

DÉTERMINER LA MASSE DU TROU NOIR SUPERMASSIF SGR A* AVEC LA 3^e LOI DE KEPLER

Frédéric Pitout et Natalie Webb,
Observatoire Midi-Pyrénées / Université Toulouse 3 – Paul Sabatier,
Institut de recherche en astrophysique et planétologie.

Tout indique qu'au centre de notre Galaxie, quelque part dans la constellation du Sagittaire, se trouve un trou noir supermassif nommé Sagittaire A (Sgr A*). Dans cette activité, nous proposons d'utiliser le mouvement de S2, une étoile en orbite autour de ce « monstre » invisible, pour évaluer la masse du trou noir.*

À la surprise de découvrir que dans la direction du centre galactique, dans la constellation du Sagittaire, des étoiles semblaient être en mouvement alors que rien dans les environs n'était visible¹. Avec le temps, le mouvement de ces étoiles s'est précisé : il s'agissait bien d'un mouvement de révolution mais autour de... rien ! Ce « rien » fut un temps appelé matière sombre mais la masse, responsable de ces mouvements d'étoiles, semblait suffisamment localisée pour qu'il s'agisse d'une masse colossale, celle d'un trou noir supermassif nommé Sgr A*. Cette découverte a valu la moitié du prix Nobel de physique 2020² à Reinhard Genzel et Andrea Ghez (l'autre moitié est revenue à Roger Penrose pour des travaux plus théoriques sur les trous noirs).

Mouvement de l'étoile S2

Ces 20 dernières années, les positions des étoiles gravitant autour de Sgr A* ont été plus ou moins régulièrement relevées par différents instruments. En particulier, l'étoile S2 est intéressante car sa période est suffisamment courte pour être suivie. Les scientifiques ont directement accès à deux informations concernant son mouvement : sa position astrométrique dans le « plan » du ciel (en ascension droite et déclinaison) et sa vitesse radiale (en km/s) déduite du décalage spectral par effet Doppler-Fizeau (par ex. Cahiers Clairaut n° 161) de certaines raies d'absorption, dont on connaît la longueur d'onde au repos (λ_0).

La première ne pose pas de problème particulier, il « suffit » de relever la position de l'étoile S2 régulièrement et, pour être plus précis, ôter les effets relativistes dus au trou noir (la courbure de la lumière induit une différence entre position relevée et position réelle).

Pour ce qui est de la vitesse radiale de S2, une raie d'absorption utilisée pour l'évaluer est la 3^e raie de

Brackett de l'hydrogène (Br γ) à $\lambda_0 = 2,166\ 12\ \mu\text{m}$. Elle présente l'avantage d'être dans le domaine infrarouge, donc observable malgré l'opacité (dans le visible) de la région du centre galactique. À titre d'exemple, nous utiliserons ici de telles observations menées avec le télescope Subaru et un spectrographe infrarouge par une équipe menée par Shogo Nishiyama (2018). Les auteurs ont procédé à 3 séries de mesures en mai 2014, août 2015 et mai 2016. La figure 1 montre leurs mesures.

Les courbes rouges sont des ajustements de la raie d'absorption Br γ .

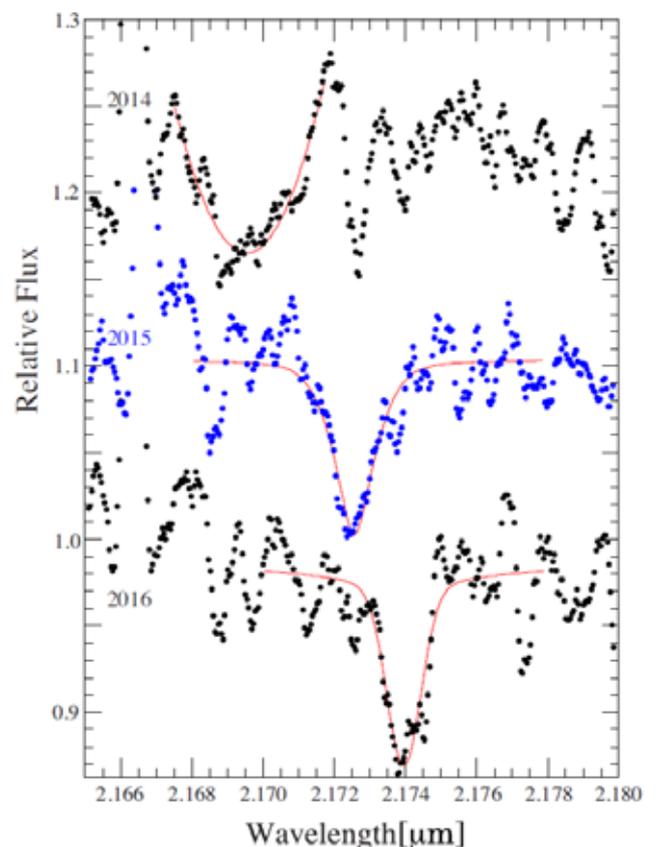


Fig.1. Portions des spectres (mesurés en 2014, 2015 et 2016, et moyennés) mettant en évidence la raie d'absorption Br γ . Un ajustement analytique est indiqué en rouge (Nishiyama et al., 2018).

1 https://www.youtube.com/watch?v=k7xl_zjz0o8
2 www.nobelprize.org/prizes/physics/2020/press-release/

À partir de la figure 1, on peut mesurer les longueurs d'ondes (λ) correspondant aux minima des raies et déduire les vitesses radiales (v_r) correspondantes :

$$v_r = c \left(\frac{\lambda_{S2,obs}}{\lambda_0} - 1 \right)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide, 3×10^8 m/s. Il ne faut pas oublier que les vitesses que l'on va obtenir incluront des composantes indésirables qui ont des causes autres que le mouvement propre de l'étoile observée, comme le mouvement de rotation de la Terre, de révolution de la Terre autour du Soleil et de révolution du Soleil autour du centre galactique. Il faut donc prendre en compte ces mouvements dans un repère idéal de repos nommé étalon de repos local ou *Standard Local of Rest* (SLR) en anglais. La vitesse de ce référentiel par rapport à l'observateur – appelons-la v_{SLR} – peut être calculée en ligne (par exemple : <https://www.gb.nrao.edu/cgi-bin/radvelcalc.py>).

La vitesse radiale corrigée de l'étoile S2 aura alors pour expression : $v_r^{COR} = v_r - v_{SLR}$

Les longueurs d'ondes mesurées et vitesses radiales correspondantes sont reportées dans le tableau 1.

Date et heure (UTC)	$\lambda_{S2,obs}$ (μm)	v_r (km/s)	v_{SLR} (km/s)	v_r^{COR} (km/s)
19 mai 2014, 10:59:48	2,1696	482	-24	506
21 août 2015, 06:36:40	2,1725	884	16	868
19 mai 2016, 13:06:57	2,1739	1078	-25	1103

Tableau.1. Tableau récapitulatif des mesures de longueurs d'onde et vitesses radiales.

En répétant l'exercice plusieurs fois, comme l'ont fait les astronomes ces 30 dernières années, on obtient les positions et vitesses radiales que montre la figure 2. On y trouve dans le panneau de gauche, la position de l'étoile S2 dans le ciel en fonction de son ascension droite et de sa déclinaison.

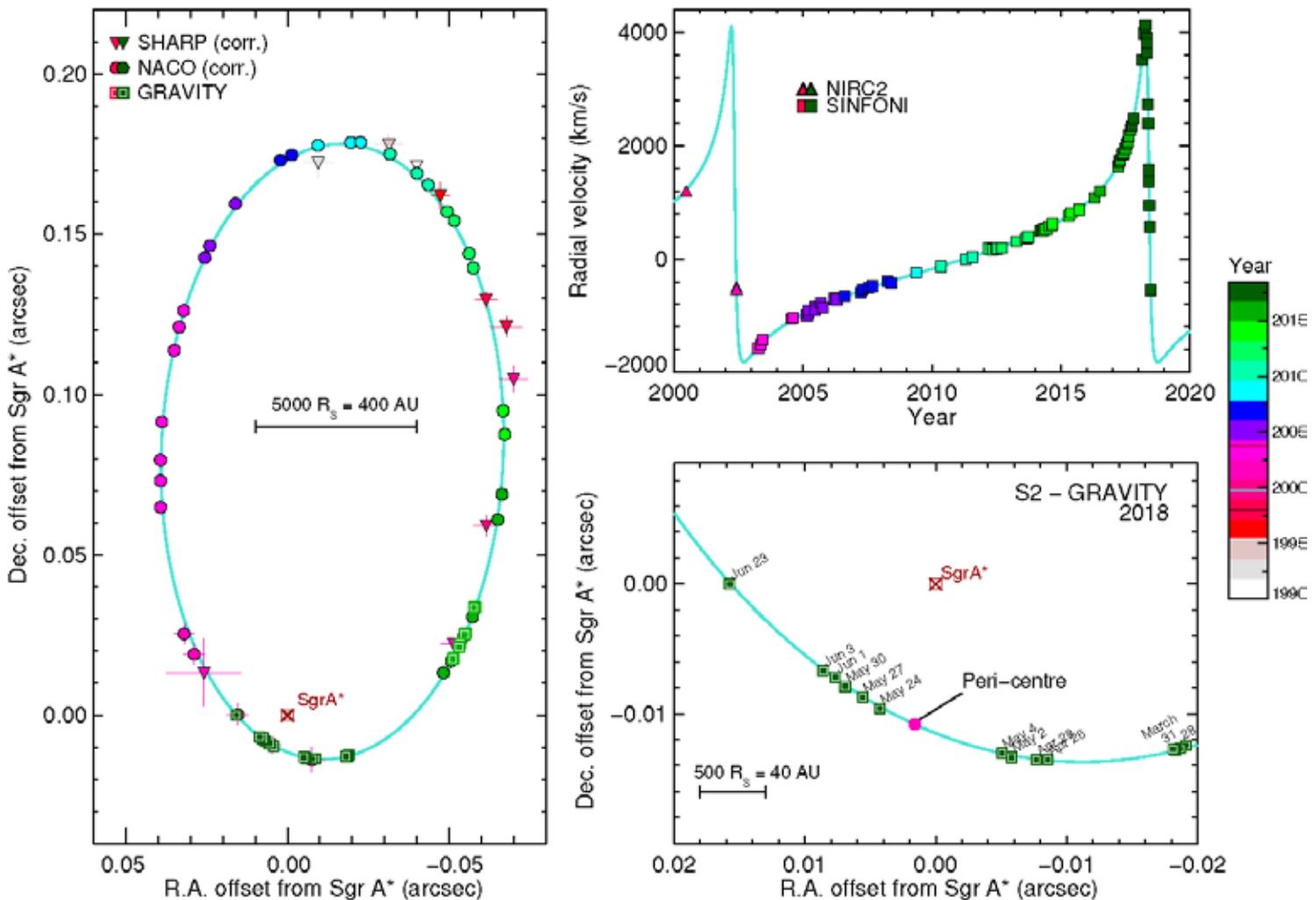


Fig.2. Combinaison de différentes mesures au cours du temps de la position et de la vitesse radiale de l'étoile S2. Les positions astrométriques en seconde d'arc sont données relativement à la position du trou noir Sgr A*. (Abuter et al., 2018).

Avec les dates de chaque mesure on peut se faire une idée de la période de révolution, de la vitesse de l'étoile ainsi que de la position du périastre, et donc de la position approximative de Sgr A*. Mais attention : cette figure est en fait la projection de l'orbite réelle sur le plan du ciel. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder la vitesse radiale de l'étoile, c'est-à-dire la composante qui nous indique si l'étoile s'approche ou s'éloigne de nous.

Le panneau en haut à droite de la figure 2 montre la vitesse radiale mesurée. On voit que les mesures colorées en mauve et violet sur la partie gauche de l'ellipse correspondent à des vitesses négatives, donc l'étoile s'approche de nous. En revanche, la partie droite de l'ellipse comporte des mesures en vert, correspondant à des vitesses radiales positives, donc l'étoile s'éloigne de nous.

Détermination des paramètres d'orbite de l'étoile S2

La période de révolution de l'étoile S2 s'obtient assez facilement à partir de la figure 2 : par exemple, nous constatons que la vitesse radiale (panneau en haut à droite) passe par deux maxima en 2002 et 2018. La période de révolution T de S2 est donc d'environ 16 ans. Évidemment, nous faisons ici une hypothèse importante : que l'orbite est bien képlérienne et que ces deux maxima correspondent au même point de l'orbite de l'étoile. Nous verrons que rigoureusement ce n'est pas le cas mais que c'est une bonne approximation pour notre exercice.

Déterminer le demi-grand axe de l'ellipse décrite par S2 est moins simple pour deux raisons essentiellement. D'abord, nous l'avons évoqué, l'ellipse que semble décrire l'étoile dans le ciel est une projection de l'ellipse réelle. Nous devrions donc reconstruire l'orbite réellement décrite par l'étoile. C'est possible³ mais nous ne ferons pas ici. Nous nous contenterons de raisonner sur l'ellipse apparente, étant entendu que nous sous-estimerons le demi-grand axe vrai et, la période de révolution de S2 étant connue, nous obtiendrons in fine une limite basse de la masse du trou noir. Par ailleurs, pour convertir tout écart angulaire (ce que l'on mesure) en termes de longueur, il nous faut la distance entre le centre galactique et nous les observateurs. Cette distance est notée traditionnellement R_0 .

En pratique, les chercheurs posent toutes les équations dont ils disposent, contenant toutes les inconnues (demi-grand axe, excentricité, inclinaison, masse, distance, etc.) et résolvent le système pour obtenir toutes les valeurs. Ici, pour éviter les difficultés et par souci de gain de temps, nous allons supposer connu R_0 ($R_0 = 8,13$ kpc, voir Abuter et al., 2018).

Sur la figure 2 (à gauche), nous mesurons le grand axe à $0,195$ seconde d'arc. Cet écart angulaire, à la distance de $8,13$ kpc, correspond à un demi-grand axe $a = 1,19 \times 10^{14}$ m.

$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha_r \text{ est l'angle en radian, } a &= d \times \alpha_r \\ d = 8,13 \text{ kpc} &= 8\,130 \times 3,086 \times 10^{16} \text{ m} = 2,51 \times 10^{20} \text{ m} \\ a &= 0,195 / 2 / 3 \, 600 \times \pi / 180 \times 2,51 \times 10^{20} \text{ m} = 1,19 \times 10^{14} \text{ m} \end{aligned}$$

Détermination de la masse du trou noir Sgr A*

Maintenant que nous avons estimé la période de révolution T et le demi-grand axe a , nous pouvons appliquer la 3^e loi de Kepler pour obtenir la masse du trou noir M_\bullet .

$$M_\bullet = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

Avec $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ la constante gravitationnelle.

Nous obtenons une masse M_\bullet de $3,87 \times 10^{37}$ kg, soit $1,97 \times 10^6$ masses solaires.

$$\begin{aligned} T &= 16 \times 365,25 \times 24 \times 3600 \text{ s} = 5,05 \times 10^8 \text{ s} \\ M_\bullet &= 4 \times \pi^2 \times (1,19 \times 10^{14})^3 / (6,67 \times 10^{-11} \times (5,05 \times 10^8)^2) \\ &= 3,87 \times 10^{36} \text{ kg} \\ \text{Masse du Soleil : } M_s &= 1,99 \times 10_{30} \text{ kg d'où} \\ M_\bullet &= 1,97 \times 10^6 M_s \end{aligned}$$

Notons que les mesures les plus récentes donnent un demi-grand axe de $0,125$ seconde d'arc et une masse de $4,10 \times 10^6$ masses solaires (Abuter et al., 2018).

³ Il existe une méthode géométrique pour retrouver le grand axe, décrite par Lucienne Gougouenheim dans son ouvrage Méthodes de l'astrophysique page 240. Vous la trouverez page 25.

Épilogue sur les effets relativistes : précession de Schwarzschild et décalage vers le rouge

Tout comme Mercure autour du Soleil, l'orbite de S2 subit un effet de précession de sorte que le grand axe de son orbite change d'orientation dans le plan orbitale avec le temps et par conséquent, l'orbite n'est pas fermée (figure 3).

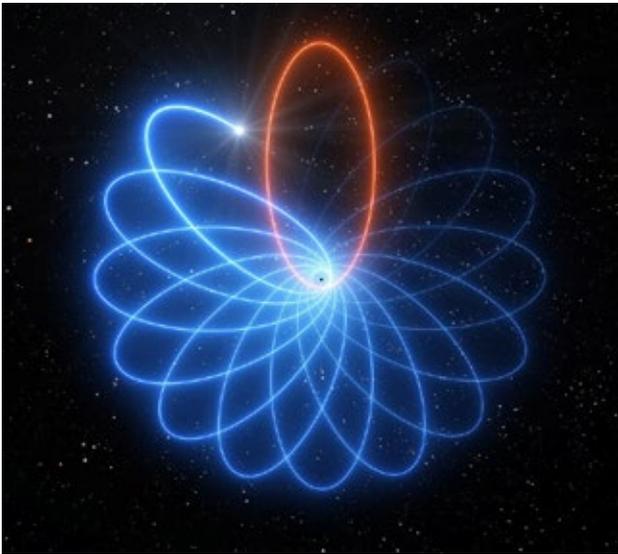


Fig.3. Vue d'artiste de la précession de Schwarzschild contribuant à une orbite ouverte (en bleu) comparée à une orbite purement képlérienne fermée (en rouge). (Avec l'aimable autorisation de l'ESO)

Une partie de cette précession est prévue par la mécanique classique, l'autre contribution est expliquée par la théorie de la relativité générale, c'est la précession de Schwarzschild. Les mesures menées avec l'instrument GRAVITY installé sur le Very Large Telescope (VLT) au Chili ont permis de vérifier cet effet.

Un autre effet décrit par la relativité générale est le décalage vers le rouge de la lumière de l'étoile provoqué par la masse du trou noir. Ce décalage, qui n'est pas imputable au mouvement de l'étoile, a lui aussi été mesuré : quand l'étoile S2 est au plus proche du trou noir, son spectre d'émission se décale vers le rouge.

Références

Abuter, R. et al. (2018), Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole, *A&A*, 615, L15, <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833718>

Causeret, P. (2018), L'effet Doppler-Fizeau, *cahiers Clairaut* n° 161, p. 10).

Nishiyama, S. et al. (2018), Radial velocity measurements of an orbiting star around Sgr A*, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 70, 4, 74, <https://doi.org/10.1093/pasj/psy067>

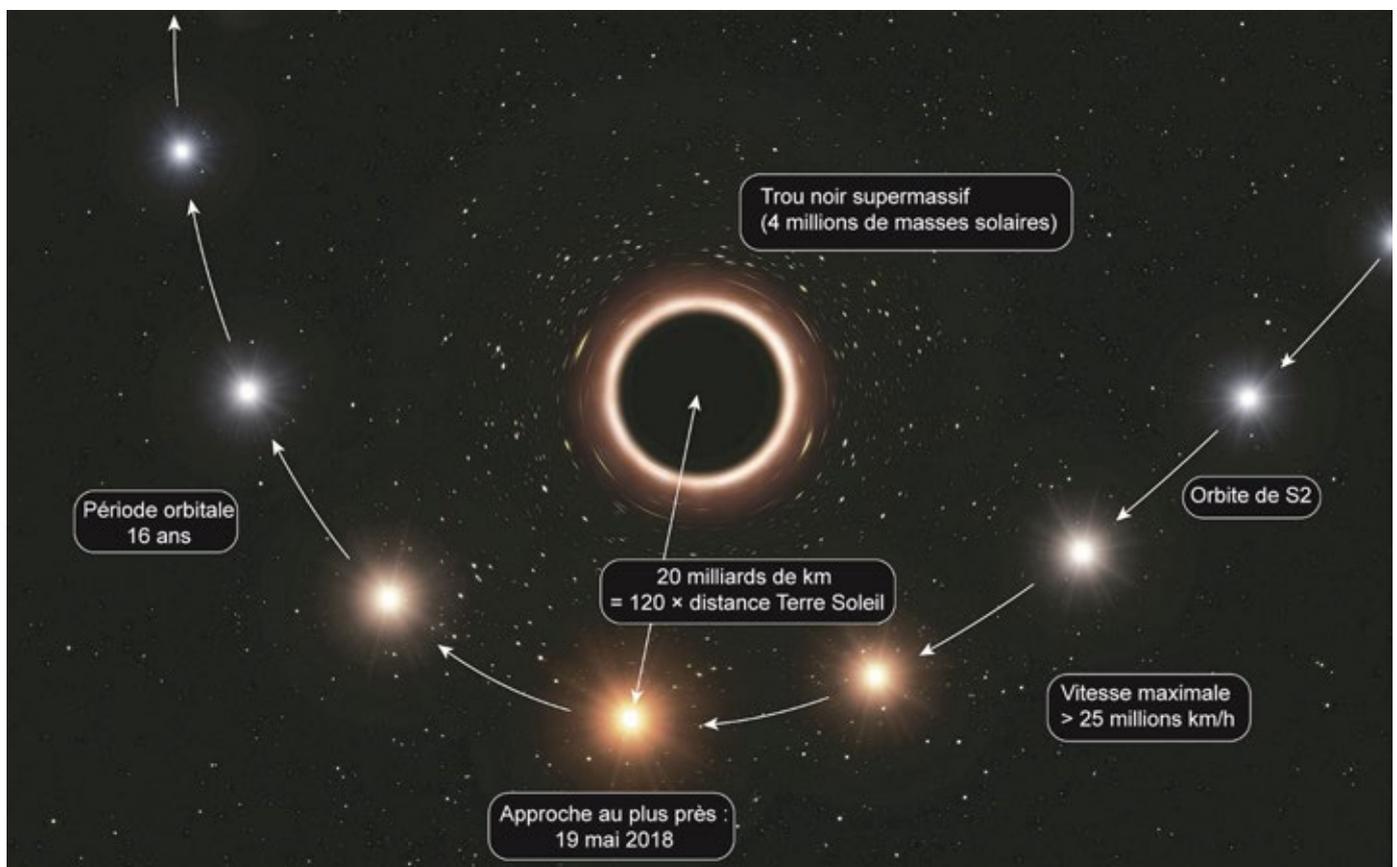


Fig.4. Cette vue d'artiste montre la trajectoire de l'étoile S2 lorsqu'elle passe très près du trou noir supermassif au centre de la Voie lactée. À mesure qu'elle se rapproche du trou noir, le champ gravitationnel très puissant entraîne un léger décalage de la couleur de l'étoile vers le rouge, un effet de la théorie de la relativité générale d'Einstein. Dans ce graphique, l'effet de couleur et la taille des objets ont été exagérés pour plus de clarté. Crédit : ESO/M. Kornmesser.

Reconstitution de l'orbite de l'étoile S2 autour de Sgr A*

Cette méthode est décrite dans l'ouvrage de Lucienne Gouguenheim, *Méthodes de l'astrophysique*, p 241

Fig. 1. L'orbite observée est l'image projetée d'une ellipse (dont le foyer F est Sgr A*) sur un plan perpendiculaire à la ligne de visée.

Fig. 2. Le centre O de l'ellipse est conservé, il est donc projeté au centre O' de l'orbite observée.

On connaît O', projeté du centre de l'ellipse et E', projeté du foyer.

On peut donc tracer le projeté du grand axe.

Les projections conservant les rapports, on peut calculer l'excentricité de l'orbite :

$$e = OF/OA = OF'/OA' = 0,89.$$

Fig. 3. Les projections conservent les milieux et les parallèles. On peut tracer le projeté du petit axe de l'orbite en prenant les milieux de « cordes » parallèles au grand axe.

Fig. 4. Une ellipse peut se tracer en « aplatisant » un cercle par une transformation appelée « affinité » : on doit avoir $IM/IP = b/a = \sqrt{1 - e^2}$.

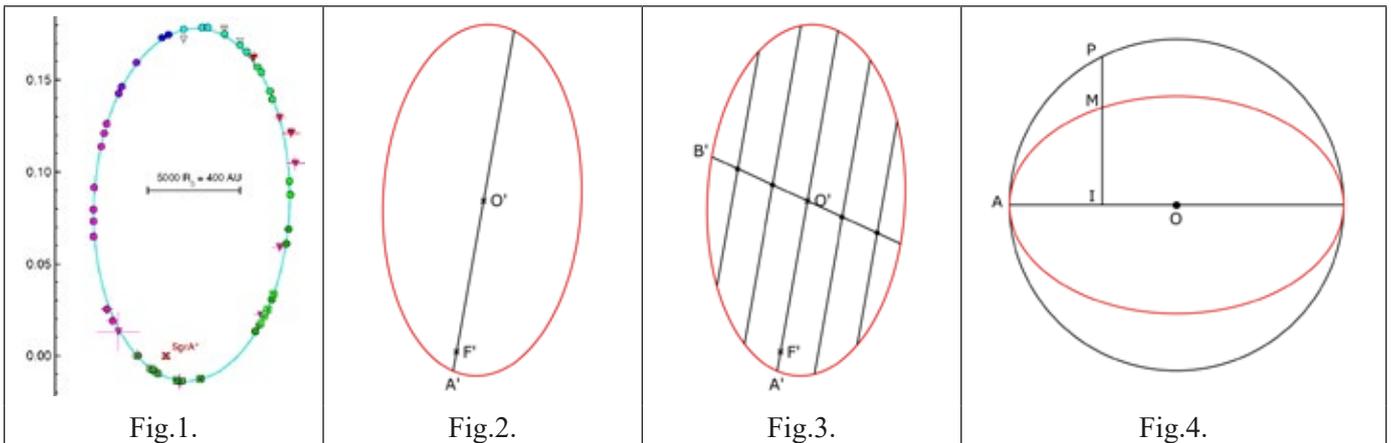


Fig. 5. Inversement, à partir d'une ellipse, on peut construire le cercle principal point par point en multipliant IM par $1/\sqrt{1 - e^2}$.

Avec $e = 0,89$, on trouve 2,2.

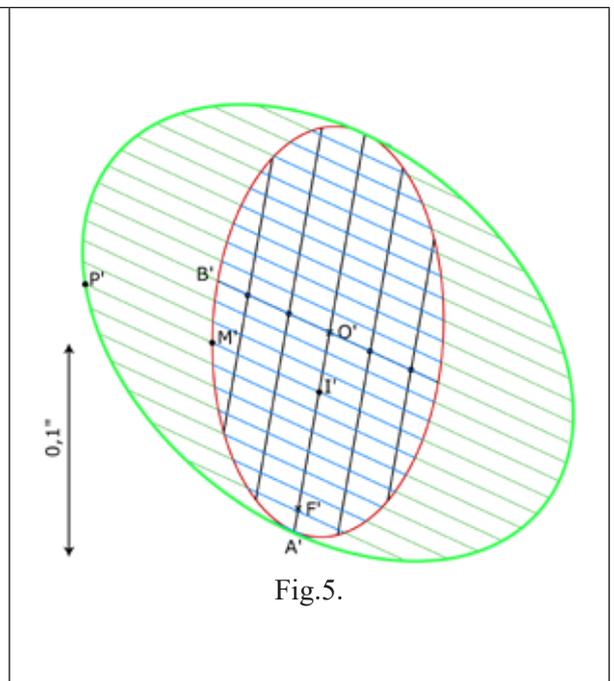
En multipliant IM' par 2,2, on obtient les points du projeté du cercle principal, tracé en vert ici.

L'ellipse verte est le projeté du cercle principal, son grand axe est donc égal au diamètre du cercle principal, lui-même égal au grand axe de l'orbite réelle. En mesurant sur la figure et avec l'échelle en déclinaison, on trouve 0,25".

Connaissant la distance 8,13 kpc, on peut calculer le demi grand axe. On obtient : $a = 1,52 \times 10^{14}$ m.

Cette figure permet également de calculer l'inclinaison de l'orbite : comme l'ellipse verte est le projeté du cercle principal, le rapport de son petit axe sur son grand axe donne le cosinus de l'inclinaison.

On obtient $\cos i = 0,685$ et $i = 46,7^\circ$ (on trouve $133,7^\circ$ dans la littérature – une valeur supérieure à 90° indiquant une révolution rétrograde – ce qui correspond à $46,3^\circ$, très proche du résultat trouvé ici).



Il ne reste plus qu'à effectuer les calculs comme dans l'article pour trouver la masse du trou noir.

On trouve $M = 8,16 \times 10^36$ kg soit $4,1 \times 10^6 M_\odot$.

Fig.6. Reconstitution de l'orbite de l'étoile S2 autour de Sgr A*. On obtient une ellipse d'excentricité 0,89 et de demi grand axe $1,52 \times 10^{14}$ m.

