

# INTRODUCTION À L'ÉQUATION DE KEPLER

Daniel Descout, Deuil-la-Barre

Comment savoir où se trouve une planète sur son orbite à un instant donné ? Le problème n'est pas simple, il faut pour cela résoudre une équation établie par Kepler pour les orbites elliptiques. Après avoir présenté cette équation à partir de la longueur des saisons, quelques méthodes de résolution sont proposées.



Fig.1.

Photographiée en 1990 par la sonde Voyager-I située au-delà de l'orbite de Neptune, la Terre apparaît, selon le mot de Carl Sagan, comme « un grain de poussière suspendu dans un rayon de soleil » (figure 1). Habitants de ce « point bleu pâle », nous essayons, depuis des générations, de comprendre les détails de la course apparente du Soleil devant les autres étoiles.

Johannes Kepler, au début du XVII<sup>e</sup> siècle, a fait un pas de géant en proposant ses trois lois, qui précisent le mouvement des planètes dans un modèle héliocentrique. C'est le dossier de ce numéro des Cahiers Clairaut.

Il a aussi proposé une équation éponyme qui permet de répondre à deux problématiques. D'une part, *connaissant l'orbite d'une planète autour du Soleil, et la position de la planète à une date donnée, en déduire sa position à une date quelconque. D'autre part, avec les mêmes prémisses, et réciproquement, en déduire la date du passage de la planète à une position quelconque de son orbite.*

Après une introduction de l'équation de Kepler à partir de la comparaison des durées des saisons terrestres, nous aborderons quelques méthodes de résolution de cette équation. Les applications astronomiques de l'équation de Kepler feront l'objet d'un article distinct dans un prochain numéro.

## De l'inégalité des durées des saisons astronomiques

La détermination des saisons est le résultat des observations astronomiques de la position du Soleil sur la voûte céleste vue depuis la Terre. La course du centre du Soleil définit l'écliptique. Les intersections de l'écliptique avec l'équateur céleste définissent les deux équinoxes. Les deux solstices correspondent aux instants de l'année

pour lesquels la déclinaison du Soleil est stationnaire. Ces définitions étant données, il suffit de connaître la longitude écliptique du Soleil pour déterminer les quatre événements fixant le début de chaque saison astronomique : longitudes zéro et 180 degrés (ou  $\pi$  radians) pour les équinoxes de printemps et d'automne, 90 degrés (ou  $\pi/2$  radian) et 270 degrés (ou  $3\pi/2$  radians) pour les solstices d'été et d'hiver. Ensuite, le passage d'un référentiel géocentrique à un référentiel héliocentrique permet de situer ces quatre événements comme les passages à quatre positions remarquables de la Terre sur son orbite autour du Soleil (événements représentés sur la figure 2).



Fig.2.

Les durées des saisons astronomiques de l'année 2022 sont issues des données du calculateur de l'IMCCE<sup>1</sup> (notation décimale en jours, notés  $j$ ) :

Hiver 2022 (entre  $S_1$  et  $E_1$ ) : 88,982 j (durée notée  $T_h$  ensuite) ;

Printemps 2022 (entre  $E_1$  et  $S_2$ ) : 92,736 j (durée notée  $T_p$  ensuite) ;

Été 2022 (entre  $S_2$  et  $E_2$ ) : 93,660 j (durée notée  $T_e$  ensuite) ;

Automne 2022 (entre  $E_2$  et  $S_1$ ) : 89,864 j (durée notée  $T_a$  ensuite).

<sup>1</sup> <https://promenade.imcce.fr/fr/pages4/439.html>

L'arrondi au millième de jour correspond à une approximation de l'ordre de la minute.

Les durées des saisons sont inégales, variant de 89 jours pour la plus courte (l'hiver) à plus de 93 jours pour la plus longue, l'été. Ces différences sont dues à la variabilité de la vitesse orbitale de la Terre autour du Soleil, associée à la variabilité de la distance Terre - Soleil (modélisée par Johannes Kepler, et exprimée dans ses deux premières lois ; 1609, *Astronomia nova*).

## La durée des saisons et les lois de Kepler

Première loi : les planètes du Système solaire ont des orbites planes elliptiques dont le Soleil occupe un foyer.

Deuxième loi : le mouvement d'une planète sur son orbite se fait à vitesse aréolaire constante<sup>2</sup>.

La figure 3 illustre les deux premières lois de Kepler. Le plan orbital (écliptique) est un plan considéré comme fixe par rapport aux étoiles extérieures au Système solaire. La constance de la vitesse aréolaire de la Terre peut être traduite par l'égalité des rapports

$$A_1 / (t'_1 - t_1) = A_2 / (t'_2 - t_2) = A / T$$

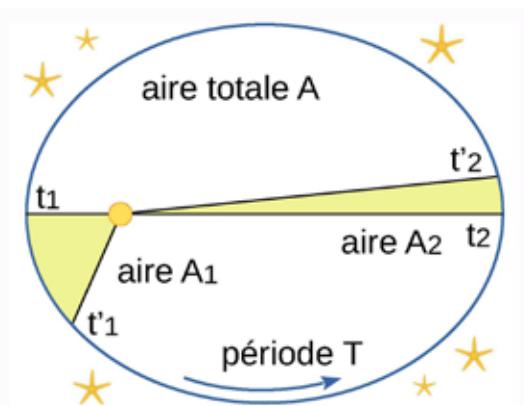


Fig.3.

Pour simplifier, nous admettrons l'égalité de la période orbitale  $T$  et de l'année tropique  $T_{tr}$  sous le même vocable « année » et dont la valeur approchée est celle de l'année julienne de 365,25 jours.

L'application de la loi des aires à la figure 2 permet d'affirmer, en appelant  $S$  le centre du Soleil, foyer de l'ellipse orbite de la Terre, que les durées des saisons sont proportionnelles aux aires des secteurs d'ellipse :  $A(S_1SE_1)/T_h = A(E_1SS_2)/T_p$   $= A(S_2SE_2)/T_\epsilon = A(E_2SS_1)/T_a = A(\text{ellipse})/T_{tr}$ .

En vue de l'introduction de l'équation de Kepler (ci-après), il est commode de simplifier l'analyse en recherchant une configuration de symétrie, dans laquelle la ligne des solstices est confondue avec l'axe des apsides.

<sup>2</sup> Vitesse aréolaire : vitesse de balayage d'une aire par un rayon (wiktionnaire).

Or, la « ligne des équinoxes » ( $E_1SE_2$ ) effectue, par rapport aux étoiles lointaines, une très lente rotation dans le plan de l'écliptique, dans le sens rétrograde : c'est le phénomène de précession des équinoxes. La « ligne des solstices » ( $S_1SS_2$ ), perpendiculaire à la ligne des équinoxes, est animée du même mouvement de précession, à raison de 50,29 secondes d'arc par an, soit environ 1,40 degré par siècle.

En nous décalant vers le passé de quelques siècles, nous trouvons la configuration recherchée pour les années particulières situées vers le milieu du XIII<sup>e</sup> siècle de notre ère (figure 4). Nous choisissons d'appliquer la loi des aires pour l'année 1238 (calendrier julien).

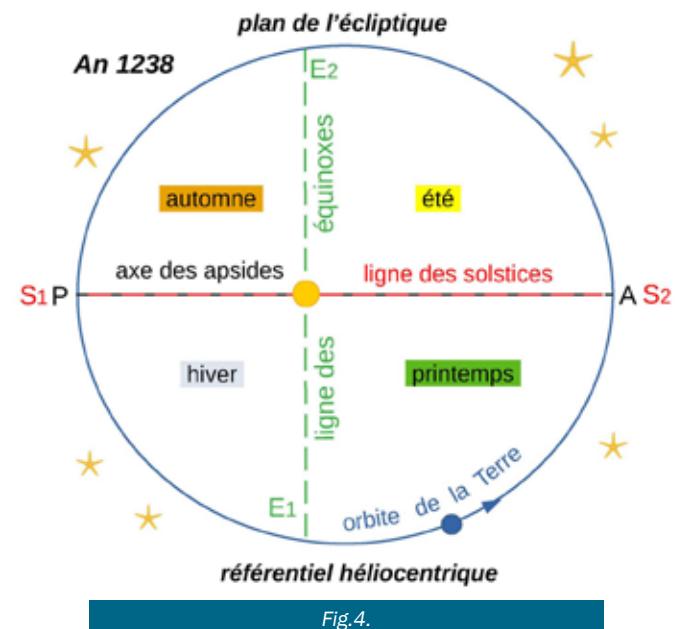


Fig.4.

Par raison de symétrie, les aires  $A(S_1SE_2)$  et  $A(S_1SE_1)$  sont égales ; donc, en théorie, les durées de l'automne et de l'hiver sont égales.

De même, les durées de l'été et du printemps sont égales en théorie car  $A(S_2SE_2) = A(S_2SE_1)$ .

La consultation des éphémérides permet de vérifier ces égalités :

$T_h = 89,333 \text{ j}$  ;  $T_p = 93,291 \text{ j}$  ;  $T_\epsilon = 93,285 \text{ j}$  et  $T_a = 89,329 \text{ j}$ . Soit :  $T_p - T_\epsilon = 0,006 \text{ j}$  ;  $T_h - T_a = 0,004 \text{ j}$  (écart de quelques minutes).

Entre les deux solstices d'hiver consécutifs, l'intervalle est de 365 jours 5 heures 43 minutes.

### Encadré 1

#### Notations et propriétés de l'ellipse (figure 5)

Le grand axe de symétrie est  $[GG']$ , de longueur  $2a$ .

Le petit axe de symétrie est  $[BB']$  de longueur  $2b$ .

Les foyers  $F$  et  $F'$  sont sur  $[GG']$  et équidistants du centre  $O$  de l'ellipse. On note  $2c$  ( $= FF'$ ) la distance focale.

Par définition, *l'excentricité e de l'ellipse est le rapport c/a*. L'excentricité  $e$  est comprise entre zéro (inclus ; cas du cercle) et 1 (exclu ; cas de la parabole).

Pour tout point P sur l'ellipse :  $PF + PF' = 2a$ .  
 Si P est en B,  $BF + BF' = 2a$  et par symétrie,  $BF = a$ .  
 On peut établir plusieurs relations entre a, b, c et e :  
 $a^2 = b^2 + c^2$  ;  $b^2 = a^2(1 - e^2)$  ou  $b = a \cdot \sqrt{1 - e^2}$ .

La perpendiculaire au grand axe passant par F coupe l'ellipse en deux points H et H'. La longueur FH est le paramètre de l'ellipse, noté p.

Dans le triangle HFF' :  $p^2 + (2c)^2 = HF'^2$  ;  
 or  $HF' = 2a - p$  ; donc :  $p = a \cdot (1 - e^2)$ , et  $p = b^2/a$ .

L'équation polaire de l'ellipse, avec FP notée r et l'angle (FX, FP) noté s est :  $r = p/(1 + e \cdot \cos s)$

On passe d'une ellipse à un cercle par une transformation appelée affinité : x est inchangé et y est multiplié par a/b. Ainsi le point P est transformé en K avec  $NK = NP \times a/b$ . Si x est inchangé et y est multiplié par a/b, les aires seront également multipliées par a/b.

Inversement, on passe du cercle à l'ellipse par une affinité de rapport b/a. Les aires étant aussi multipliées par b/a, l'aire du disque  $\pi a^2$  devient  $\pi ab$ .

**L'aire A de la portion de plan intérieure à l'ellipse est le produit  $\pi ab$ .**

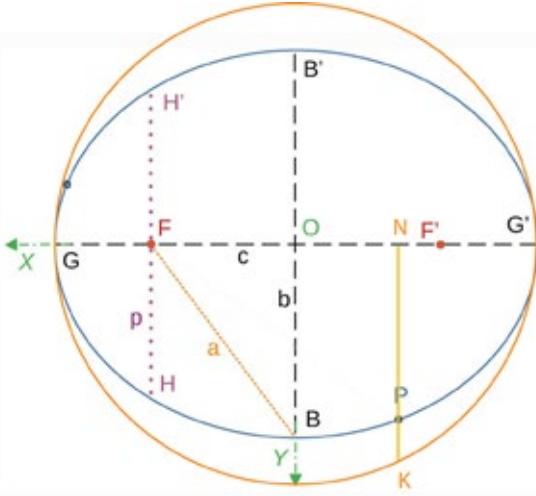


Fig.5.

## Introduction de l'anomalie excentrique (E) d'un point sur une ellipse

La superposition des figures 4 et 5 place le Soleil en F, les équinoxes  $E_1$  et  $E_2$  aux points H et H' de l'ellipse, G est le périhélie et G' est l'aphélie de l'orbite.

La durée (notée  $T_{a+h}$ ) qui s'écoule de l'équinoxe d'automne à l'équinoxe de printemps suivant ; elle est la somme des durées de l'automne et de l'hiver :  $T_{a+h} = T_a + T_h$ .

De la loi des aires, il découle :

$$\frac{A(GHF'H')}{T_{a+h}} = \frac{A(\text{ellipse})}{T} ; \text{ ou}$$

$$\frac{A(GHF'H')}{A(\text{ellipse})} = \frac{T_{a+h}}{T}.$$

Ce rapport, noté R(e) ensuite, est une fonction de l'excentricité e et de l'ellipse, considérée comme une variable. Si e = 0, le foyer F est confondu avec O, l'ellipse est un cercle, les saisons ont la même durée, et R = 1/2. Si e est proche de l'unité (cas des comètes), le foyer F est proche de G, et R est proche de zéro.

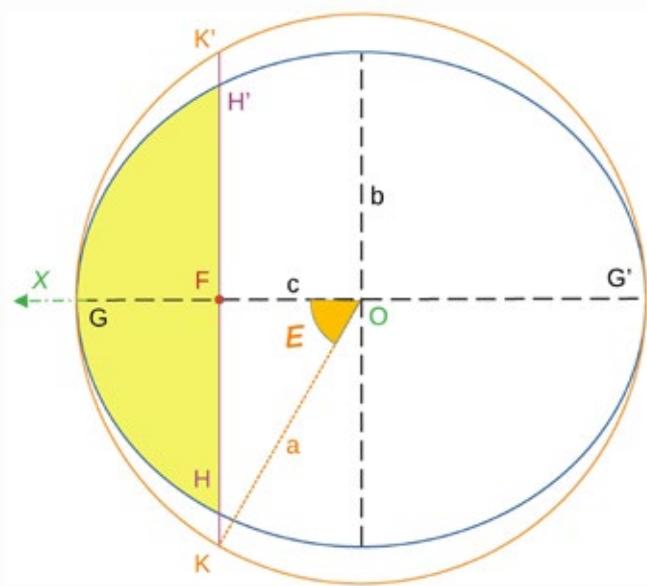


Fig.6.

## Établissement de la relation R(e) (figure 6) :

L'aire A(GHF'H') est celle de la zone en jaune.

Par l'affinité de rapport a/b, (encadré 1) le segment [HH'] est prolongé et devient la corde [KK'] du cercle. Et  $A(GKFK'G) / A(GHF'H') = a/b$ .

Il est possible d'exprimer simplement l'aire de la portion de disque comprise entre l'arc KGK' et la corde KFK' en fonction de l'angle au centre  $GOK$ , noté E. Cet angle (repère orange) est l'anomalie excentrique associée au point H de l'ellipse. Dans l'intervalle de définition de e, E est compris entre zéro ( $e \approx 1$ ) et  $\pi/2$  radian ( $e = 0$ ).

La longueur de la corde [KK'] est égale à  $2 \cdot p \cdot a/b$ , soit  $2b$  (car  $p = FH = b^2/a$ , d'après l'encadré 1)

De manière évidente :  $A(GKFK'G)$

$$= A(\text{secteur circulaire } OKK') - A(\text{triangle } OKK').$$

Or  $A(\text{secteur circulaire } OKK') = (E/\pi) \cdot A(\text{disque})$  soit  $Ea^2$  avec E en radians ;

$$\text{et } A(\text{triangle } OKK') = b \cdot c ;$$

$$\text{On trouve donc : } A(GKFK'G) = E \cdot a^2 - b \cdot c$$

$$\text{Or } b = FK = a \cdot \sin E, \text{ et } c = OF = a \cdot e ;$$

$$\text{donc } A(GKFK'G) = a^2 \cdot (E - e \cdot \sin E) .$$

Comme  $A(GHF'H') = (b/a) \cdot A(GKFK'G)$  et avec  $A(\text{ellipse}) = \pi \cdot a \cdot b$ , on trouve finalement :

$$R(e) = (1/\pi) \cdot (E - e \cdot \sin E) (1).$$

Par définition :  $R(e) = T_{a+h}/T$ .

Par symétrie (figure 4) :  $T_h = T_a = T_{a+h}/2$ .

$$\text{Donc : } E - e \cdot \sin E = 2 \cdot \pi \cdot T_h/T \text{ (en radians).}$$

Cette relation, entre la durée  $T_h$  d'une saison terrestre (hiver) et l'anomalie excentrique E du point équinoxial  $E_1$  (de l'an 1238), peut être généralisée. C'est l'objet du paragraphe suivant.

On peut vérifier la formule (1) avec la valeur de e actuelle :  $e = 0,016710$  (donnée J 2000) ;  $\cos E = c/a = e$  d'où  $E \approx 1,5541$  (rad) et  $R(e) \approx 0,4894$

Par ailleurs, le rapport  $T_{\text{a+h}}/T$ , calculé numériquement avec les durées des saisons de 1238, donne :  $R(e) = 0,4892$ . La comparaison des deux rapports suppose que l'excentricité  $e$  soit constante sur plusieurs siècles. On l'admettra<sup>3</sup>. La différence relative entre ces deux rapports est inférieure à  $5 \cdot 10^{-4}$ .

## L'équation de Kepler

Après avoir introduit précédemment l'anomalie excentrique  $E$  d'un point  $H$  dans un cas particulier, nous étudions ici le cas général. La Terre est en un point  $P$  quelconque de son orbite elliptique (en bleu sur la figure 7).  $P$  est repéré par l'angle polaire  $s(t)$  (angle  $(FX, FP)$ ), et  $r(t)$  ( $= FP$ ), fonctions du temps.

L'angle  $s(t)$  est aussi nommé *anomalie vraie de la planète P*.

Soit  $K$  l'intersection du prolongement de  $[NP]$  au-delà de  $P$  avec le cercle de centre  $O$  et de rayon  $a$ .

L'anomalie excentrique  $E(t)$  est définie comme dans le paragraphe précédent. C'est l'angle au centre  $GOK$ , fonction du temps liée à  $s(t)$ .

La symétrie invite à se limiter à une demi-orbite, par exemple du passage par le périhélie  $G$  (avec  $s(0) = 0$ ) jusqu'au passage par l'aphélie  $G'$  (avec  $s(T/2) = \pi$  (rad)).

La vitesse aréolaire vaut  $\pi \cdot a \cdot b/T$ .

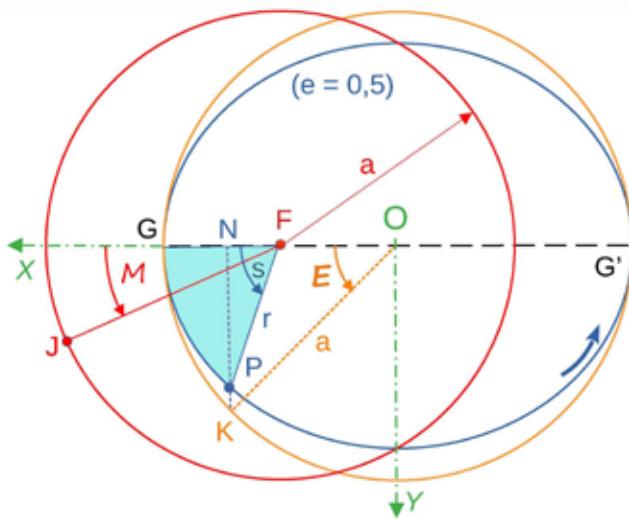


Fig.7.

Comme préalable, on introduit un marqueur graphique de l'écoulement du temps. Pour cela, on ajoute à la figure 6 le cercle (rouge) de centre  $F$  (position du Soleil) et de rayon  $a$ , sur lequel se déplace un astre fictif ( $J$ ) avec une vitesse angulaire constante. La période du mobile  $J$  est égale à  $T$ , la même que celle de la planète  $P$ . Son mouvement est synchronisé avec le mouvement de la planète  $P$  (passages sur l'axe  $OX$  aux instants  $t = 0$ ,  $t = T/2$ ,  $t = T$ , etc.). La vitesse aréolaire de l'astre  $J$  est constante et vaut  $\pi \cdot a^2/T$ .

<sup>3</sup> <https://planet-terre.ens-lyon.fr/ressource/milankovitch-2005.xml>

$J$  est repéré par l'angle au centre *(FX, FJ)*, noté  $M$ , et nommé *anomalie moyenne de la planète P*.

$$M(t) = 2\pi \cdot t/T$$

L'équation de Kepler est la relation suivante entre les anomalies  $E$  et  $M$  (en radians) :

$$E - e \cdot \sin E = M \quad (\text{démonstration encadré 2}).$$

Encadré 2 (figure 7)

### Démonstration de l'équation de Kepler

On exprime d'abord d'une première manière l'aire du secteur elliptique  $FGP$  (colorié en cyan), notée  $A(t)$ . D'après la loi des aires :  $A(t) = \pi \cdot a \cdot b \cdot t/T$ .

On exprime ensuite d'une seconde manière l'aire du même secteur elliptique  $FGP$ , en fonction d'aires de triangles et de secteurs circulaires.

Le rapport d'affinité est  $b/a$ , donc :

$$A(t) = (b/a) \cdot A(FGK) = (b/a) \cdot [A(OGK) - A(OFK)].$$

$$A(OGK) = \pi a^2 \cdot E/2\pi = E \cdot a^2/2.$$

$$A(OFK) = OF \times NK/2 = c \times (a \cdot \sin E)/2 = e \cdot a^2 \cdot (\sin E)/2.$$

$$\text{Donc : } A(t) = (b/a) \cdot (a^2/2) \cdot (E - e \cdot \sin E).$$

L'égalité des deux expressions de  $A(t)$  donne l'équation de Kepler :  $E - e \cdot \sin E = 2\pi \cdot t/T = M(t)$  (c.q.f.d.).

L'équation de Kepler permet en principe de répondre aux *deux problématiques* posées au début de l'article.

Dans le premier cas (l'inconnue est la position de la planète à une date donnée), la grande difficulté vient du fait que la relation entre  $E$  et  $M(t)$  est une équation transcendante. Dans le second cas (l'inconnue est la date de passage de la planète à une position donnée), la résolution de l'équation ne présente pas de difficulté particulière.

La connaissance de  $E$  permet d'établir les valeurs de  $r(E)$  et  $s(E)$  (relations dans l'encadré 3).

Des méthodes de résolution ont été proposées au cours de l'histoire, par Kepler, Newton, Lagrange, et par Halley pour les comètes, et sont encore développées à l'époque moderne avec l'aide des calculateurs.

Encadré 3 **Calcul de  $r$  et  $s$**

#### Expression de $r(E)$

Dans le triangle  $FNK$  (figure 7) :

$$NP = r \cdot \sin s = (b/a) \cdot NK = b \cdot \sin E.$$

$$\text{Et } NF = r \cdot \cos s = ON - OF = a \cdot \cos E - a \cdot e = a \cdot (\cos E - e).$$

$$\text{Donc : } r^2 = NF^2 + NP^2 = a^2 \cdot (\cos E - e)^2 + b^2 \cdot \sin^2 E.$$

$$\text{Comme } b^2 = a^2 \cdot (1 - e^2), \text{ après simplification, on trouve } (r > 0) : r(E) = a \cdot (1 - e \cdot \cos E).$$

#### Expressions des fonctions circulaires de $s(E)$

En remplaçant  $r$  par son expression  $r(E)$  dans la formule  $\cos s = (a/r) \cdot (\cos E - e)$ , on trouve :

$$\cos s = a/r \cdot (\cos E - e)$$

$$\cos s = (\cos E - e)/(1 - e \cdot \cos E) ;$$

$$\sin s = b \cdot \sin E / r = (b/a) \cdot (a/r) \cdot \sin E$$

$$\sin s = \sqrt{(1 - e^2)} \cdot \sin E / (1 - e \cdot \cos E).$$

Avec ces deux relations, et sachant que

$$\tan s = 2 \cdot t / (1 - t^2), \text{ avec } t = \tan(s/2), \text{ on montre que :}$$

$$\tan(s/2) = e \cdot \tan(E/2),$$

$$\text{avec } e = \sqrt{(1 + e)/(1 - e)}.$$

## Résolution de l'équation de Kepler pour les ellipses de faible excentricité ( $e \ll 1$ )

### Forme analytique approchée de $E(M)$

La fonction  $f(t) = M$  est périodique et impaire.

Il suffit de l'étudier sur  $[0, T/2]$ .

En partant de la forme  $E = M + e \cdot \sin E$ , on calcule

$$\sin E = \sin(M + e \cdot \sin E)$$

$$= \sin M \cdot \cos(e \cdot \sin E) + \cos M \cdot \sin(e \cdot \sin E)$$

Comme  $\sin E$  est compris entre 0 et 1,  $e \cdot \sin E$  est considéré comme très inférieur à 1, et l'on prend les équivalents :  $\sin x \approx x$  (en radians) et  $\cos x \approx 1$ , pour  $0 < x \ll 1$ . Alors :  $\sin E \approx \sin M + e \cdot \cos M \cdot \sin E$ .

Il s'ensuit une expression approchée de  $\sin E$  :

$$\sin E \approx (\sin M)/(1 - e \cdot \cos M)$$

De même :  $\cos E = \cos(M + e \cdot \sin E)$

$$= \cos M \cdot \cos(e \cdot \sin E) - \sin M \cdot \sin(e \cdot \sin E)$$

Une première forme approchée de  $\cos E$  est donc :

$$\cos M - e \cdot \sin M \cdot \sin E ; \text{ ou encore :}$$

$$[\cos M \cdot (1 - e \cdot \cos M) - e \cdot \sin^2 M]/(1 - e \cdot \cos M)$$

On obtient donc :

$$\cos E \approx (\cos M - e)/(1 - e \cdot \cos M)$$

Et en combinant les deux formes approchées :

$$\tan E \approx (\sin M)/(\cos M - e)$$

À partir des expressions précédentes, en multipliant numérateur et dénominateur par  $(1 + e \cdot \cos M)$ , et en négligeant les termes en  $e^2$ , on trouve d'autres équivalents, par exemple :

$$\sin E \approx (\sin M) \cdot (1 + e \cdot \cos M)$$

En remplaçant dans l'équation de Kepler  $\sin E$  par cette dernière expression approchée, on trouve finalement :

$$E \approx M + e \cdot \sin M$$

On remarque que la différence  $E - M$  est de l'ordre de grandeur de  $e$ . Comme  $M(t)$  est connu, l'anomalie excentrique  $E(t)$  apparaît ainsi comme une fonction explicite du temps.

### Formes analytiques approchées de $r(M)$ et $s(M)$

Pour trouver une expression simplifiée de  $r$ , on peut calculer la dérivée de  $E(M)$  par rapport à  $M$  de deux manières différentes :

En dérivant l'équation de Kepler, par rapport à  $M$ , il vient :  $dE/dM - e \cdot \cos E \cdot dE/dM = 1$

$$\text{ou : } dE/dM = 1/(1 - e \cdot \cos E) = a/r$$

En dérivant  $E \approx M + e \cdot \sin M$  :  $dE/dM \approx 1 + e \cdot \cos M$

En comparant les deux expressions, il vient :

$$r(M) \approx a/(1 + e \cdot \cos M)$$

$$\text{ou } r(M) \approx a \cdot (1 - e \cdot \cos M)$$

On peut comparer les angles  $s$  et  $M$  en calculant  $\sin(s - M)$  afin d'exprimer  $s$  en fonction de  $M$ .

En développant :

$$\sin(s - M) = \sin s \cdot \cos M - \sin M \cdot \cos s$$

Dans les formules de  $\cos s$  et  $\sin s$  (encadré 3), on remplace

$E$  par son expression approchée en fonction de  $M$ , et on néglige tous les termes de degré supérieur à 1 en  $e$ . On trouve (après un calcul fastidieux) :  $\sin(s - M) \approx 2e \cdot \sin M$ . Et en confondant  $\sin(s - M)$  avec son argument (en radians), finalement :  $s(M) \approx M + 2e \cdot \sin M$ .

## Cas de la Terre

Dans un référentiel géocentrique, toutes les analyses précédentes restent valides, à condition de permute les rôles de la Terre et du Soleil. La Terre est en  $F$ , le Soleil (vrai) est en  $P$ , et  $J$  est un Soleil fictif.

Si l'excentricité de l'orbite apparente du Soleil était nulle, le Soleil vrai serait constamment dans la même direction que le Soleil fictif. Comme l'excentricité de l'orbite est très faible devant l'unité, proche de  $1/60$  ( $e = 0,016\ 710$  actuellement), la direction d'observation du Soleil vrai (FP) au cours de l'année ne s'écarte jamais beaucoup de la direction (FJ) qui permet de suivre le Soleil fictif (sur l'écliptique). Cet écart angulaire est la valeur de l'angle (FP, FJ) (figure 7), soit :

$$s(t) - M(t) = 2e \cdot \sin(2\pi \cdot t/T)$$

*L'écart angulaire  $s(t) - M(t)$  entre le Soleil vrai et le Soleil fictif est l'une des deux composantes de l'équation du temps* (voir Cahiers Clairaut n° 108 page 7). Il est de forme quasi sinusoïdale, avec une amplitude  $2e = 0,033\ 42$  (rad) soit  $1,915^\circ$ . Cette amplitude est associée à un décalage temporel d'environ 7 min 40 s pour les passages des deux soleils au méridien local d'un observateur terrestre (figure 8 ; courbe en tirets bleus).

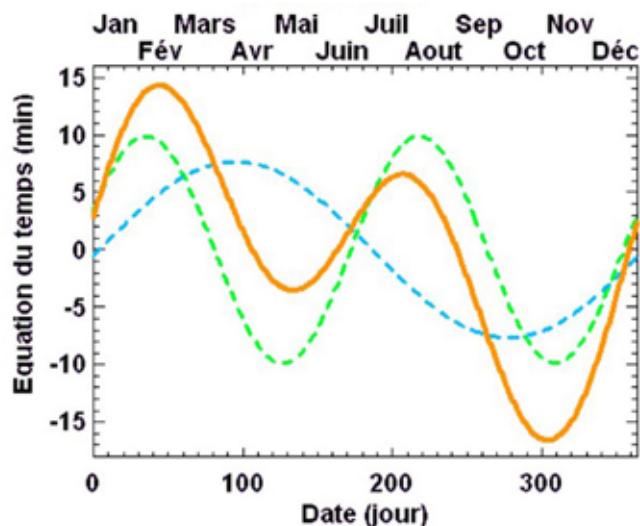


Fig.8. (crédit ASM1; [https://media4.obspm.fr/public/resources\\_lu/pages\\_complements-ephemerides/equation-temps\\_impression.html](https://media4.obspm.fr/public/resources_lu/pages_complements-ephemerides/equation-temps_impression.html))

## Résolution de l'équation de Kepler par la méthode éponyme

(voir le livre de Jean Meeus *Calculs astronomiques à l'usage des amateurs SAF* ; chapitre 20)

Méthode itérative : étude de la suite  $\{u_n\}$  telle que :  
 $u_{n+1} = M + e \cdot \sin u_n$  (termes en radians).

Si cette suite admet une limite  $L$ , celle-ci vérifie :  $L = M + e \cdot \sin L$  ; donc  $L = E$ .

Pour simplifier (choix arbitraires), on choisit :

$$e = 0,5 ; M = \pi/2 \text{ rad (} t = T/4 \text{)} \text{ et } u_0 = 0.$$

Donc  $u_1 = M = 1,570\ 796$  ;

Les termes suivants sont aussi arrondis à  $10^{-6}$  près :

$$\mu \equiv M + e \sin M \equiv \pi/2 + 1/2 \equiv 2.070\,796 \cdots$$

$$u_2 = M + e \sin M - \pi/2 + 1/2 = 2,070$$

soit  $u_1 \equiv \pi/2 \pm (1/2)\cos(1/2) \equiv 2.009.587 :$

$$u_3 = \pi/2 + (1/2)\cos[(1/2)\cos(1/2)] \equiv 2.023429 \dots$$

et ainsi de suite :  $u_1 = 3,019,445$  ; etc.

et ainsi de suite :  $u_5 = 2,019\ 443$ , etc.

Donc :  $E = 3,020,980 \text{ (rad)} = 115^{\circ} 48'$

Donc :  $E = 2,020\ 980 \text{ (rad)} = 115^\circ\ 48'$ .

La figure 9 illustre ce cas particulier.

En utilisant les formules de l'encadré 3, on calcule  $s$  et  $r$ .

Avec la relation entre  $\tan(E/2)$  et  $\tan(s/2)$ , et pour

$$\varepsilon = \sqrt{(1+e)/(1-e)} = \sqrt{3}, \text{ on obtient : } s = 140^\circ 11'.$$

Avec  $r/a = 1 - e \cdot \cos E$ , et  $\cos E = -0,435\ 131$ , on obtient :

$$r/a = 1,217\,565.$$

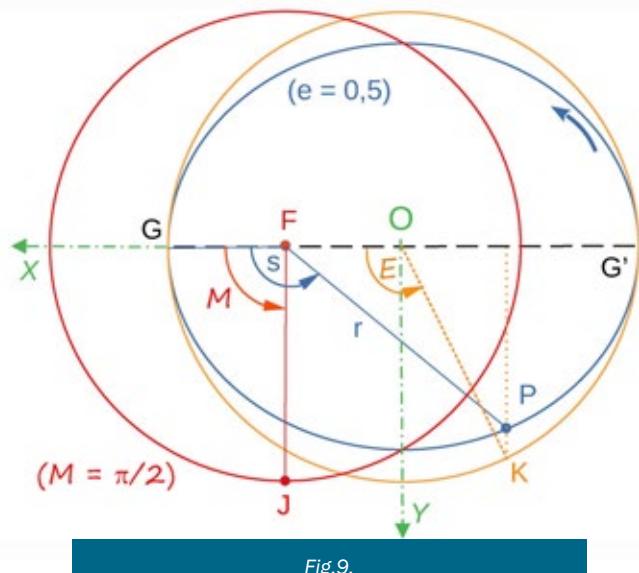


Fig. 9.

Cette méthode est inadaptée au cas des comètes (e proche de 1).

Il existe d'autres méthodes de résolution de l'équation de Kepler qu'il serait trop long de développer ici (méthode de Newton Raphson, méthode de Lagrange). Vous les trouverez en complément de ce numéro dans l'article complet sur le site [clea-astro.eu](http://clea-astro.eu) (cliquer sur CC177).

Les applications astronomiques de l'équation de Kepler consacrées à la comète de Halley et à la sonde Giotto feront l'objet d'un autre article dans un prochain numéro.