JWST, GAIA... 3e LOI DE KEPLER ET POINT DE LAGRANGE L2

On trouve de nombreux satellites au point de Lagrange L2 : le James Webb Space Telescope dont on a beaucoup parlé et dont on commence à publier les résultats, mais aussi Spitzer et Herschel (eux aussi spécialisés dans l'infrarouge), WMAP et Planck (rayonnement à 3 K), Gaia (astrométrie) et bientôt Euclid (mesure de redshift). Mais qu'a de particulier ce point L2 ?

La troisième loi de Kepler relie la période de révolution d'une planète, notée T, au demi grand axe de son orbite noté a (en gros la distance Soleil planète). Elle s'écrit a^3/T^2 = constante. Elle se démontre simplement à partir de la loi de la gravitation dans le cas simple d'orbites circulaires uniformes (encadré 1).

Encadré 1

Pour une planète située à une distance a du Soleil et orbitant avec une période T :

- l'accélération centripète A est égale à $\omega^2 a$, où ω est la vitesse angulaire (c'est de la cinématique).

Comme ω est égal à $2\pi/T$, on a : $A = 4\pi^2 a/T^2$;

- le champ de gravitation g au point où se trouve la planète est égal à GM_S/a^2 (M_S = masse du Soleil).

En écrivant l'égalité entre les deux, on obtient :

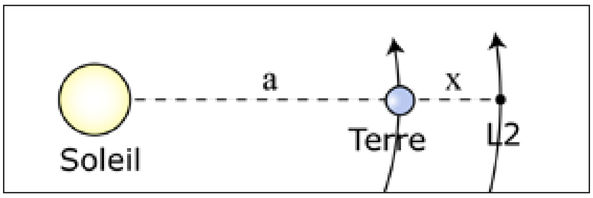
$$\frac{4\pi^2 a}{T^2} = \frac{GM_S}{a^2} \quad \textbf{[1]}$$

ce que l'on peut transformer en $\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{GM_S}{4\pi^2}$

C'est la 3e loi de Kepler généralisée grâce à Newton.

Une conséquence directe est que, plus une planète est éloignée du Soleil, plus sa période est grande.

Venons-en maintenant au JWST : il doit rester aligné avec le Soleil et la Terre en un point appelé point de Lagrange L2.



Pour rester dans cet alignement, il doit donc tourner autour du Soleil en un an comme la Terre. Mais d'après la 3e loi de Kepler, il devrait tourner autour du Soleil en plus d'un an puisqu'il est situé plus loin du Soleil que la Terre. Comment résoudre ce problème ?

La 3e loi de Kepler est valable si on ne considère que l'attraction du Soleil. Or, pour le JWST, il faut également tenir compte de l'attraction de la Terre. La masse de la Terre augmente le champ de gravitation en L2, « obligeant » ainsi le JWST à tourner un peu plus vite. Si on se place à la bonne distance de la Terre, on doit pouvoir obtenir pour le JWST une période d'un an permettant de conserver l'alignement Soleil Terre L2. On peut calculer qu'en plaçant ce point L2 à 1,5 million de km de la Terre, le champ de gravitation dû au Soleil et à la Terre induit une période d'un an, égale à celle de la Terre autour du Soleil (encadré 2).

Pour terminer, précisons qu'il existe 5 points de Lagrange illustrés dans l'article sur le JWST du n° 177 et que le point L2 est instable, le JWST se déplaçant autour de ce point.

Encadré 2

Au point L2 :

- l'accélération centripète A est égale à $\omega^2 r$ avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et $r = a + x$, ce qui donne $A = \dfrac{4\pi^2(a+x)}{T^2}$
- le champ de gravitation g_S dû au Soleil est égal à $\dfrac{GM_S}{(a+x)^2}$
- le champ de gravitation g_T dû à la Terre est égal à $\dfrac{GM_T}{x^2}$
- le champ de gravitation total est donc

$$g_S + g_T = \frac{GM_S}{(a+x)^2} + \frac{GM_T}{x^2}$$

- En écrivant l'égalité entre les deux, on obtient :

$$\frac{4\pi^2(a+x)}{T^2} = \frac{GM_S}{(a+x)^2} + \frac{GM_T}{x^2} \quad \textbf{[2]}$$

Il s'agit d'une équation qui n'est pas simple à résoudre ! On peut la simplifier en divisant membre à membre l'équation [2] par l'équation [1] de l'encadré 1. La période T est identique dans les deux puisqu'on veut que le JWST suive la Terre. Ce qui donne :

$$\frac{a+x}{a} = \frac{a^2}{(a+x)^2} + \frac{M_T}{M_S}\frac{a^2}{x^2}$$

Si on appelle y la valeur de la distance recherchée en unités astronomiques, on a alors $y = x/a$ et l'équation devient :

$$1 + y = \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{M_T}{M_S}\frac{1}{y^2} \quad [3]$$

On voit ainsi que l'équation ne dépend que du rapport des masses de la Terre et du Soleil mais elle reste compliquée à résoudre telle quelle. On utilise alors une approximation. On sait que le JWST est relativement proche de la Terre, donc que y est petit devant 1.

On a alors : $\dfrac{1}{(1+y)^2} \approx 1 - 2y$. L'équation [3] devient :

$$3y = \frac{M_T}{M_S}\frac{1}{y^2} \quad \text{ou} \quad y^3 = \frac{M_T}{3M_S} \quad \text{d'où} \quad y = \sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}}$$

Avec $M_S = 1{,}989 \times 10^{30}$ kg et $M_T = 5{,}974 \times 10^{24}$ kg.

On trouve $y \approx 0{,}01$ UA soit **1 500 000 km** environ. C'est bien la distance donnée dans le littérature.

Merci à Béatrice Sandré pour ses calculs avisés. ■