APPLICATIONS DE L'ÉQUATION DE KEPLER

Daniel Descout

Dans le numéro de mars 2022 des Cahiers Clairaut, Daniel Descout introduisait l'équation de Kepler. Dans cette deuxième partie, il nous propose quelques applications de cette fameuse équation, tout d'abord à la comète de Halley. La partie concernant la sonde Giotto est à retrouver sur le site du CLEA.

Application à la comète de Halley

Tycho Brahé (1588), cité par Pierre Louis (2019 ; Académie des sciences et des lettres de Montpellier) : « Je montrerai à la fin de mon ouvrage, principalement à partir du mouvement des comètes, que la machine du ciel n'est pas un corps dur et impénétrable rempli de sphères réelles comme cela a été cru jusqu'à présent par la plupart des gens. Je prouverai que le ciel s'étend dans toutes les directions, parfaitement fluide et simple sans présenter nulle part le moindre obstacle, les planètes circulant librement dans ce milieu, gouvernées par une loi divine en ignorant la peine et l'entraînement des sphères porteuses »[1].

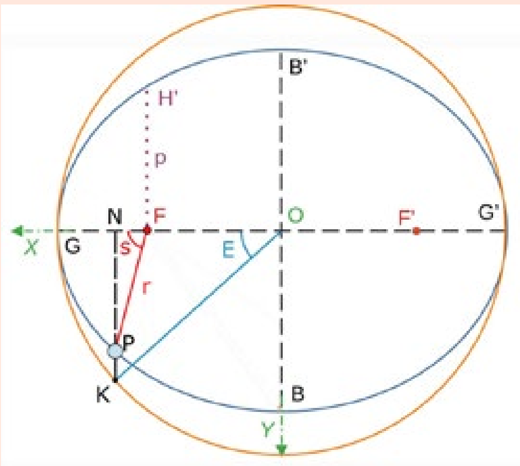
Les observations d'Edmond Halley en 1681-82, et les observations historiques (antérieures au XVII^{e} siècle) de l'astre nommé aujourd'hui 1/P Halley, ont été faites lorsque la comète était « proche » du Soleil (soit lorsque sa distance au Soleil est de l'ordre d'une unité astronomique, ou moins) et de la Terre. En première approximation, la portion de sa trajectoire proche de l'orbite terrestre est assimilable à une portion de parabole, avec le Soleil à son foyer. Isaac Newton, dans la première version des *Principia* (1687), avait envisagé cette modélisation. Mais avec ce modèle approché de trajectoire, il n'est pas possible d'écrire l'équation de Kepler, puisque la notion de mouvement moyen – la fonction M(t) – perd sa signification, l'orbite parabolique n'étant pas fermée. De même, l'anomalie excentrique E, définie comme un angle au centre de l'ellipse, n'est plus définie, la parabole n'ayant pas de centre de symétrie.[2]

Encadré 1

Quelques rappels utiles de l'article du numéro 177 de mars 2022.

La planète P suit une orbite elliptique (voir figure, tracé bleu) avec une période T. Le Soleil est au foyer F de l'ellipse.

Notations : demi-grand axe : a = OG = OG' ; distance centre-foyer : c = OF ; excentricité : e = c/a ; paramètre de l'ellipse : p = FH' = a(1-e^2).



On appelle E l'anomalie excentrique (angle GOK de la figure).

On appelle M l'anomalie moyenne égale à 2π/T. M est l'angle au centre (en radians) correspondant à une planète fictive en mouvement uniforme de période T, sur une orbite circulaire de diamètre égal à 2a. La variable t est le temps écoulé depuis le passage de la planète au périhélie G.

L'équation de Kepler s'écrit alors :

E - e. sin E = M.

Une fois E calculé, on peut déterminer la position de la planète P repérée par s (anomalie vraie) et r avec les formules suivantes :

r = a(1-e.cos E) et

tan(s/2) = ε.tan(E/2) avec ε = [(1 + e)(1-e)]$^{1/2}$

Au XXI^{e} siècle, après avoir observé le retour de la comète de 1682 à son périhélie en 1759, 1835, 1910 et 1986, nous savons que la modélisation correcte de son orbite est celle d'une ellipse d'excentricité proche de l'unité (si l'on néglige l'influence des autres planètes du Système solaire).

Dans cette partie consacrée à la comète, on notera e, a et T, respectivement l'excentricité de son orbite, son demi grand-axe et sa période orbitale. On notera par ailleurs T_0 la durée de l'année julienne (365,25 jours de 86 400 s), et a_0 la valeur de l'unité astronomique (1 UA ≈ 1,496.10^{11} m), respectivement période orbitale de la Terre et demi grand-axe de l'orbite terrestre.

Nous serons amenés à utiliser la troisième loi de Kepler, sous la forme : $a^3/T^2 = a_0{}^3/T_0{}^2$.

Ou, $(a/a_0)^3$ / $(T/T_0)^2$ = 1 . Donc, dans l'expression de la troisième loi de Kepler, lorsque a et T sont exprimés

1 https://www.ac-sciences-lettres-montpellier.fr/academie_edition/fichiers_conf/LOUIS-2019.pdf

2 https://www.persee.fr/doc/rhs_0151-4105_1986_num_39_4_4034 (pages 292 et suivantes).

respectivement en unités astronomiques et en années terrestres, la constante vaut exactement 1.

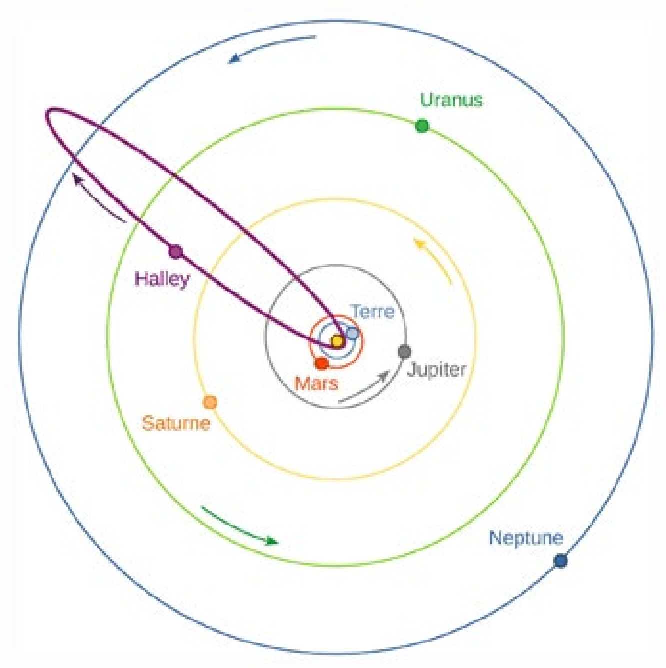


Figure 1.

Dans le Système solaire, et par rapport aux étoiles extérieures, l'orbite de la comète de Halley est assimilable à une ellipse d'excentricité $e \approx 0{,}967$. Le périhélie est à 0,587 UA du Soleil (plus proche du Soleil que Vénus, mais plus éloigné que Mercure), et son aphélie en est à 35,33 UA (plus éloigné du Soleil que Neptune).
Le demi-grand-axe de l'orbite est a = 17,96 UA (environ $2{,}7.10^9$ km). La période orbitale est T = 76,09 ans.
En appliquant la troisième loi de Kepler à ces paramètres orbitaux, on trouve : $a^3/T^2 \approx 1$, avec comme choix d'unités l'année terrestre (T_0) et l'unité astronomique. La figure 1 représente (en violet) la projection de l'orbite de la comète sur le plan de l'écliptique, comparée aux orbites des planètes.

L'équation de Kepler s'écrit avec les données ci-dessus : $E - e.\sin(E) = M(t)$; et l'anomalie moyenne de la comète est : $M(t) = 2\pi.t/T$, avec l'origine des temps au passage par le périhélie.
Nous nous proposons de répondre à plusieurs questions au sujet de la comète de Halley.

<u>Question 1</u> : au cours d'une période orbitale, pendant quelle durée la comète est-elle à une distance du Soleil inférieure au ***paramètre (noté p) de l'ellipse trajectoire ?***
<u>Analyse</u> : On cherche la solution en appliquant l'équation de Kepler, avec M(t) comme inconnue.
Le schéma support (figure 2) pour l'analyse de cette question est le transposé, pour la comète, de la figure 6 de la première partie (CC 177 page 28). La durée cherchée (notée D) est associée au secteur d'ellipse HFH'GH (couleur mauve).
Le Soleil est en F. Le paramètre de l'ellipse est la distance

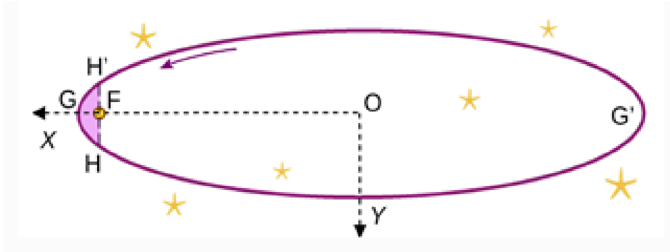


Figure 2.

FH, soit $p = a.(1 - e^2) = 1{,}156$ UA. La comète passant au périhélie G à la date 0, ses passages en H' et H ont lieu aux dates – D/2 et + D/2.
Pour la date + D/2 : $s(D/2) = +\pi/2$.
Sur la figure de l'encadré 1, la condition $s = +\pi/2$ amène le point N en F, et FK devient perpendiculaire à OF. Comme OK = OG = a : cos E = OF/OK = c/a = e. On en déduit : E = 0,256 5 (rad).

Par l'équation de Kepler : $M(D/2) = E - e{\cdot}\sin E$;
sin E = 0,253 7 ; donc M(D/2) = 0,011 11 (rad) (ou 0,636°).
Avec $M(D/2) = \pi.D/T$, la réponse attendue est :
D = 0,269 année (98,3 jours environ).

Cette durée est très courte devant la période orbitale de la comète. En effet, D/T = M/p = 0,003 5 (≈ 1/300). C'est au cours de cette phase de son mouvement que la comète se trouve deux fois à la même distance du Soleil que la Terre (1 UA) et deux fois à la même distance du Soleil que Vénus (0,72 UA). Au cours de cette courte phase, il arrive que la comète soit vue de la Terre à une distance très inférieure à la distance [Terre – Soleil] (comme en l'an 837 de notre ère, avec environ 5 millions de km seulement).

<u>Question 2</u> : À quelle distance du Soleil se trouve la comète un an après le passage au périhélie ?
<u>Analyse</u> : Les données sont les caractéristiques de l'orbite (demi-grand-axe a, période T, excentricité e) et une date de passage ($t = T_0$, une année de 365,25 jours). À partir de l'anomalie moyenne $M(T_0)$, il faut calculer l'anomalie excentrique E à la date T_0, et en déduire l'anomalie vraie $s(T_0)$, et accessoirement $r(T_0)$.
L'anomalie moyenne de la comète est la fonction $M(t) = 2\pi{\cdot}t/T$.
Avec $t = T_0$, et $T_0/T = 1/76{,}09 = 0{,}013\,14$, M = 0,082 58 (rad).
L'équation de Kepler s'écrit :
$M(T_0) = E - 0{,}967\,3{\cdot}\sin E = 0{,}082\,58$.
<u>Calcul de E</u>
** Avec la méthode de Kepler (voir CC 177 page 31).*
La suite $u_{n+1} = M + e \sin u_n$ avec $u_0 = 0$ converge vers la limite 0,721 4. Mais la convergence est assez lente (précision du millième au 24^e^ rang), cette méthode étant peu adaptée aux grandes excentricités.

** Avec la méthode de Newton-Raphson (voir les compléments à l'article du n° 177), la convergence est beaucoup plus rapide (précision du millième au 5e rang, voir encadré 2)*

Encadré 2 avec la méthode de Newton-Raphson
<u>Principe</u> : recherche du zéro de la fonction $f(x) = x - e \cdot \sin(x) - M(T_0)$.
Les constantes de l'équation sont e = 0,967 3 et $M(T_0)$ = 0,082 58 (rad).
La fonction dérivée $f'(x)$ est $1 - e \cdot \cos(x)$.
Méthode itérative : étude de la suite $\{v_n\}$ telle que $v_{n+1} = v_n - f(v_n)/f'(v_n)$ termes de la suite en radians).
On choisit $v_0 = 0$. Les premières valeurs de v_n et de $f(v_n)$ sont rassemblées dans le tableau.
On trouve v_6 = 0,721 4 et ensuite $v_{n+1} = v_n$. Donc **E = 0,721 4 (rad).**

n	0	1	2	3	4	5	6	7	L
v_n	0	≈ 2,523 3	≈ 1,471 9	≈ 1,000 1	≈ 0,783 2	≈ 0,725 5	≈ 0,721 4	≈ 0,721 4	E
$f(v_n)$	-M	≈ 1,870 0	≈ 0,426 8	≈ 0,103 5	≈ 0,018 2	≈ 0,001 1	$\approx <10^{-4}$	$\approx <10^{-8}$	0

Donc : tan(E/2) = 0,377 2 ; et comme ε = 7,753, tan(s/2) = 2,925. On en déduit : ***s(T_0) = 142,2°.***
Avec cos E = 0,750 9, on calcule r(E) = a(1 – e.cos E), soit : ***r(T_0) = 4,916*** UA.
Donc, une année terrestre après son passage au périhélie, la comète de Halley est à une distance du Soleil un peu inférieure au rayon moyen de l'orbite de Jupiter (5,2 UA environ).
<u>Contrôle du résultat par le calculateur d'éphémérides (https://ssp.imcce.fr/forms/ephemeris) :</u>
En 1986, la comète de Halley est passée à son périhélie le 09 février (à 11 h 0 TU). Elle devrait atteindre son aphélie en décembre 2023 (à 35,14 UA du Soleil ; cette distance a varié au cours de l'histoire de la comète). Le calcul d'éphémérides est fait dans le référentiel héliocentrique, avec le plan de l'écliptique comme référence. Les coordonnées écliptiques de la comète sont données : longitude (l) et latitude (b). Le point γ est l'origine des longitudes, et les nœuds de l'orbite de la comète correspondent à b = 0.

P/Halley (comète)

Date	λ (deg)	β (deg)	d_{obs} (UA)	m_v (mag)	Phase (deg)	Δλcosβ (arcsec/min)	Δβ (arcsec/min)	v_r (km/s)
1986-02-09T11 :00 :00.000	305°49'00,244	16°26'37,638	0,587103319487	1,93	0	-7,5999468	-0,9825266	0,0000644
1987-02-09T17 :00 :00.000	165°17'53,322	-17°03'31,955	4,914882868822	15,77	0	-0,1077686	-0,0089332	16,4089244

La première ligne concerne le passage de la comète au périhélie de son orbite (vitesse radiale quasi nulle, en km/s, distance au Soleil égale à 0,587 1 UA, latitude b = + 16,5° environ). La seconde ligne donne la distance de la comète au Soleil un an plus tard : 4,915 UA, à comparer avec la réponse précédente 4,916 UA pour r(T_0).

<u>Question 3</u> : calculer les dates approximatives pour lesquelles la comète se trouve à la même distance du Soleil que les planètes, de Mars à Neptune, pendant la demi-période qui s'étend de 1986 à 2023.
<u>Analyse</u> : Les données relatives aux cinq planètes sont les rayons de leurs orbites supposées circulaires et centrées sur le Soleil. Le rayon de chaque orbite planétaire s'identifie donc avec la distance r(E) de la comète au Soleil. De r(E) = a.(1 – e .cos E), on déduit E, puis à l'aide de l'équation de Kepler, on calcule M(t) puis la date inconnue t qui lui correspond avec M(t) = 2π.t/T.
Pour simplifier, nous choisissons a = 18 UA et T = 76 années (a^3/T^2 = 1,01 au lieu de 1 juste).
<u>Exemple de la planète Neptune</u>
Le rayon de l'orbite de la planète est pris pour simplifier égal à 30 UA. C'est aussi la valeur de r(E).
On en déduit : cos E = – 0,69. Donc E = 134°, ou 2,33 (rad).
Alors sin E = 0,73, et d'après l'équation de Kepler : M = 1,63 (rad). Finalement : t = 20 années.

La comète passe à la même distance du Soleil que Neptune en 2005.

La même méthode appliquée aux planètes Mars (r(E) = 1,5 UA), Jupiter (r(E) = 5,2 UA), Saturne (r(E) = 9,5 UA) et Uranus (r(E) = 19 UA) donne les dates de passage suivantes :
Mars : t = 0,20 année, passage en avril 1986 ; Jupiter : t = 1,1 année, passage en mars 1987 ; Saturne : t = 2,6 années ; passage en août 1988 ; Uranus : t = 8,0 années ; passage en février 1994.

Plaque située dans l'abbaye de Westminster (Wikipedia).

Le prochain passage au périhélie de la comète de Halley est annoncé pour l'année 2061. Une évaluation plus précise de la date de son retour nécessite la prise en compte des attractions gravitationnelles des planètes majeures du Système solaire (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune), qui perturbent la trajectoire de la comète. Ce très long travail avait été fait en 1757 et 1758 par Alexis Clairaut, Jérôme de Lalande et Nicole-Reine Lepaute (à une époque où les planètes Uranus et Neptune n'étaient pas encore connues). Ce qui leur avait permis d'annoncer avec une précision d'un mois le retour de la comète pour avril 1759, retour prédit par Edmond Halley en 1705.

Suite de l'article sur clea-astro.eu, cliquer sur Cahiers Clairaut 179 ■