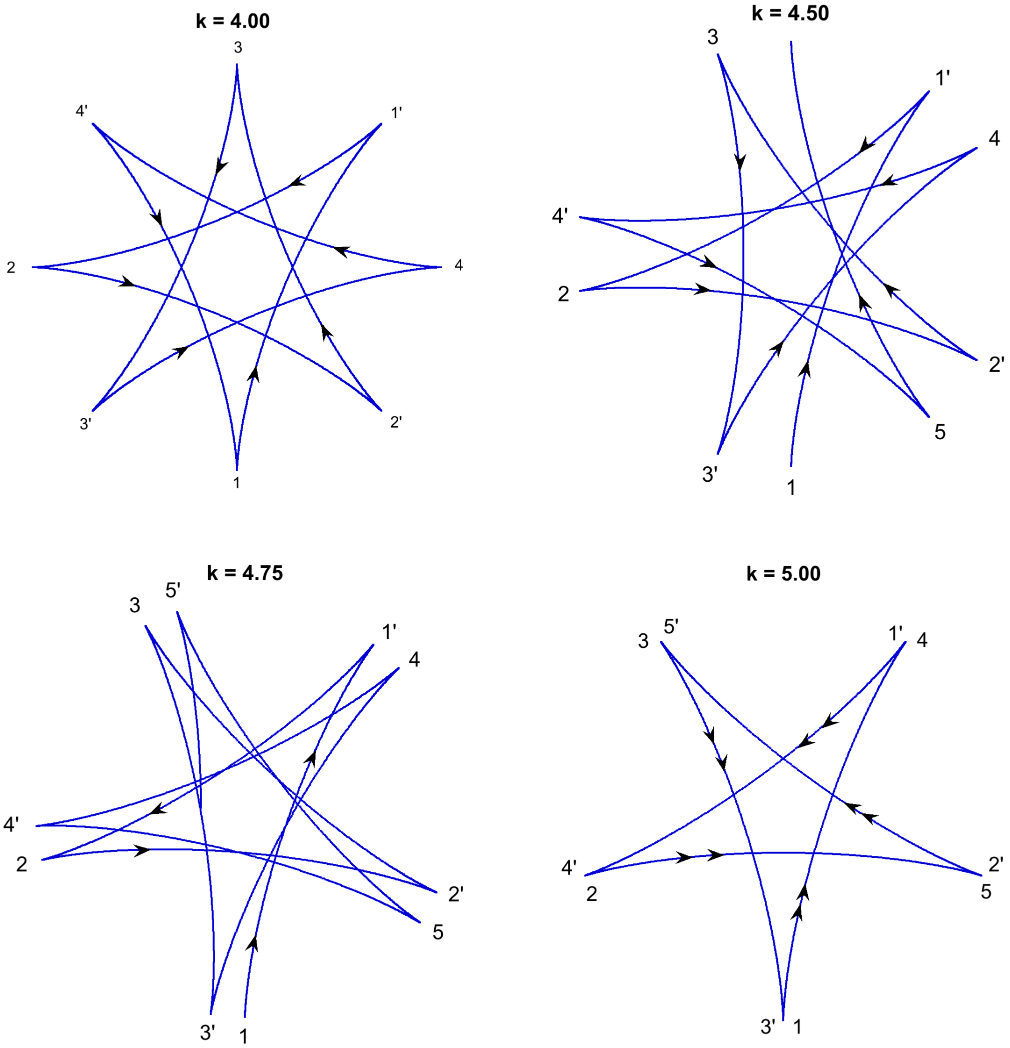


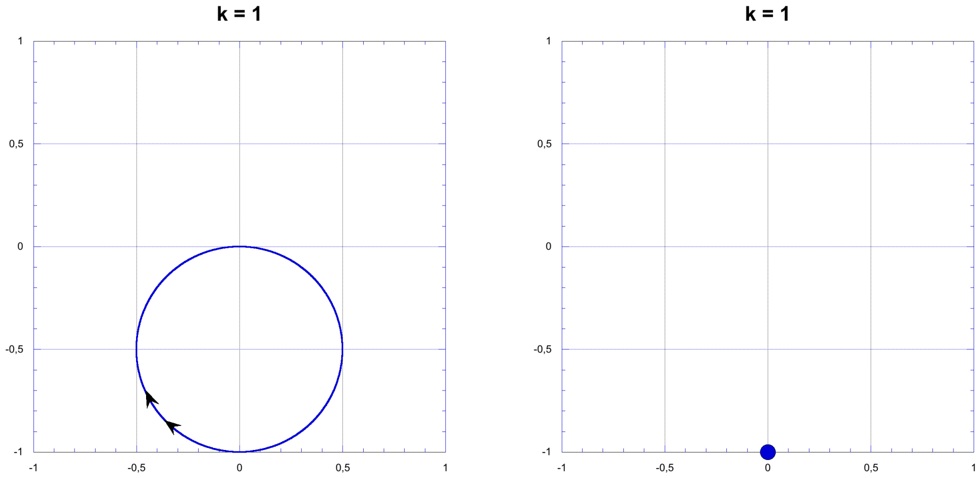
FIGURE A.3 – Conditions initiales « Terre ». Trajectoires dans le référentiel terrestre pour k variant d'un nombre pair ($k = 4$; 8 pointes) à un impair ($k = 5$; 5 pointes parcourues 2 fois par tour de Terre).

D'une façon générale, pour k rationnel, soit $k = p/q$ (p, q premiers entre eux), les trajectoires, représentée sur les figures A.2 et A.3 pour un tour de Terre, se referment au bout de q tours de Terre. Pour k irrationnel, la totalité du plan est noircie progressivement.

Cas particulier $k = 1$ où les périodes du pendule et de la « Terre » sont égales.
Le cas $k = 1$ n'est pas réaliste (un tour de Terre par période du pendule, alors que

dans la réalité il y en a des milliers !). Cependant il est intéressant – au moins d'un point de vue pédagogique – en ce qui concerne les changements de référentiel car le résultat peut surprendre.

— *a*) *conditions initiales de type « Copernic »* (fig. A.4, *a*.) : lancement sans vitesse initiale par rapport au référentiel de Copernic, pour une amplitude égale à 1. La boule passe par l'origine et décrit, dans le référentiel terrestre, un cercle passant par l'origine, de centre (1/2, 0) et de rayon 1/2, parcouru deux fois par tour de Terre. Et pourtant le pendule décrit, dans le référentiel de Copernic, des oscillations d'amplitude égale à 1, soit 2 d'un extremum à l'autre ! Si vous avez du mal à y croire, tracez sur un papier les axes comme sur la figure 1.1. La boule décrit sinusoïdalement le segment [1,-1] de l'axe OX ; faites tourner les axes Oxy par fractions successives de $\pi/4$, soit par huitièmes de période, et reportez à chaque fois la position de la boule relativement à ces axes. Vous ne serez plus surpris !



a) *b)*

FIGURE A.4 – Trajectoires dans le référentiel « terrestre » pour $k = 1$: *a*) Conditions initiales de type « Copernic » ; *b*) Conditions initiales de type « Terre ». L'amplitude des oscillations a été prise égale à 1.

— *b*) *conditions initiales de type « Terre »* : lancement sans vitesse initiale par rapport au référentiel terrestre (fig. A.4, *b*.). La trajectoire de la boule dans le référentiel terrestre est réduite à un point (le « gros » point en bas de la figure). *La boule est immobile dans le référentiel terrestre*. Surprenant ? Pas du tout. Cela veut dire que dans le référentiel de Copernic, la boule décrit le cercle centré à l'origine et de rayon 1 : nous avons, dans ce référentiel, tout simplement un pendule conique qui tourne avec la même période que la Terre.

Remarque : la période du pendule conique diffère sensiblement, en réalité, de la période des oscillations rectilignes. Mais ceci est dû à l'anharmonicité du pendule, dont nous ne tenons pas compte ici (approximation harmonique).

Annexe B

Le rôle de la force centrifuge, du pôle à l'équateur.

Nous nous intéressons à la composante horizontale de la force centrifuge, seule active pour la déviation de la direction d'oscillation du pendule. Une présentation usuelle du pendule de Foucault consiste à ne pas tenir compte de la force centrifuge (effectivement très faible dans le cas de la Terre réelle). Nous l'avons vu, cela complique inutilement la résolution du problème au pôle, au lieu de la simplifier. On peut se demander pourquoi il faudrait la négliger hors du pôle, alors qu'elle rend les choses si simples au pôle. Il nous faut donc examiner ce qui se passe à l'équateur, après quoi, nous saurons tout.

Au pôle – La force centrifuge $m\,\Omega^2\,\overrightarrow{OM}$ est horizontale, radiale, dirigée vers l'extérieur. Comme nous l'avons vu (équations 1.15, 1.20 et 1.21), sa prise en compte conduit de la manière la plus simple à la solution de l'équation du mouvement sans aucune approximation, c'est à dire même pour une Terre tournant rapidement. C'est un effet différentiel, très faible dans le cas d'une Terre réelle, mais important pour la compréhension du phénomène.

À l'équateur – Strictement à l'équateur, la force centrifuge est verticale et donc n'influence pas la direction d'oscillation. Cependant, si nous lançons l'oscillation dans la direction du méridien (nord-sud), la boule quitte le plan équatorial et passe alternativement de l'hémisphère nord à l'hémisphère sud : la force centrifuge n'est alors plus exactement verticale au cours du mouvement et sa composante horizontale intervient dans l'équation du mouvement. Or, cette composante, qui est le pendant de ce qui se passe au pôle, est de même intensité que celle examinée au pôle, mais changée de signe ! Dans un souci de cohérence de l'étude, nous devons donc en tenir compte [1]. En revanche, pour un lancement parallèle à l'équateur (est-ouest), la force centrifuge n'intervient plus du tout car le mouvement reste dans le plan équatorial. Il faut donc considérer deux cas :

1. Nous avons toujours été choqués par les exposés usuels qui négligent la force cenrifuge hors du pôle alors qu'il est au contraire si avantageux d'en tenir compte au pôle. Il y avait là un manque de cohérence, pour le moins.

— *pour une oscillation à l'équateur le long du méridien (nord-sud)* : lorsque la boule est éloignée en latitude d'un quantité infinitésimale $d\lambda$ vers le nord, l'accélération centrifuge, de valeur $\Omega^2 R$ et qui est dans le plan du méridien, fait une angle $d\lambda$ avec la verticale du lieu ; sa projection horizontale, dirigée vers le sud, vaut donc $-\Omega^2 R d\lambda$; or, $R d\lambda$ n'est autre que la longueur OM sur le méridien. La composante horizontale de l'accélération centrifuge est donc $-\Omega^2\,\overrightarrow{OM}$ c'est à dire : la composante horizontale centrifuge est une force de rappel proportionnelle à l'élongation, et les choses se passent symétriquement lorsque la boule passe au sud. Comparez avec le cas du pôle : c'est la même intensité, mais le sens est inversé ! Force « d'anti-rappel » au pôle, force de rappel à l'équateur, de même intensité, toutes deux proportionnelles à l'élongation. On pressent que cette composante horizontale doit s'annuler quelque part entre le pôle et l'équateur.
Il s'ensuit que l'équation du mouvement en notation complexe z, pour un mouvement selon le méridien est :

$$\ddot{z} \quad + \quad (\omega^2 + \Omega^2)\, z = 0$$

(en effet, il n'y a pas de terme de Coriolis en $\dot{z}$ car l'accélération de Coriolis est verticale ; noter le changement de signe du terme centrifuge par rapport à l'équation 1.15). Le mouvement est harmonique selon le méridien, avec la pulsation :

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 + \Omega^2}$$

À ce niveau, l'oscillation reste dans le plan du méridien : le pendule ne pivote pas.

— *pour une oscillation le long de l'équateur (est-ouest)* : cette fois, la composante horizontale de l'accélération centrifuge est strictement nulle, celle de l'accélération de Coriolis également, l'équation du mouvement en notation complexe z, pour un mouvement selon l'équateur est donc :

$$\ddot{z} \quad + \quad \omega^2\, z = 0$$

Le mouvement est harmonique selon l'équateur, avec la pulsation propre du pendule ω. Le pendule ne pivote toujours pas.

— *pour une oscillation à l'équateur dans une direction quelconque* : l'oscillation se décompose en une composante nord-sud et une composante est-ouest ; aucune des deux ne pivotant, nous pourrions dire que la direction d'oscillation ne pivote pas. Cela résulte uniquement de l'absence de terme de Coriolis en projection horizontale. Cependant, les choses se corsent un peu : nous venons de voir que ces deux composantes n'ont pas exactement la même fréquence, ω' et ω respectivement. Il en résulte une précession lente de la direction d'oscillation à la vitesse angulaire :

$$\delta\omega \;=\; \omega' - \omega \;\sim\; \frac{\Omega}{2k} \quad (k = \omega/\Omega)$$

(pensez à des figures de Lissajous lorsque ω' est voisin de ω.)

Sachant que k vaut plusieurs milliers dans le cas de la Terre réelle, on voit qu'il faudrait des milliers de jours pour détecter cette précession ! Mais nous faisons ici une étude valable pout toute vitesse de rotation.

On peut dire les choses autrement : supposons, par exemple une oscillation sud-ouest/nord-est. Quant la boule est au NE, elle subit une force de rappel, non pas vers le centre d'oscillation, mais vers l'équateur (car seule la composante sud-nord subit cette force) ; quand elle est en position SO, elle subit de même une force qui tend à la rabattre vers l'équateur. En conséquence, la direction d'oscillation va pivoter lentement vers l'équateur, c'est l'origine physique de la précession évoquée plus haut. Une fois l'oscillation amenée sur l'équateur, il ne se passe plus rien. Ainsi, sur le long terme, et pour une vitesse de rotation quelconque (donc éventuellement grande) de la Terre, seule l'oscillation dans la direction de l'équateur est stable. En particulier, l'oscillation nord-sud est en réalité instable, mais cette instabilité est trop subtile pour être détectable sur la Terre réelle. S'il faut des milliers de jours pour s'en rendre compte, cette précession parasite est évidemment négligeable et on peut dire que la direction d'oscillation du pendule ne pivote pas.

Remarque 1 : les effets de force centrifuge envisagés ci-dessus sont des effets différentiels : au pôle comme à l'équateur, ce sont des variations de la force centrifuge au cours du mouvement du pendule. Ne pas les confondre avec le terme centrifuge *statique* étudié par ailleurs et conduisant à une légère déviation de la verticale.

Remarque 2 : nous n'avons envisagé ici que l'effet de la force centrifuge. Dans le cas d'une Terre tournant « vite » il faudrait en toute rigueur tenir compte aussi du fait que la force de Coriolis n'est plus strictement verticale lorsque l'oscillation quitte le plan équatorial. Cependant, l'effet serait moindre parce que lors d'une oscillation, cette force agit en sens inverse lors de la demi-oscillation « nord » et lors de la demi-oscillation « sud ». Encore une fois, rappelons que nous avons étudié ici le rôle de la force centrifuge à l'équateur pour la seule raison que, au pôle, sa prise en compte conduisait directement à la solution, mathématiquement très simple et valable pour *toute* vitesse de rotation ; la simple curiosité poussait alors à comprendre quel pouvait être son rôle à l'équateur. Ces considérations n'auraient de sens que pour un globe « tournant vite », problème que nous n'envisageons pas plus avant ici, notre sujet étant le pendule de Foucault réel.

À une latitude λ quelconque – À une latitude quelconque, le mouvement du pendule dans le référentiel terrestre s'analyse, nous l'avons vu, en un mouvement au pôle d'une Terre qui tournerait à la vitesse $\Omega \sin \lambda$; plus un mouvement à l'équateur d'une Terre qui tournerait à la vitesse $\Omega \cos \lambda$. Il nous suffit donc d'additionner les deux termes centrifuges trouvés précédemment, au pôle et à l'équateur respectivement, en tenant compte des sinus et cosinus : pour la composante du mouvement parallèle au méridien, nous devons ajouter un terme en $\Omega^2 \cos^2 \lambda$, analogue du terme en Ω^2 obtenu à l'équateur. La discussion est alors similaire à celle faite à l'équateur. Ainsi :

pour une oscillation dans une direction quelconque, nous pouvons poser : $z = x + iy$, avec l'axe des « x » selon le parallèle et l'axe des « y » selon le méridien. Nous avons alors une équation du mouvement pour chaque composante respectivement, soit :

$$\ddot{x} \quad + \quad 2i\,(\Omega \sin\lambda)\,\dot{x} \quad + \quad (\omega^2 - \Omega^2 \sin^2\lambda)\,x = 0$$

$$\ddot{y} \quad + \quad 2i\,(\Omega \sin\lambda)\,\dot{y} \quad + \quad [\omega^2 + \Omega^2(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda)]\,y = 0$$

Les deux composantes du mouvement n'ayant pas strictement la même fréquence, il s'ensuivra, comme à l'équateur, une tendance du pendule à s'aligner lentement suivant la direction du parallèle. Le temps caractéristique de ce mouvement parasite étant de l'ordre de milliers de jours, ces distinctions sont négligeables sur la Terre réelle.

Remarque : à la latitude de 45°, le terme différentiel de la composante sud-nord de l'accélération centrifuge est donc nul, le terme statique étant alors maximal (cf. déviation de la verticale) ; de part et d'autre de cette latitude, il change de signe. Cela répond à une interrogation émise dans le paragraphe précédent. Au pôle, les deux composantes du mouvement ont strictement la même pulsation ω.

Finalement, il est donc correct de dire que, dans l'approximation d'une Terre tournant très lentement par rapport à la période d'oscillation du pendule, le mouvement du pendule de Foucault est correctement décrit par l'équation (3.1) et que sa rotation s'effectue à la vitesse $\Omega \sin\lambda$, comme nous l'avons fait dans le texte principal. Toutefois, il y a une minuscule approximation : nous nous doutions bien qu'il y en avait une quelque part, mais on avouera qu'il nous a fallu la chercher loin. En fait, cette hypothèse de rotation lente de la Terre est l'expression particulière d'une approximation très générale : l'approximation dite *adiabatique*, que l'on retrouve en Mécanique classique comme en Mécanique quantique : le système (ici : le pendule) est supposé soumis à des paramètres extérieurs (ici : la rotation de la Terre, induisant une rotation de la verticale locale) variant *lentement* par rapport à ses propres temps caractéristiques (ici : sa période).

Annexe C

Pendule de Foucault et transport parallèle

Il s'agit du comportement du pendule de Foucault en un lieu de latitude quelconque. La rotation en sens horaire de sa direction d'oscillation à vitesse $\Omega.\sin\lambda$ est supposée acquise et on ne revient pas là-dessus (Ω étant la vitesse angulaire de rotation diurne de la Terre et λ la latitude). Il s'agit d'en avoir une illustration géométrique. La préoccupation fondamentale est (depuis 1851 !) : peut-on dire, comme au pôle, que le plan d'oscillation, ou tout au moins la direction d'oscillation, reste parallèle à quelque chose au cours de la rotation de la Terre ? Ce n'est pas évident car la direction d'oscillation ne reste constante, ni dans le repère local (défini par exemple par deux vecteurs unitaires du plan tangent orientés selon le parallèle et selon le méridien [1]), ni dans le référentiel des étoiles.

Nous avons vu que si on développe sur un plan le cône engendré par la tangente à un méridien au cours de la rotation diurne de la Terre, alors sur la figure développée la trace du plan d'oscillation du pendule garde une direction constante, parallèle à sa direction à l'instant initial. C'est la représentation due à Belfield-Lefèvre, un ami de Foucault et on pourrait s'en tenir là. C'est parfaitement correct, mais on voit mal comment cela se passe dans l'espace, il faut d'abord développer le cône. Foucault lui-même avait tenté une explication qui a paru alambiquée mais qui contient bien plus qu'un fond de vérité :

> « . . . les positions successives du plan d'oscillation sont déterminées par la condition de faire entre elles des angles minima. Autrement dit en langue vulgaire : lorsque la verticale sort du plan d'impulsion primitive, le plan d'oscillation la suit en restant aussi parallèle que possible. » (*Foucault, Recueil, lettre non publiée.*)

Nous allons le voir, Foucault, si peu mathématicien, fait preuve ici d'une intuition mathématique remarquable. En fait, la propriété du pendule de Foucault mise en évidence par le développement du cône n'est qu'un cas particulier d'une propriété générale en géométrie des surfaces (et plus généralement des variétés à nombre quelconque de dimensions) : *le transport parallèle.*

Oui, la direction d'oscillation du pendule subit un *transport parallèle* le long du parallèle du lieu au cours du mouvement de la Terre. Elle reste donc « parallèle à elle-même »,

1. e.g. le repère $\{\mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi\}$ des coordonnées sphériques où φ est la longitude et θ la colatitude

mais ce n'est ni au sens de l'espace euclidien environnant, ni par rapport au repère local ; c'est au sens de ce qu'on appelle « transport parallèle » en géométrie sur les surfaces et autres variétés.

Qu'est-ce que le transport parallèle ?

La notion demande un peu d'imagination – voire beaucoup – si on l'aborde à partir des textes pour mathématiciens professionnels, tout en n'étant pas dénuée d'une certaine poésie, comme souvent en mathématiques. Voir par exemple, à la fin de ce document, la liste de quelques sites glanés sur internet, l'abord est le plus souvent extrêmement général et par suite très abstrait. Cependant, on peut tirer de chacun quelques idées simples.

Nous allons essayer d'en donner une version géométrique sur la sphère. Faisons rouler un plan sur la sphère : le point de contact décrit sur la sphère une certaine courbe Γ. Inversement, étant donné une courbe Γ sur la sphère (suffisamment « régulière »), nous pouvons faire rouler un plan le long de Γ de façon qu'il reste en chacun des points de Γ tangent à la sphère (si Γ est un parallèle de la Terre, ce plan enveloppe le cône dont nous avons déjà parlé). Dans la suite, nous appellerons ce plan le « plan rouleur » [2].

Soit un vecteur $\overrightarrow{V}$ et déplaçons-le le long de Γ de façon qu'il reste tangent à la sphère, mais à part cela de manière arbitraire ; il peut varier en orientation tout au long. Pour chaque position, nous marquons la trace de $\overrightarrow{V}$ sur le plan qui roule le long de Γ. La trace de Γ sur le plan est la *développée* de Γ. Si, et seulement si, toutes les traces de $\overrightarrow{V}$ sur ce plan sont parallèles entre elles, on dit que le vecteur $\overrightarrow{V}$ a subi un *transport parallèle le long de* Γ.

Le pendule de Foucault se déplace selon un parallèle de la Terre lors de la rotation diurne ; la direction d'oscillation est représentée par notre vecteur $\overrightarrow{V}$ qui se déplace le long du parallèle ; nous avons démontré précédemment que, après mise à plat du cône engendré par le méridien origine, les traces du vecteur $\overrightarrow{V}$ sont parallèles entre elles. Développer le cône, c'est exactement se placer dans le plan tangent qui a roulé le long du parallèle. Conclusion :

la direction d'oscillation du pendule de Foucault pivote par rapport au repère local de façon à réaliser un transport parallèle le long du parallèle du lieu.

Nous disons là exactement la même chose qu'avec le développement du cône, mais nous la rattachons à un concept beaucoup plus général : le transport parallèle sur un surface riemannienne (dont la sphère).

Quelques propriétés du transport parallèle sur la sphère

Sur la sphère de rayon R plongée dans l'espace euclidien, la métrique euclidienne induit une métrique « naturelle » ou encore une *connexion*, sur la sphère. Par exemple

2. Les mathématiciens dénomment ce plan *le fibré tangent*. On peut le voir comme la superposition de calques tangents à la sphère en chaque point de la courbe, chacun portant la trace locale du vecteur transporté.

en coordonnées sphériques (θ, φ) c'est à dire (colatitude, longitude resp.), l'élément de distance sur la sphère est donné par :

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'imaginer la sphère plongée dans un espace euclidien. Les hypothétiques habitants de cette surface 2D peuvent ne rien connaître d'autre que leur monde 2D. Mais dès qu'ils se donnent *a priori* la métrique ci-dessus, ou toute autre métrique, ils se donnent un outil qu'on appelle *connexion* permettant de transporter et comparer des vecteurs en différents points de leur monde.

On appelle « géodésiques » les courbes de distance minimale entre deux points. Ce sont les « droites » de la surface. Sur la sphère, les géodésiques sont les grands cercles. Noter que le 5^e^ postulat d'Euclide est en défaut : comme sur toute surface riemannienne, par un point extérieur à une « droite » on ne peut mener *aucune* parallèle à cette « droite » (les grands cercles se rencontrent toujours). On a la propriété suivante :

Un vecteur transporté le long d'un grand cercle en faisant un angle constant avec ce grand cercle subit un transport parallèle. Les grands cercles sont des courbes dites autoparallèles.

La propriété est évidente : il suffit de penser qu'un plan tangent roulant le long d'un grand cercle enveloppe un cylindre. C'est le cas du pendule de Foucault à l'équateur.

Ce n'est plus vrai pour un vecteur se déplaçant le long d'un parallèle non équatorial : par exemple la tangente au méridien de Paris, perpendiculaire au parallèle local, ne subit pas un transport parallèle lors de la rotation diurne, bien que restant perpendiculaire au parallèle : cette direction, de même que le repère local, pivote dans le plan rouleur dans le sens antihoraire à vitesse $\Omega.\sin\lambda$ tout en décrivant un cône dans l'espace euclidien extérieur à la sphère. Le pendule de Foucault, en pivotant en sens inverse à même vitesse dans le repère local, réalise donc un transport parallèle le long du parallèle de Paris.

Voilà donc la réponse à la question qui nous a tant turlupinés : la direction d'oscillation du pendule de Foucault, en dehors du pôle ou de l'équateur, reste-t-elle parallèle à son orientation initiale ? La réponse est *oui, mais au sens du transport parallèle sur la sphère*. Ce faisant, elle n'est parallèle à sa direction initiale ni dans l'espace euclidien environnant, ni évidemment dans le repère local. Le « parallélisme » s'entend dans le plan rouleur.

En voici (fig. C.1) une claire confirmation extraite de la référence [C-3] :

Sur l'exemple de la figure C.1, nous voyons apparaître l'idée qui est à la base du transport parallèle : au cours du déplacement d'un vecteur, le repère local évolue le long du trajet (la *connexion* permet de s'en rendre compte) ; un transport « parallèle » revient à modifier l'orientation du vecteur transporté par rapport au repère local de manière à compenser la variation d'orientation de ce dernier ; et cela s'apprécie uniquement dans le plan rouleur, localement euclidien en chaque point du trajet.

Cela se relie aux notions générales de *dérivée covariante* et de *différentielle absolue* d'un champ de vecteurs : à la dérivation par rapport aux coordonnées locales, on ajoute un terme compensant la variation du repère local ; ce terme, linéaire par rapport aux dérivées locales du vecteur, introduit les symboles de Riemann-Christoffel qui sont donc à 3 indices ; le long d'un transport parallèle, la différentielle absolue d'un champ de vecteurs

Exemple

Considérons un paramétrage en sphérique de la sphère unité $(\theta, \phi) \to \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$. La dérivation $\frac{\partial}{\partial\theta}$ correspond au vecteur $e_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$ qui est unitaire, et la dérivation $\frac{\partial}{\partial\phi}$ correspond au vecteur $e_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas unitaire. Posons $\varepsilon_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$ le vecteur unitaire colinéaire à e_ϕ, et $\varepsilon_\theta = e_\theta$, de sorte que $(\varepsilon_\theta, \varepsilon_\phi)$ constitue une base orthonormée du plan tangent à la sphère au point considéré. On peut montrer que :

$\nabla_{e_\phi}\varepsilon_\theta = \cos(\theta)\varepsilon_\phi$ et $\nabla_{e_\phi}\varepsilon_\phi = -\cos(\theta)\varepsilon_\theta$

Cela signifie que, si on se déplace le long du parallèle θ de la sphère, la longitude ϕ étant variable, la base orthonormée $(\varepsilon_\theta, \varepsilon_\phi)$ tourne à la vitesse angulaire $\cos(\theta)$ par rapport à une base qui serait transportée parallèlement le long du parallèle. Réciproquement, un champ Y sera transporté parallèlement le long du parallèle s'il tourne à la vitesse angulaire $-\cos(\theta)$ par rapport à la base orthonormée $(\varepsilon_\theta, \varepsilon_\phi)$. Sur l'équateur, la rotation est nulle. Aux pôles, elle est maximale. C'est ce phénomène qui est observé dans l'expérience du pendule de Foucault, dont le plan d'oscillation se transporte parallèlement le long du parallèle où il est situé avec la rotation de la Terre.

FIGURE C.1 – (extrait de document internet) Transport parallèle et pendule de Foucault (la variable θ est ici la colatitude).

est nulle. Cela revient à dire que, dans l'espace, la variation du vecteur est minimale : c'est la traduction en mathématiques savantes de l'intuition de Foucault (citée au début de ce texte), effectivement géniale. Une propriété intéressante est la suivante :

Un triangle sphérique est constitué de 3 segments de « droites » c'est à dire de segments grands cercles. On vérifie que la somme des angles d'un tel triangle est supérieure à π : prendre par exemple 2 portions de méridiens concourant au pôle nord sous un angle α et la portion d'équateur qu'ils délimitent : la somme des angles est $(\pi + \alpha)$. Soit un vecteur $\overrightarrow{V}$ que l'on transporte parallèlement le long des côtés du triangle, donc en faisant un angle constant avec chaque côté ; et, au moment du changement de côté, on le transporte le long du nouveau côté en conservant la direction qu'il avait en l'abordant. Par exemple, partir d'un point de l'équateur en allant vers le pôle, le vecteur étant tangent au méridien ; du pôle suivre le nouveau méridien qui a tourné de α jusqu'à l'équateur, donc en faisant l'angle α avec ce nouveau méridien, et revenir au départ le long de l'équateur : à l'arrivée, le vecteur aura tourné de α, c'est à dire de l'excès sur π de la somme des angles du triangle. Le transport parallèle sur la sphère n'est pas conservatif : contrairement au cas euclidien, il dépend du chemin suivi.

Encore mieux : on montre que cet excès est égal à la quantité $(\textit{aire du triangle})/R^2$ qui définit la courbure totale contenue dans le triangle (courbure de Gauss). Il en résulte immédiatement que la courbure totale de la sphère est 4π ; que celle du cylindre est nulle, de même que celle du cône privé de son sommet (surfaces réglées) ; et que celle du cône muni de son sommet est entièrement concentrée en son sommet.

Et pour finir ces savantes considérations, retour sur Terre, en Chine : la célèbre statue montée sur un chariot muni d'une sorte de différentiel, et dont le bras tendu pointe constamment vers le sud quel que soit le trajet du chariot, a quelque chose à voir avec la transport parallèle (cf. ref. [C-4]). De la poésie, en effet !

Retour sur le modèle ferroviaire d'Alain Bernard (cf. section 3.3)

On considère une Terre *immobile* relativement aux étoiles. Notre équateur, de même que nos pôles, n'ont rien de particulier par rapport à tout autre grand cercle (chaque grand cercle définissant ses propres pôles). C'est juste un système de repérage parmi d'autres. On le choisit. Un pendule de Foucault est placé dans un train circulant sur cette Terre. Nous savons maintenant que sa direction d'oscillation doit subir un transport parallèle.

1. Le train roule le long de l'équateur terrestre (autoparallèle) : le pendule garde une direction constante par rapport à l'équateur, donc par rapport au repère local : il ne pivote pas.
2. Le train roule le long d'un grand cercle passant par Paris et tangent à Paris au parallèle, que nous dénommerons dans la suite « équateur local ». Puisque ce grand cercle est auto-parallèle, le pendule fait un angle constant avec lui : pas de rotation dans le repère local, il ne pivote pas.
3. Le train roule le long du parallèle de Paris : le trajet n'est plus auto-parallèle, le pendule pivote par rapport au repère local dont il compense exactement la rotation locale. Dans le « plan rouleur » qui suit le trajet, il garde une direction constante. En ce sens, il reste « parallèle à son orientation de départ ».
4. Pour cela, prenons un exemple (expérience de pensée bien sûr) : sur cette Terre *immobile*, au lieu d'un train, le pendule, supposé entretenu, est embarqué – pourquoi pas ? – par Costes et Bellonte le 21 novembre 1929 à bord de leur « Point d'interrogation » (fig. 12) pour un raid sans escale Le Bourget-Tsitsihar (ou Qiqihar, 47°N, 123°E, Mandchourie). En gros, nous l'assimilons à un raid *à latitude constante le long du parallèle de Paris* d'angle total 8h (car $8h = 120°$). Au départ, on suppose, par exemple, le pendule lancé suivant le méridien. Sachant que $\sin\lambda = 0,75$, le pendule à l'arrivée aura pivoté de 90° dans le sens horaire et oscillera dans la direction du parallèle, perpendiculaire au méridien local [3].

   Repartons alors de Tsitsihar vers le sud le long du méridien de Tsitsihar jusqu'à sa rencontre avec notre « équateur local » de Paris. Le long d'un méridien (autoparallèle) le pendule conserve l'angle qu'il fait au départ avec ce méridien et rejoint donc notre grand cercle en oscillant le long du nouveau parallèle.

   Reprenons maintenant au point de départ (Paris) : le pendule oscille suivant le méridien ; transportons-le (train ou avion) le long de notre « équateur local » jusqu'à

3. Nous avons supposé que l'avion suit une route à latitude constante, donc à cap constant Est, c'est à dire une *loxodromie*. Compte-tenu des conditions de navigation de l'époque, c'est effectivement le plus probable. Ce n'est pas la route la plus courte : cette dernière, dite *orthodromie*, est l'arc de grand cercle passant par Paris et Tsitsihar. Si l'avion suivait l'orthodromie (autoparallèle), sur une Terre immobile rappelons-le, le pendule conserverait tout au long du trajet l'angle qu'il fait au départ avec la route de l'avion : dans le repère lié à l'avion, il ne pivoterait pas. Si lancé au départ suivant le méridien de Paris, faisant un certain angle avec l'orthodromie (je vous laisse calculer cet angle !), il fait à l'arrivée le même angle avec l'orthodromie, et n'oscille donc pas selon le parallèle, contrairement au cas de la loxodromie. On retrouve le fait que le transport parallèle dépend du chemin suivi.

FIGURE C.2 – Le Bréguet 19 « Super Bidon » de Costes et Bellonte (1929), semi biplan, moteur Hispano Suiza 650 CV, vitesse max 250 km/h, masse en charge 6375 kg, plafond 6700 m, rayon d'action max 9000 km (oui, 9000 km !). Magnifique image pour susciter un désir d'aventure !

> sa rencontre avec le méridien de Tsitsihar. Durant ce transport (autoparallèle), le pendule conserve l'angle qu'il fait avec ce grand cercle ; il arrive donc en oscillant perpendiculairement au grand cercle, donc pas du tout selon le parallèle d'arrivée. Encore une fois : le transport parallèle dépend du chemin suivi.

Bien que non explicité (car s'adressant à un public non mathématicien), il est vraisemblable que c'est le concept de « transport parallèle » qui est à la base de la vidéo « ferrovière » d'Alain Bernard. En tous cas, nous savons maintenant à quoi nous en tenir. L'exemple du pendule de Foucault est manifestement cité dans les documents mathématiques professionnels comme le plus simple pour illustrer le transport parallèle sur des surfaces courbes, voir par exemple les réf. [C-3] et [C-12].

Et pour finir, *une question de principes* : au pôle, la fixité de la direction d'oscillation résulte, non d'une propriété géométrique, mais du caractère inertiel du référentiel stellaire, donc résulte d'un principe *a priori* de la Mécanique. On aimerait pouvoir faire de même hors du pôle et dire, également *a priori* :

> « en vertu des principes de la Mécanique, la direction du pendule de Foucault *doit* subir un transport parallèle le long du parallèle du lieu au cours de la rotation de la Terre ».

La loi du sinus s'en déduirait alors immédiatement. Il apparaît que cela est possible (voir par exemple la réf. [C-12]) dans les conditions dites « adiabatiques », impliquant une rotation de la Terre lente par rapport à la période du pendule. Cela est lié à l'expression de la relation fondamentale de la Dynamique pour un corps contraint de rester sur une surface courbe. Cela dépasse néanmoins le cadre du présent exposé.

Quelques références sur internet (liste non exhaustive)

Note : j'apprécie particulièrement la référence [C-2] pour sa formulation géométrique remontant aux sources (Levi-Civita). Le chapitre 1 du cours de Frédéric Faure (réf. [C-12]) utilise bille en tête le pendule de Foucault pour introduire de façon générale le transport parallèle sur des « fibrés » (voir en particulier « l'exercice 3 » p. 12 de ce cours).

C-1 Transport parallèle :
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Transport_parallele`

C-2 Transport parallèle (Levi-Civita) :
`images.math.cnrs.fr/Le-transport-parallele-fete-ses-100-ans.html`

C-3 Connexion affine, transport parallèle et pendule de Foucault :
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Connexion_affine`

C-4 Chariot chinois pointant vers le sud et transport parallèle :
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Chariot_pointant_le_sud`

C-3 Courbure d'une surface et transport parallèle :
`http://math.univ-bpclermont.fr/~manchon/courbure.html`

C-6 Holonomie et transport parallèle :
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Holonomie`

C-7 Dérivée covariante :
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Derivee_covariante`

C-8 Parallélisme :
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Parallelisme_(geometrie)`

C-9 Trigonométrie sphérique :
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Trigonometrie_spherique`

C-10 Géométries non euclidiennes :
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Geometrie_non_euclidienne`

C-11 Géométrie différentielle sur la sphère :
`http://www.geometrie-differentielle-par-le-calcul.com/files/GeometrieDifferentielleParLeCalcul/97-chap9-transport-parellele.pdf`

C-12 Cours Frédéric Faure (Univ. Joseph Fourier, Grenoble) :
`https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/geometrie_topologie_M2/index.html`
(cet URL ne donne accès qu'au résumé du cours. Le PDF complet m'a été communiqué par Christian Larcher du CLEA que je remercie à cette occasion).

Annexe D

La lettre du cardinal Bellarmin au père Foscarini (12 avril 1615)

En avril 1615, le cardinal Bellarmin, cardinal inquisiteur, jésuite et membre de la Congrégation du Saint-Office, répond à une lettre et un écrit du père Foscarini dans lesquels ce dernier présentait une argumentation en faveur des thèses de Galilée concernant le mouvement de la Terre et l'autonomie de la Philosophie naturelle : l'herméneutique biblique ne porterait que sur la foi et les mœurs. Cette lettre de Bellarmin précède de peu l'interdiction qui sera faite à Galilée d'enseigner l'héliocentrisme, et la mise à l'Index de l'œuvre de Copernic. Elle illustre le contexte de la discussion sur le mouvement de la Terre, vu par une autorité du Vatican. Nous la reproduisons pages suivantes dans la traduction de M.P. Lerner et F. Beretta, avec quelques commentaires ci-dessous (lire la lettre avant nos commentaires).

Cette lettre est un modèle de *diplomatie, d'intelligence* (oui), et pour finir *d'autorité et de dogmatisme.*

Un modèle de diplomatie : le texte se suffit à lui-même ! « je reconnais qu'ils sont tous deux pleins d'esprit et de science ». Et encore, la formule finale : « De Votre Révérende Paternité, comme un frère, ». Quel style ! Mais encore : le premier paragraphe est une mise en garde *politique* – sans prise de position sur le fond – contre les dangers d'un héliocentrisme affirmé « absolument » et non comme « hypothèse ». Il faut savoir que, au début du XVII^{e} siècle, et dans ce cadre *hypothétique*, le modèle copernicien est utilisé sans complexe et avec profit par les astronomes du Vatican autour de Clavius. Bellarmin : « . . . parler hypothétiquement, et non affirmativement, *comme j'ai toujours compris que Copernic l'a fait* ». On sait que la préface de la version imprimée du *De Revolutionibus* (1543) – réduisant les thèses de Copernic à l'état de simple *hypothèse mathématique* – a été en réalité rédigée par le théologien luthérien Osiander à l'insu de Copernic, et contre les positions clairement exprimées par celui-ci, notamment dans sa Lettre au Pape Paul III qui était destinée à être la véritable préface au *De Revolutionibus* (lettre publiée par son élève Rheticus en 1640). Bellarmin l'ignore-t-il ? ou feint-il de l'ignorer ?

Lettre du cardinal Robert Bellarmin à Paolo Antonio Foscarini
(12 avril 1615)

Mon très révérend Père,

J'ai lu volontiers la lettre italienne et l'écrit latin que Votre Paternité m'a envoyés. Je vous remercie de l'une et de l'autre, et je reconnais qu'ils sont tous deux pleins d'esprit et de science. Mais puisque vous me demandez mon avis, je vous répondrai très brièvement, parce que vous avez maintenant peu de temps pour lire, et moi peu de temps pour écrire.

Premièrement. Je dis qu'il me semble que Votre Paternité et le seigneur Galilée agiriez prudemment en vous contentant de parler hypothétiquement, et non de façon absolue, comme j'ai toujours cru que Copernic avait parlé. Car dire qu'en supposant que la terre se meut et que le soleil est immobile, on sauve toutes les apparences mieux qu'en posant les excentriques et les épicycles, est parfaitement dit et ne présente aucun danger: et cela suffit à l'astronome. Mais vouloir affirmer que le soleil se tient réellement au centre du monde avec seulement une révolution sur lui-même, sans faire sa course du levant au couchant, et que la terre se trouve dans le troisième ciel et tourne avec une très grande vitesse autour du soleil, est une chose qui fait courir le très grand danger non seulement d'irriter tous les philosophes et théologiens scolastiques, mais encore de nuire à la sainte foi en rendant fausses les saintes Écritures. Car si Votre Paternité a bien montré plusieurs façons d'exposer les saintes Écritures, elle ne les a pas appliquées dans le détail, et sans doute elle aurait rencontré de grandes difficultés si elle avait voulu exposer tous les passages qu'elle a elle-même cités.

Deuxièmement. Je dis, comme vous le savez, que le Concile [de Trente] interdit d'exposer les Écritures contre le sentiment commun des saints Pères, et si Votre Paternité veut bien lire je dis non seulement les saints Pères, mais les commentaires modernes sur la Genèse, sur les Psaumes, sur l'Ecclésiaste, sur Josué, elle trouvera que tous s'accordent pour exposer littéralement que le soleil est dans le ciel et tourne autour de la terre avec une très grande vitesse, et que la terre est très éloignée du ciel, et qu'elle se tient au centre du monde, immobile. Considérez maintenant, avec votre prudence, si l'Église peut tolérer que l'on donne aux Écritures un sens contraire à tous les saints Pères et à tous les commentateurs grecs et latins. Et l'on ne peut pas répondre que ceci n'est pas une matière de foi, parce que si ce n'est pas une matière de foi du point de vue de l'objet *(ex parte objecti)*, c'est une matière de foi du point de vue de Celui qui parle *(ex parte dicentis)* [i.e. Dieu]. De sorte que serait hérétique qui dirait qu'Abraham n'a pas eu deux fils, ni Jacob douze, tout comme qui dirait que le Christ n'est pas né d'une vierge, parce que c'est l'Esprit Saint qui dit l'une et l'autre chose par la bouche des prophètes et des apôtres.

Troisièmement. Je dis que s'il y avait une véritable démonstration que le soleil se trouve au milieu du monde et la terre dans le troisième ciel, et que le soleil ne tourne pas autour de la terre, mais la terre autour du soleil, alors il faudrait procéder avec grande circonspection dans l'explication des Écritures, qui semblent être contraires, et dire que nous ne les comprenons pas, plutôt que de dire qu'est faux ce qui est démontré. Mais je ne croirai pas qu'il y a une telle démonstration tant qu'on ne me l'aura pas apportée. Et ce n'est pas la même chose de démontrer que, en supposant que le ciel est au centre et la terre dans le ciel, on sauve les apparences, et démontrer qu'en vérité le soleil est au centre et la terre dans le ciel: je crois que la première démonstration peut être faite, mais j'ai un très grand doute quant à la deuxième; et en cas de doute, on ne doit pas abandonner l'Écriture sainte exposée par les saints Pères. J'ajoute que celui qui a écrit: « Le soleil se lève et se couche, et il revient à son lieu, etc. » [*Ecclésiaste* 1, 5] était Salomon, lequel a parlé non seulement inspiré par Dieu, mais comme homme plus savant et instruit que tous les autres dans les sciences humaines et dans la connaissance des choses créées. Et toute cette sagesse, il l'a tenue de Dieu: aussi il n'est pas vraisemblable qu'il ait affirmé une chose qui serait contraire à la vérité démontrée, ou que l'on pourrait démontrer.

Et si l'on me disait que Salomon parle selon l'apparence, le soleil nous paraissant, à nous, tourner, alors que c'est la terre qui tourne, comme à celui qui s'éloigne du rivage, il semble que c'est le rivage qui s'éloigne du navire, je répondrai que, si celui qui s'éloigne du rivage peut bien croire que le rivage s'éloigne de lui, il sait néanmoins que c'est là une erreur, et il la corrige, voyant clairement que le navire est en mouvement, et non pas le rivage. Mais s'agissant du soleil et de la terre, aucun sage n'a besoin de corriger l'erreur, parce qu'il expérimente clairement que la terre est stable et que l'œil ne se trompe pas quand il juge que le soleil se meut, tout comme il ne se trompe pas quand il juge que la lune et les étoiles se meuvent. Voilà qui suffit pour l'heure. Je salue affectueusement Votre Paternité, et je prie que Dieu lui donne toute satisfaction.

De chez moi, le 12 avril 1615.

De votre très révérende Paternité,

comme un frère, le cardinal Bellarmin.

Un modèle d'intelligence : attachons-nous particulièrement à la première partie du paragraphe « Troisièmement ». Bellarmin :

> *« S'il y avait une véritable démonstration* [de l'héliocentrisme] ..., *alors il faudrait procéder avec grande circonspection dans l'explication des Écritures, qui semblent être contraires, et dire que nous ne les comprenons pas, plutôt que de dire qu'est faux ce qui est démontré ».*

Affirmation considérable de la part d'un homme d'église à un tel niveau ! il va jusqu'à envisager la *possibilité* de l'héliocentrisme, en claire contradiction avec la critériologie thomiste et avec le décret du Concile Latran V (1513). Or que dit Galilée ? Exactement la même chose !

> *« S'il arrive que l'autorité des Saintes Écritures apparaît en opposition avec une raison manifeste et certaine, cela veut dire que celui qui interprète l'Écriture ne la comprend pas de manière convenable ; ce n'est pas le sens de l'Écriture qui s'oppose à la vérité, mais le sens qu'il a voulu lui donner ; ce qui s'oppose à l'Écriture, ce n'est pas ce qui est en elle mais ce qu'il y a mis lui-même, croyant que cela constituait son sens »* (Galilée, lettre à Christine de Lorraine, 1615).

C'est suprêmement intelligent de la part de Bellarmin car il reporte ainsi la discussion sur la charge de la *preuve*, notion délicate en Philosophie naturelle à l'époque, et encore discutée aujourd'hui en Philosophie des sciences. Ainsi, pourvu qu'une *preuve* soit disponible, Bellarmin – l'autorité même en la matière – n'hésite pas à affirmer qu'en cas de contradiction avec l'Écriture, c'est notre compréhension de l'Écriture qui devrait être mise en cause et non *une opinion qui serait prouvée être vraie*. Naturellement, il ajoute aussitôt en substance, avoir *« les doutes les plus sérieux sur la possibilité de trouver une preuve de cette sorte »*. Bellarmin a-t-il raison ?

Sur ce dernier point, Bellarmin, dans le contexte de l'époque, n'a pas tort ! En effet, on ne dispose alors d'aucune Dynamique qui permettrait de prouver une dissymétrie entre le modèle géocentrique et le modèle héliocentrique. Galilée n'a même pas encore énoncé le principe de l'inertie et de la relativité du mouvement uniforme (cf. le célèbre passage du *Dialogo* concernant l'aquarium et la cage à oiseaux embarqués sur un navire, mais le *Dialogo* ne paraîtra qu'en 1632). Donc, *a fortiori* rien concernant les forces, les interactions, les masses, bref aucune Dynamique susceptible de rendre compte des mouvements des astres, de quelque point de vue qu'on les considère. Newton (1642-1727) naîtra seulement l'année de la mort de Galilée. En langage moderne, nous dirions qu'on ne dispose alors que d'une *Cinématique*, une description du mouvement ; et, d'un point de vue cinématique, les deux points de vue ne diffèrent que par le choix – conventionnel – du repère. Cela était déjà exprimé bien auparavant, citons par exemple Oresme (1320-1382) qui, constatant cette évidence, concluait prudemment : « puisque les deux points de vue sont équivalents pour décrire le ciel, alors autant s'en tenir à la Cosmologie de la Bible ». Aujourd'hui même, comme nous l'avons vu, l'expérience du pendule de Foucault ne sert pas à prouver un mouvement, qui est à la fois évident et relatif, elle prouve que le référentiel terrestre n'est pas galiléen (ou inertiel). Bien entendu, ces concepts n'existent pas en 1615. Bellarmin peut être tranquille, personne ne peut *à l'époque* apporter une preuve de la *réalité* d'un mouvement de la Terre [1]. Homme intelligent, il a compris cela, de sorte que, si l'ouverture vers une autonomie de la Philosophie naturelle évoquée ci-dessus peut paraître hardie, il était certainement conscient qu'il ne prenait aucun risque.

Un modèle d'autorité et de dogmatisme : et voici l'autre face de Bellarmin ! Homme relativement ouvert aux sciences ? certainement, par rapport à nombre de ses collègues ; capable de les comprendre – et donc aussi d'en pressentir les « dangers » – certainement encore. Mais gardien de la Foi, cardinal inquisiteur, tenu de faire respecter l'orthodoxie. Or quelle est cette orthodoxie ? C'est la critériologie thomiste, en vigueur depuis Thomas d'Aquin (1224-1274) : il y a une hiérarchie des sciences, une science est « inférieure » si elle tient ses principes d'une autre science « supérieure » ; la Théologie, qui, étant révélée, ne tient ses principes d'aucune autre science, est donc supérieure à toutes les autres et *ne peut être mise en doute* ; en particulier la Philosophie (incluant les sciences) lui est subordonnée. Le concile de Latran V (1512-1517) en rappellera vigoureusement les termes : s'il arrive qu'un savant, au cours de ses recherches, découvre une loi paraissant contraire à l'Écriture, alors il doit *lui-même* s'attacher à démontrer que ce qu'il observe est faux, car est fausse toute proposition contraire à la Foi.

Dans le § « Deuxièmement », Bellarmin, en effet, va plus loin que le « service minimum » : bien que le géocentrisme n'ait jamais jusques-là été considéré comme article de foi, en tant que son objet est relatif à la nature, il le devient *en ce qui concerne Celui qui en parle* (Dieu). L'héliocentrisme, plus ou moins accepté jusqu'alors, devient par là suspect d'hérésie.

Dans la seconde partie du § « Troisièmement », Bellarmin reprend avec force l'argument d'autorité. Mais, bien dans la tradition thomiste et aussi jésuite, tentant de concilier Foi et Raison – la Raison au service de la Foi – il tente une argumentation avec l'exemple du rivage et du bateau. Et là, « il se prend littéralement les pieds dans le tapis », et ne s'en sort qu'en invoquant « l'évidence » de l'immobilité de la Terre. En effet, dit-il « le voyageur [rectifie] et comprend clairement que c'est le bateau qui se meut ». Or que prétendent Galilée et les Coperniciens ? Justement que la Terre est un bateau qui se meut et que le paysage – le ciel étoilé – est immobile ! Bellarmin a probablement l'intuition de la faiblesse de son argumentation : il ne lui reste plus qu'à affirmer, cette fois gratuitement, la force de l'évidence : « *un sage ... expérimente clairement que la terre est stable et que l'oeil ne se trompe pas quand il juge que le soleil ... la lune et les étoiles se meuvent. Voilà qui suffit pour l'heure* ». Fin de la discussion, on ne réplique pas à cela.

Et pour finir, une question : pourquoi donc l'héliocentrisme devient-il suspect d'hérésie au début du XVII^e^ siècle ? L'héliocentrisme avait été jusque là plus ou moins accepté – au moins dans sa version « hypothétique » – et largement utilisé par les astronomes du Vatican. Ceux-ci n'étaient pas de « faux-savants » bien au contraire ; ils comptaient parmi eux le renommé Clavius, et ils avaient utilisé l'héliocentrisme lors

1. ... ni d'ailleurs de son immobilité. Mais sur ce dernier point – l'immobilité – curieusement on ne demande pas de preuve ! L'évidence empirique et l'autorité de l'Écriture suffisent.

de la réforme grégorienne du calendrier (1582). Alors pourquoi ce brusque acharnement autour de 1615 ?

Le problème est qu'un groupe de savants et de lettrés, dont Galilée est une figure de proue, prétendent, via l'héliocentrisme, à l'autonomie de la Philosophie vis à vis de la Foi, en claire rupture avec la tradition thomiste. C'est le thème de la célèbre lettre de Galilée à Christine de Lorraine, écrite elle aussi au printemps 1615, dans laquelle Galilée invoque notamment la tradition augustinienne (l'Esprit saint ne prétend pas décrire le ciel). Les succès scientifiques incontestables et rapidement incontestés de Galilée donnent une force nouvelle à cette tendance ; aux yeux de la congrégation du Saint-Office, elle apparaît à terme comme un danger extrême. Il ne s'agit plus d'une simple discussion académique pour savoir qui, de la Terre ou du ciel, tourne ou non, le problème se pose désormais en terme de *pouvoir* : le pouvoir sur les intellectuels allait-il échapper à l'Église ? [2]. Il y avait eu une première affaire de ce type au XIII[e] siècle lors du conflit entre théologiens et « artiens », réglée par les « condamnations » de 1272 et 1277. Cette fois, l'affaire est des plus sérieuses et aboutira, à terme, à la condamnation de Galilée en 1633 [3] : l'enjeu est rien moins que le pouvoir intellectuel entre théologiens et savants.

Pour finir, nous ne résistons pas au plaisir de citer la réaction de Pascal (1623-1662), grand scientifique, janséniste et grand mystique, extraite de la XVIII[e] Provinciale [12] :

> « Toutes les puissances du monde ne peuvent par autorité persuader un point de fait, non plus que le changer ; car il n'y a rien qui puisse faire que ce qui est ne soit pas. [...] Ce fut aussi en vain que vous [i.e. les Jésuites] obtîntes contre Galilée ce décret de Rome qui condamnait son opinion touchant le mouvement de la Terre. Ce ne sera pas cela qui prouvera qu'elle demeure au repos ; et, si l'on avait des observations constantes qui prouvassent que c'est elle qui tourne, tous les hommes ensemble ne l'empêcheraient pas de tourner, et ne s'empêcheraient pas de tourner aussi avec elle [4]. »

2. « Le problème à l'époque n'était pas de savoir si c'était la Terre qui tournait ou le ciel, question secondaire. Le problème était qu'un groupe de savants puisse s'opposer aux Écritures »[11].

3. Déclaré "contraire à la Foi" en 1615, l'héliocentrisme deviendra une hérésie en 1633 du seul fait de l'abjuration imposée à Galilée, car on ne peut abjurer qu'une hérésie [11].

4. Cette phrase est située vers la fin de la XVIII[e] Provinciale, publiée en 1657, soit plus de 20 ans après la condamnation de Galilée. Merci à Michel Toulmonde, de l'Observatoire de Paris, pour nous avoir retrouvé l'origine exacte de cette phrase parfois citée de manière incomplète ou déformée.

Bibliographie

[1] FOUCAULT, L. : 1851, « Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule », *Comptes-rendus hebd. Acad. Sci.*, **32**, 135-138.

[2] FOUCAULT, L. : 1878, *Recueil des travaux scientifiques de Léon Foucault*, édition posthume publiée par Mme Vve Foucault, sa mère, avec la collaboration de C.M. GARIEL, Paris, Gauthier-Villars ; 2001, ré-édition, Albert Blanchard, Paris.

[3] TOBIN, W. : 2002, *Léon Foucault*, (adaptation française J. Lequeux), Paris, EDP-Sciences, chap. 10 ; 2003, version anglaise, Cambridge University Press, chap. 9.

[4] TOBIN, W., LEQUEUX J., & LALANDE, T. : 2007, « Les pendules de Foucault », *La Revue, Musée des arts et métiers*, n° 48, 63-69.

[5] CHARRON, F. : 1931, « L'expérience du pendule de Foucault », *Bull. Société astronomique de France*, 24 janvier 1931, 457-462 .

[6] OLSSON, M. : 1981, « Spherical pendulum revisited », *Am. J. Phys.*, **49**, 531-534.

[7] LAUGINIE, P. : 2003, « Father and Son at the Pole or : What's the Earth doing ? A sketch on Foucault's Pendulum and its interpretation », in : *Proccedings of the Conference : « From the itinerant lecturers of the 18th century to popularizing physics in the 21th century »,* Pognana sul Lario, Italy, June 1-6, 2003.

[8] GAPAILLARD, J. : 1993, *Et pourtant elle tourne ! Le mouvement de la Terre*, Paris, Seuil.

[9] TAYLOR, E.F. & WHEELER, J.A. : 1970, *À la découverte de l'espace-temps*, version française, Paris, Dunod. Extrait cité in : VALENTIN, L. : 1983, *L'univers mécanique*, Paris, Hermann, p. 110.

[10] GALILEI, G. dit « GALILÉE » : 1632, *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*. Traduction française : Fréreux, R., & de Gandt, F., 1992, Paris, Seuil.

[11] BERETTA, F. : 2004-2006, *Repenser l'affaire Galilée*, séminaire au centre Alexandre Koyré, Paris (non publié). Voir aussi : 2005, « Orthodoxie philosophique et inquisition romaine aux 16^{e} et 17^{e} siècles », *Historia philosophica*, **3**, 67-96. [Dir. Beretta] : 2005, *Galilée en procès, Galilée Réhabilité ?* Paris, ed. Saint-Augustin.

[12] PASCAL, B. : 1657-1963, « XVIII^{e} Provinciale », in *Pascal, Oeuvres complètes*, collection l'Intégrale, Le Seuil, 1963, p. 467. Voir aussi : « Analyse de la XVIII^{e} Provinciale », § 34-36, in : `https://les-provinciales.msh.uca.fr/content/p-18-commentaires`

Remerciements

Nous avons plaisir à remercier vivement les collègues qui ont participé à l'étude du pendule de Foucault dans le cadre de l'expérience pédagogique « La théorie au bout des doigts » : Fewzi Benhabib, co-initiateur dans les années 1990's, puis Alain Sarfati, aujourd'hui Stéphanie Pellerin, Jean Bénit, Sergio Chibbaro, demain d'autres . . . , ainsi que nos étudiants. Cependant, un remerciement tout particulier est dû à Vincent Ezratti, l'indispensable technicien sans qui « La théorie au bout des doigts » n'aurait pu fonctionner. Il n'y a pas beaucoup d'endroits dans le monde où l'on a eu la patience de suivre la rotation de la Terre via un petit pendule de Foucault sur des jours et des semaines, jusqu'à trois semaines sans interruption !

Le présent document a bénéficié de riches discussions avec Mme Béatrice Sandré, professeur de sciences physiques, qui n'est autre que la petite fille du professseur Charron ! ainsi qu'avec notre collègue Christian Larcher, vétéran du CLEA [5] et rédacteur en chef des *Cahiers Clairaut*. Enfin, réaffirmons notre dette envers William Tobin (1955-2022), « le » spécialiste mondial de Léon Foucault, récemment disparu.

5. Comité de liaison enseignants-astronomes.