LA 1re LOI DE KEPLER EXPLIQUÉE PAR FEYNMAN

Pierre Causeret, Esbarres (21)

Richard Feynman (1918 – 1988), prix Nobel 1965, était connu pour sa faculté à rendre simple et accessible des problèmes compliqués. Il reste célèbre pour avoir trouvé une représentation schématique visuelle des interactions des particules en théorie quantiques des champs. Ici il s'agit d'établir d'une manière différente la première loi de Kepler.

Les orbites des planètes sont des ellipses C'est la première loi de Kepler, la plus connue des trois. Pour la trouver, Kepler a utilisé les observations précises de la planète Mars réalisées par Tycho Brahe. Ce n'est donc au départ qu'une loi empirique obtenue par l'observation. Est arrivé ensuite Newton et sa loi de la gravitation pour comprendre pourquoi les trajectoires des planètes et des comètes sont toujours des coniques – ellipse, parabole ou hyperbole – à condition de supposer que le Soleil est le seul corps attracteur. Mais comment passer de la loi de la gravitation en $1/R^2$ à une conique ? Une des solutions est de le démontrer par l'algèbre, ce qui n'est pas évident[1].

Le célèbre physicien Richard Feynman a proposé dans l'un de ses cours une méthode géométrique originale. À partir d'un enregistrement et de notes retrouvées de Feynman, ce cours a été publié par David et Judith Goodstein et traduit en français[2].

Dans ce cours, Feynman commence par démontrer la loi des aires. Cette loi provient uniquement du principe d'inertie et du fait que la force d'attraction du Soleil est centripète. Il démontre ensuite que la 3e loi de Kepler induit une force en $1/R^2$ (R est la distance Soleil-planète). Ces deux démonstrations sont disponibles sur le site du CLEA[3].

Il continue en démontrant que les orbites sont des ellipses, ou du moins peuvent être des ellipses. Pour cela, il utilise la loi des aires et la force en $1/R^2$. La démonstration est subtile et un peu longue. C'est une démonstration qui manque parfois de rigueur, en particulier pour les passages à la limite, mais elle a le mérite de faire appel à des notions mathématiques simples. En voici le principe.

Propriétés des ellipses

Définition

On définit géométriquement une ellipse ainsi : un point M appartient à une ellipse si la somme des distances de M aux foyers est constante.

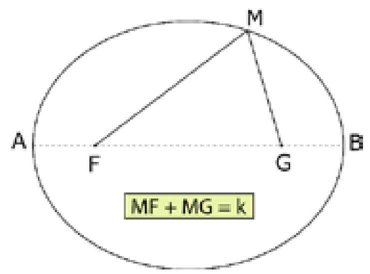


Fig.1. Définition d'une ellipse de foyers F et G.

Ce qui s'écrit MF + MG = k si F et G sont les deux foyers. C'est cette méthode qui permet de tracer une ellipse avec une ficelle.

Remarque : k est le grand axe AB de l'ellipse.

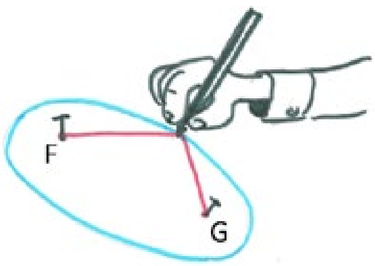


Fig.2. Tracé d'une ellipse avec la méthode du jardinier (dessin de Georges Paturel extrait du n° 118 des CC).

En effet, comme le point A appartient à l'ellipse, on a AF + AG = k. Or, AF + AG = AF + AF + FG et AF + AF + FG = AF + BG + FG = AB. d'où k = AB.

Propriété

Un point P est à l'intérieur de l'ellipse (E) si PF + PG < k (figure 3).

Cette propriété se démontre facilement ainsi :
PF + PG < MF + MG car PG < PM + MG .

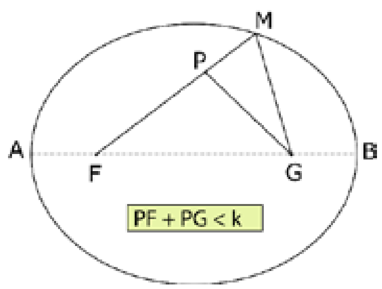


Fig.3. Point intérieur à l'ellipse.

1 On pourra regarder par exemple sur Wikipedia l'article « Démonstration des lois de Kepler ».
2 *Le Mouvement des planètes autour du Soleil* (Diderot Éditeur, Arts et sciences, 1997).
3 Sur clea-astro.eu, cliquer sur productions récentes, puis sur 179 (il faudra vous identifier).

De même, un point P est à l'extérieur de l'ellipse (E) si PF + PG > k

Construction d'une ellipse point par point avec ses tangentes

Soient deux points F et G et une longueur k définissant une ellipse (E) de foyers F et G et de grand axe k. On peut tracer cette ellipse point par point ainsi :

- On trace le cercle (C) de centre G et de rayon k.
- P est un point quelconque de (C). La médiatrice (d) de [PF] coupe [PG] en un point M.
- On peut montrer que M est un point de l'ellipse et que (d) est tangente à (E) en M (voir encadré).

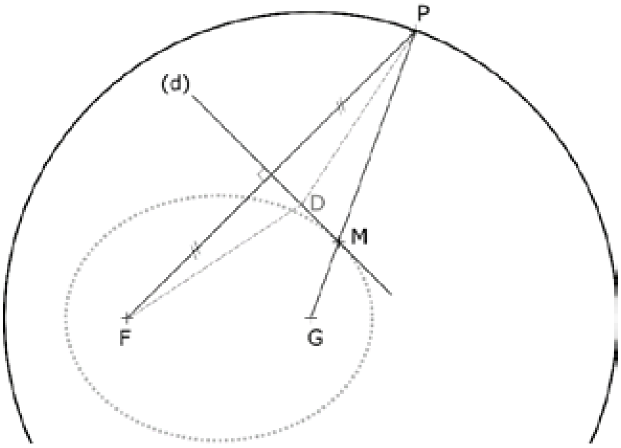


Fig.4. Tracé d'une ellipse point par point.

Démonstration

* MF + MG = MP+MG = PG = k donc M ∊ (E). Et on peut vérifier que tout point de (E) peut se construire ainsi.

* Pour démontrer que (d) est tangente à l'ellipse, il suffit de démontrer qu'aucun de ses points n'est à l'intérieur de l'ellipse. Pour tout point D de (d) :
DF + DG = DP + DG ≥ PG donc DF + DG ≥ k, le point D est à l'extérieur de l'ellipse.

Remarque : on peut montrer que l'intersection de (d) avec (GP) se trouve bien entre G et P.
M ne peut pas être au-delà de G car PM = FM <k.

Les orbites des planètes sont des ellipses

Découpe de l'ellipse

On découpe la trajectoire en choisissant des angles « au centre » (ou plutôt au foyer) égaux. Sur la figure 5, les angles tracés à partir du Soleil mesurent tous 10°. Les aires des secteurs ne sont donc pas égales et les arcs d'orbite ne sont pas parcourus dans le même temps. Cette astuce de Feynman va servir à déterminer le diagramme des vitesses.

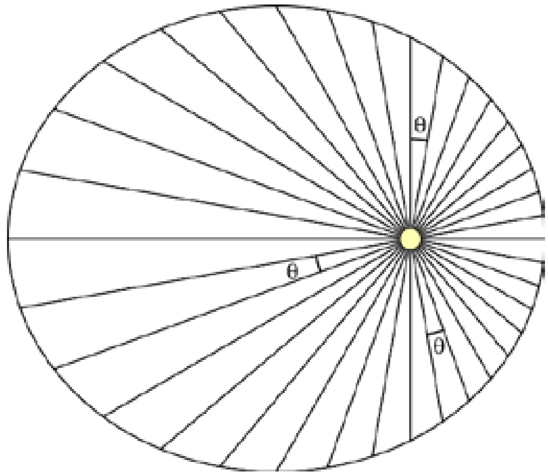


Fig.5. Découpe d'une orbite « à la Feynman ». Les angles dont le sommet est le Soleil sont égaux (on a pris 10° chacun sur la figure).

Calculs d'aires

Feynman commence par montrer que les aires des différents secteurs sont proportionnelles à R² où R est la distance du Soleil au point de l'ellipse.

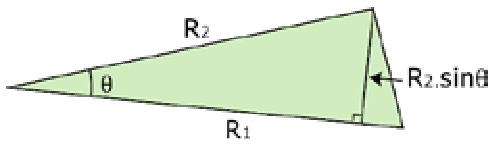


Fig.6. Chaque secteur d'ellipse est assimilé à un triangle.

L'aire du triangle de la figure 6 vaut $R_1 \times R_2 \times \sin\theta / 2$.
Pour θ assez petit, $R_1 \approx R_2$ et l'aire du triangle peut s'écrire $R^2 \sin\theta / 2$ avec θ constant. Ce qui est bien proportionnel à R².

On utilise maintenant la loi des aires : les aires sont proportionnelles au temps de parcours.
Comme on vient de montrer qu'elles étaient également proportionnelles à R², on en déduit que les Δt (temps pour parcourir un arc d'ellipse) sont aussi proportionnels à R².
Or la force d'attraction F est proportionnelle à 1/R².
Donc F×Δt est constant.
On sait depuis Newton que la force est proportionnelle à l'accélération.
Si F est proportionnelle à $\|\overrightarrow{\Delta V}\|/\Delta t$ (qui représente l'accélération) et que F×Δt est constant, cela signifie que $\|\overrightarrow{\Delta V}\|$ est constant (en intensité, pas en direction).
On peut dire que la planète subit des changements de vitesse égaux dans des angles égaux.

Tracé du diagramme des vitesses

Feynman utilise maintenant un diagramme des vitesses (appelé aussi hodographe). Pour cela, il trace à partir d'un même point une série de vecteurs vitesses.
Sur ce type de diagramme, deux vecteurs vitesses $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont représentés à partir du même point O, ici par $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OA_2}$ (figure 7).

On a : $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2}$

donc $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} = \vec{V_2} - \vec{V_1}$.

$\overrightarrow{A_1A_2}$ est donc la variation de vitesse, ou $\overrightarrow{\Delta V}$ entre les positions 1 et 2.

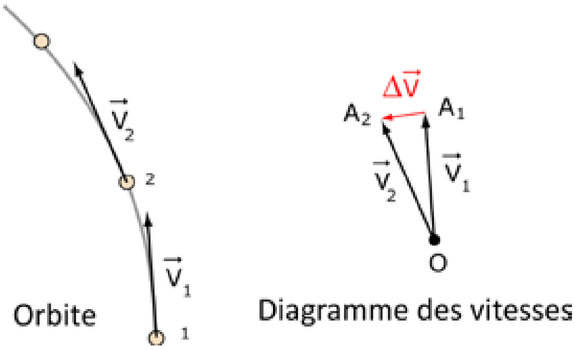


Fig.7. **Principe de construction du diagramme des vitesses.**

Nous allons tracer les vitesses OA_1, OA_2, OA_3, OA_4... à partir d'un point O sachant que :
1. Les $\|\overrightarrow{\Delta V}\|$ sont constants donc $A_1A_2 = A_2A_3 = ...$
2. La force d'attraction étant exercée par le Soleil, les $\overrightarrow{\Delta V}$ doivent être dirigés vers le Soleil ; dans la découpe « à la Feynman », ils se décalent donc à chaque fois du même angle (10° sur la figure 7) et les angles. $\widehat{A_1A_2A_3}$, $\widehat{A_2A_3A_4}$, $\widehat{A_3A_4A_5}$ ... sont tous égaux (170° sur la figure 8).

Conclusion : les points A_1, A_2, A_3, A_4... sont situés sur un polygone régulier à n côtés.

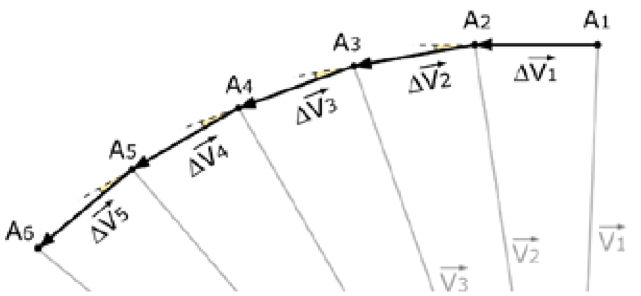


Fig.8. **Le diagramme des vitesses pour une orbite découpée « à la Feynman » (avec des angles « au foyer » égaux).**

Conclusion : $A_1A_2A_3A_4$... est un polygone régulier (le point O, l'origine des vitesses n'a aucune raison d'en être le centre).

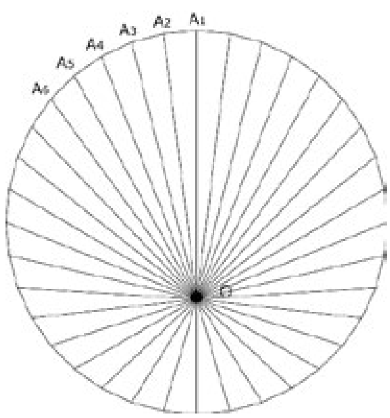


Fig.9. **Diagramme des vitesses d'une planète.**

En passant à la limite, le diagramme des vitesses est un cercle.

Reconstitution de l'orbite

Connaissant le diagramme des vitesses, un polygone régulier qu'on assimile à un cercle, on peut reconstituer la trajectoire de la planète. Pour cela, on fixe tout d'abord l'origine des vitesses (le point O) à l'intérieur du cercle. Nous étudierons le cas où O est situé à l'extérieur du cercle plus loin.

On sait que la vitesse est maximale au périhélie (loi des aires), on peut donc placer cette vitesse $\vec{V_1}$ (sur la figure 10) sur le diagramme : c'est $\overrightarrow{OA_1}$ où $[OA_1]$ passe par le centre C du cercle ou du polygone régulier (figure 10).

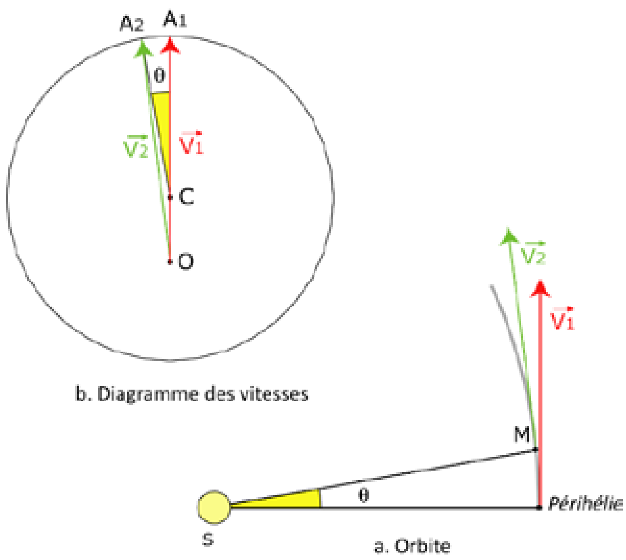


Fig.10. **Position du périhélie sur le diagramme des vitesses.**

On a partagé l'orbite en n angles « au foyer » égaux. L'angle θ sur la figure 10 vaut donc 360°/n.
$A_1A_2A_3A_4$... est un polygone régulier à n côtés donc l'angle (figure 10b) vaut aussi 360°/n, il est donc égal à θ.

Pour comparer les deux figures, nous faisons effectuer une rotation de 90° à la figure 10 (fig.11).

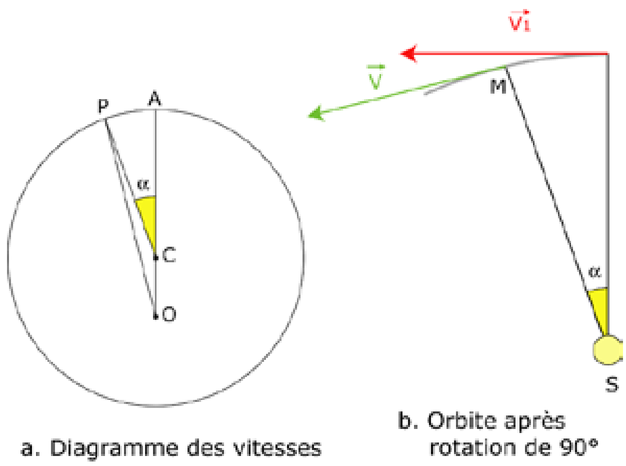


Fig.11. **Diagramme des vitesses et orbite après une rotation de 90°.**

Le point P est un point quelconque du cercle du diagramme des vitesses et nous remplaçons l'angle élémentaire θ par un angle quelconque α.

Les côtés des deux angles notés α sont maintenant parallèles (sur le tracé de l'orbite et sur le diagramme des vitesses). La vitesse $\vec{V}$ représentée à droite, tangente à l'orbite, est maintenant perpendiculaire à (OP).
Pour tout angle α, on connaît la vitesse et donc la direction de la tangente à la courbe. Comment, à partir de ces données, reconstituer l'orbite ?

Nous allons tracer une orbite possible sur le diagramme des vitesses (à l'échelle près).
Pour cela, nous reprenons la construction géométrique de l'ellipse avec ses tangentes :
On trace la médiatrice de [OP] qui coupe [CP] en un point M. On a montré précédemment qu'avec cette construction, le point M appartient à une ellipse dont C et O sont les foyers (le Soleil est en C ici) : en effet, CM + MO = CM + MP = CP = constante. De plus, la médiatrice est tangente à l'ellipse.

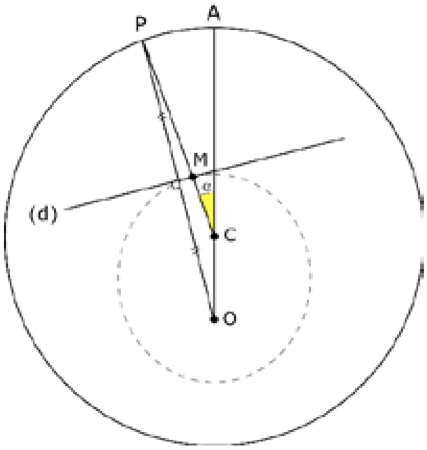


Fig.12. **Construction de l'orbite.**

Le point M remplit donc la condition posée : pour un angle α donné, la tangente en M à la courbe est perpendiculaire à [OP] et l'angle périhélie – Soleil – planète est égal à α.

Feynman conclut ainsi : « Par conséquent, la solution au problème est une ellipse – ou plutôt, c'est l'inverse que j'ai démontré : l'ellipse est une solution au problème » ;
Il laisse ensuite le soin aux étudiants d'étudier le cas où le point O est sur le cercle des vitesses puis à l'extérieur du cercle.

Complément
Prenons déjà le cas où le point O, origine des vitesses est à l'extérieur du cercle. La construction avec la médiatrice de [OP] est la même que précédemment. Seule différence : la médiatrice (d) coupe la droite (PC) en un point extérieur au segment [PC].

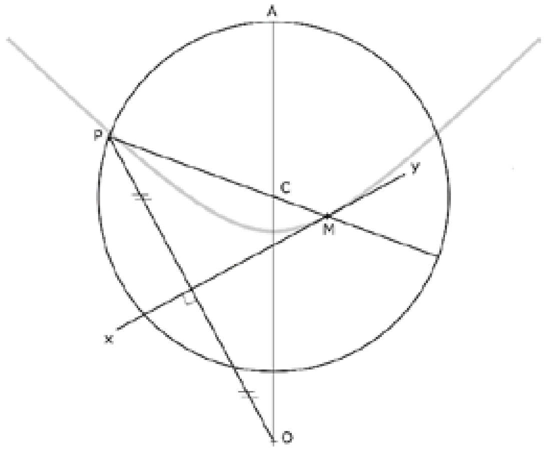


Fig.13. **En prenant O extérieur au cercle, on obtient une hyperbole.**

On peut écrire :
MO – MC = MP – MC = PC = rayon = constante
C'est la définition bifocale d'une hyperbole !

La situation intermédiaire entre l'ellipse et l'hyperbole devrait s'obtenir en plaçant le point O ni à l'intérieur ni à l'extérieur mais sur le cercle.
Manque de chance, si O appartient au cercle, la médiatrice de [PO] coupe [PC] toujours au même point, en C. On n'obtient donc pas ainsi le cas limite de la parabole. Mais un de nos relecteurs nous a proposé une solution.

■

Origine de la démonstration

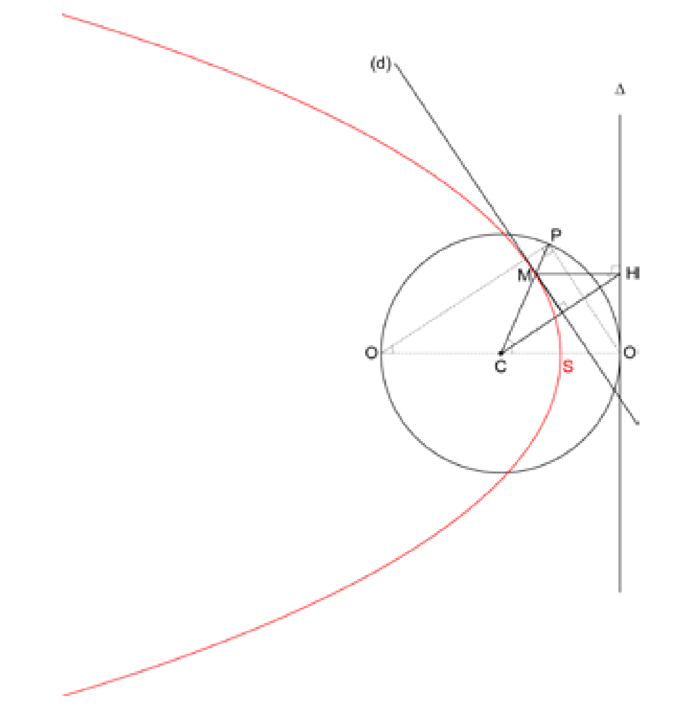
Feynman attribue le fait que le diagramme des vitesses soit un cercle à certain M. Fano. Le même principe de démonstration apparaissait déjà dans un livre de James Clerk Maxwell en 1877 et Maxwell attribue la méthode à Sir William Hamilton.

(D'après les commentaires de David & Judith Goodsteil dans *Le mouvement des planètes autour du Soleil*).

Solution proposée par Béatrice Sandré

Dans l'article précédent, nous avons trouvé ellipse et hyperbole comme trajectoires possibles à partir d'un hodographe circulaire, en prenant le point O, origine des vitesses, à l'intérieur puis à l'extérieur du cercle. Que se passe-t-il si le point O est sur le cercle ? Voici une solution que nous a envoyée Béatrice Sandré.

Hodographe d'origine O : cercle de centre C passant par O. La droite Δ est tangente à ce cercle en O' diamétralement opposé à O.
Soit H un point quelconque de Δ. On construit la médiatrice (d) de CH et le point M de cette médiatrice tel que MH soit perpendiculaire à Δ. Par construction, M appartient à la parabole de foyer C et de directrice Δ. De plus, la tangente à la parabole en M est la droite (d) bissectrice de l'angle CMH (propriétés des paraboles).
Soit P l'intersection de CM et du cercle hodographe. D'après la figure ci-dessus, PO' est parallèle à (d) et OP est perpendiculaire à (d).
Le point M remplit donc la condition posée : pour un angle O'CM = α donné, la tangente en M à la courbe est perpendiculaire à OP.
J'ai donc démontré que la parabole est une solution au problème lorsque le point O se trouve sur le cercle hodographe.



■

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2			■						
3					■				
4		■					■		
5								■	
6					■				
7						■		■	
8			■						
9		■		■					■
10						■			
11									

Mots croisés képlériens

Horizontalement

1. C'est Kepler qui, le premier, utilisa ce mot dans le système jovien.
2. Ancien. Histoire de mailles.
3. À nouveau vérifié. Constante pour Kepler si l'intervalle de temps ne change pas.
4. Poèmes. Un (en abrégé) pour la Terre en un an.
5. Orbite pour Kepler.
6. Comme l'*Astronomia* de Kepler. La Seine la reçoit et la traverse.
7. Plats.
8. Un. Les rudolphines sont dues à Kepler.
9. Le Somnium de Kepler s'y passe.
10. La mère de Kepler a dû en entendre plus d'un sur son compte. Présent.
11. La supernova de Kepler en fut un en 1604.

Verticalement

1. Kepler y a vu une supernova en 1604, dans son pied.
2. Petit ou grand dans une orbite képlérienne. Trois pour Kepler. Pas AR.
3. La Terre dans le *Somnium* de Kepler. Celui de Kepler : 58 ans à sa mort.
4. S'il l'est en astronomie, il devra s'intéresser à Kepler. Pronom.
5. Élément ou parti. Initiales de l'astronome qui a donné son nom à la sonde qui étudie actuellement le Soleil au plus près. Celle de Kepler était fragile.
6. Se fait avec des billets. Cru.
7. C'est bien là. Père fondateur des mathématiques.
8. Ce qu'ont toujours les absents. Boris Johnson est passé par là.
9. Les amas ouverts ne le sont pas, les amas globulaires le sont peut-être. mg ?

Solution p. 48