DES LOIS DE KEPLER À LA LOI DE GRAVITATION DE NEWTON

Béatrice Sandré

Dans les cours de mécanique, les lois de Kepler sont généralement établies à partir des lois de Newton et plus précisément du principe fondamental de la dynamique et de la loi de gravitation universelle.
Mais Kepler (1571-1630) a vécu avant Newton (1643-1727) et a établi ses lois empiriquement grâce aux relevés de position très précis réalisés par Tycho Brahe.

Comme nous allons le montrer, c'est grâce aux lois empiriques de Kepler que Newton a pu établir les caractéristiques de la force de gravitation.
D'après Kepler, les planètes se déplacent dans des plans contenant le Soleil.
Le Soleil et une planète sont assimilés à deux points matériels S et P. Le mouvement de P est étudié dans le référentiel héliocentrique. La position de P est repérée dans le plan de son mouvement par ses coordonnées polaires $r = SP$ et $\theta = (\vec{e_x}, \vec{SP})$.

Les expressions de la vitesse et de l'accélération en fonction des coordonnées polaires r et θ sont rappelées dans l'encadré 1. Pour simplifier les écritures l'opérateur « dérivée par rapport au temps » de la variable x est notée $\dot{x}$.
Nous commencerons par utiliser la deuxième loi de Kepler ou loi des aires. Pendant un intervalle de temps élémentaire dt, l'aire balayée par le rayon vecteur SP est $\frac{1}{2}r^2 d\theta$.

La loi des aires peut donc s'écrire $r^2\dot{\theta} = C$ où C est appelée constante des aires.
Pour exprimer mathématiquement que C est constant au cours du temps, il suffit d'écrire que sa dérivée par rapport au temps est nulle soit :

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$$

$$r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

r n'étant pas nul à chaque instant,

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

La composante orthoradiale de l'accélération (encadré 1) est nulle et d'après le principe fondamental de la dynamique,
la force subie par la planète est colinéaire à $\vec{SP}$.

L'accélération est donc radiale et s'écrit

$$a = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \text{ (encadré 1).}$$

La loi des aires permet de donner son expression en fonction de r et q sans faire intervenir le temps. Il suffit pour cela de remplacer l'opérateur dérivée par rapport au temps $\frac{d}{dt}$ par $\frac{d\theta}{dt}\times\frac{d}{d\theta}$ soit $\frac{C}{r^2}\times\frac{d}{d\theta}$:

$$\dot{r} = \frac{C}{r^2}\times\frac{dr}{d\theta} = -C\frac{du}{d\theta}$$

en posant $u = \frac{1}{r}$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{-C^2}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^3} = C^2u^3$$

$$a = -C^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

L'équation de la trajectoire (r ou u en fonction de θ) permettra de déterminer l'accélération puis la force appliquée à la planète.

La première loi de Kepler précise que l'orbite de la planète est une ellipse de foyer S. L'équation d'une ellipse en coordonnées polaires peut s'écrire (encadré 2) :

$$SP = r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{-e\sin\theta}{p}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{-e\cos\theta}{p}$$

$$a = -C^2u^2\left(\frac{-e\cos\theta}{p} + \frac{1 + e\cos\theta}{p}\right) = \frac{-C^2u^2}{p}$$

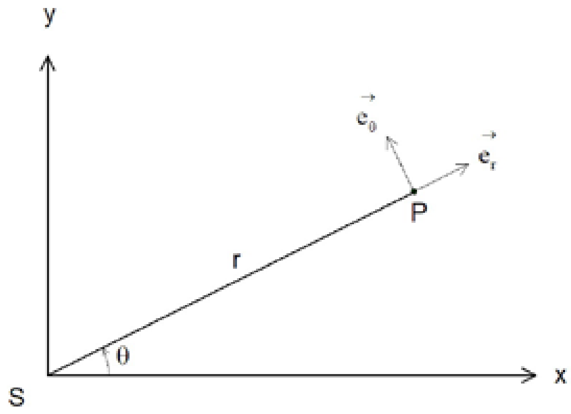
$$= \frac{-C^2}{p}\times\frac{1}{r^2}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, Newton en déduit que le Soleil exerce sur la planète une force attractive (signe – dans l'expression de a), proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$.

C'est la loi de la gravitation universelle.

Encadré 1

Vitesse et accélération en fonction des coordonnées polaires



vitesse de P dans le référentiel Sxy :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

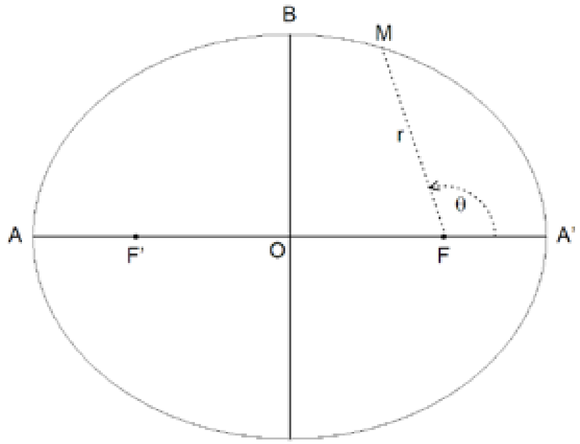
accélération de P dans le référentiel Sxy :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta}$$

La composante selon $\vec{e_r}$ est appelée composante radiale ; la composante selon $\vec{e_\theta}$ est la composante orthoradiale.

Encadré 2

L'ellipse est l'ensemble des points M du plan tels que MF + MF' est une constante.
F et F' sont les foyers de l'ellipse.



Demi-grand axe de l'ellipse OA = OA'= a

Demi-petit axe de l'ellipse OB = b

Distance du centre au foyer OF = c

a, b et c sont liés par la relation $a^2 = b^2 + c^2$

L'excentricité de l'ellipse est définie par $e = \frac{c}{a}$.

C'est un nombre compris entre 0 (cercle) et 1 (segment de droite).

La position d'un point M de l'ellipse est repérée par ses coordonnées polaires r et q définies sur la figure. L'origine q = 0 est choisie lorsque le point M est en A' (périhélie de l'ellipse).

On démontre que si M appartient à l'ellipse, ses coordonnées sont liées par la relation :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} = \frac{p}{1+e\cos\theta}$$

$p = a(1 - e^2)$ est une constante caractéristique de l'ellipse appelée paramètre.

École d'été d'astronomie du CLEA

du 18 au 25 août au centre d'oxygénation de Gap-Bayard

Inscriptions sur le site

du 20 mars 2022 au 30 mai 2022