PETITE HISTOIRE DE LA 3^{e} LOI DE KEPLER

Pierre Le Fur, Toulon

Les trois lois de Kepler fondent la base de l'astronomie moderne. L'histoire de leurs découvertes constitue une étape clef. La troisième loi ne concernait que l'aspect cinématique. Il faudra attendre Isaac Newton pour en donner une interprétation dynamique.

Les publications des ouvrages de Kepler s'étendent de 1595, *Mysterium Cosmographicum* (le Secret du monde), à 1627, *Tabulae Rudolphinae* (les Tables Rudolphines). Cette période est à la charnière entre le monde de la Renaissance et le siècle des Lumières. Elle est scientifiquement dominée par les astronomes et mathématiciens jésuites, comme Clavius, qui viennent d'établir le calendrier du pape Grégoire XIII en 1582, toujours en usage de nos jours. Elle coïncide avec la date de naissance de la physique classique puisque c'est en 1610 que Galilée observa les astres avec sa lunette, et qu'il décrivit ses expériences dans son premier et fameux ouvrage *Sidereus Nuncius*, (le messager des étoiles). L'*Astronomia nova* de Kepler imprimé en 1609 contient les deux premières lois décrivant le mouvement de la planète Mars : trajectoire elliptique autour du Soleil, celui-ci occupant l'un des foyers et la loi des aires qui précise le déroulement temporel du déplacement le long de l'orbite. Douze ans plus tard, Epitome Astronomiae Copernicanae rassemble la généralisation de ces deux lois à toutes les planètes connues de Mercure à Saturne et même aux satellites galiléens de Jupiter récemment découverts. Mais surtout Kepler y présente le fruit de ses travaux achevés dès 1618 : la troisième loi que l'on traduirait dans une écriture moderne, que nous retiendrons, par :

$$T^2/a^3 = \text{constante [1]}$$

si T est la période de révolution sidérale de la planète autour du Soleil et a, le demi-grand axe de son orbite elliptique.

Notons qu'il savait calculer T à partir des observations de la période apparente de la planète et de celle de la Terre. Celles-ci étant essentiellement les résultats obtenus par Tycho Brahé, le génial astronome observateur danois mort en 1601 dont Kepler, grand mathématicien mais piètre observateur, avait pu exploiter les mesures reportées sur ses cahiers d'observations.

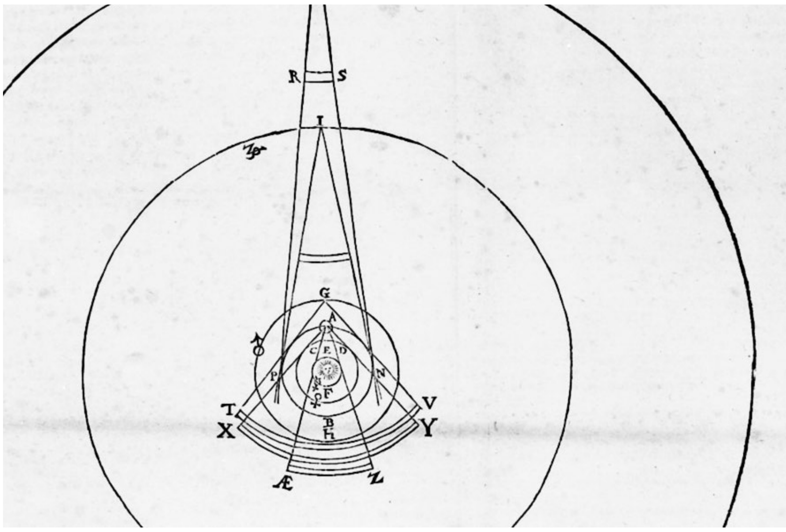

Fig.1. Du Soleil à Saturne, proportions des orbites connues en 1621 et angles sous lesquels on voit les orbites. Par exemple celle de la Terre vue depuis Jupiter ou Saturne. Image tirée de Prodomus dissertationum cosmographicarum par Johannes Kepler 1621 (source https://gallica.bnf.fr/).

Par contre, à cette époque, la valeur réelle de a caractérisant la taille de l'orbite, restait totalement inconnue ! On connaissait uniquement le rapport $a_{planète}/a_{Terre}$. En d'autres termes, si l'unité de a était l'unité astronomique : $a_{Terre} = 1$. Par exemple $a_{Jupiter} = 5{,}2$.

L'approche képlérienne est mathématique donc cinématique. La loi est empirique, sans justification dynamique correcte, qui viendra plus tard avec Newton. Kepler l'écrit sous la forme : « les temps périodiques de deux planètes quelconques sont entre eux en proportion exactement sesquialtère[1] de leur distance moyenne. ». [2]

Cette écriture conduit certains historiens [1] à penser que le mot logarithme est sous-entendu, et que Kepler les a utilisés sous la forme :
$\mathrm{Ln}\,(T_2/T_1) = 3/2\ \mathrm{Ln}\,(a_2/a_1)$ où la proportionnalité apparaît. En effet, John Napier venait de publier sa puissante invention mathématique qu'est le logarithme en 1614. À la fin de l'année 1616, Kepler en a pris connaissance et l'a adopté avec un grand enthousiasme puisqu'il lui a permis de simplifier considérablement ses calculs. Il consacrera

1 Sesquialtère = 3/2.

un ouvrage spécifique aux logarithmes. Puis, lorsqu'il publiera ses éphémérides (*Tables Rudolphines* 1627) il les dédiera à Napier.

La formule de l'harmonie céleste

Avant tout, il apparaît immédiatement que pour Kepler, les planètes tournent autour du Soleil. Très tôt, lors de sa formation par l'astronome Maestlin, dans les années 1590, il avait adopté le modèle du chanoine Copernic (publié en 1543) et abandonné celui de Ptolémée (2e siècle après Jésus Christ), pourtant plus précis à cette époque et validé par les astronomes du pape. Cette conviction s'exprime clairement dans son premier ouvrage *Mysterium Cosmographicum*. L'esthétique de ce modèle correspond parfaitement avec l'état d'esprit de Kepler : très chrétien, puisqu'il se destinait à être pasteur, il y voyait la Sainte Trinité : Dieu associé au Soleil, Jésus-Christ à la sphère céleste et les planètes au Saint-Esprit. Il affirme dès 1595 que « le Créateur, Très Bon et Très Grand s'est référé pour la création de ce monde mobile et la disposition des cieux à ces cinq corps réguliers qui, depuis Pythagore et Platon jusqu'à nos jours, ont acquis une si grande célébrité[2], et qu'il a ordonné en fonction de leur nature le nombre des cieux, leurs proportions et le rapport de leurs mouvements. ». [2].

Dans son esprit, les planètes sont donc placées dans un ordre et à des distances qui traduisent une harmonie divine. Les orbes circulaires des planètes sont inclus dans une série des cinq polyèdres réguliers, du cube pour Saturne, à l'octaèdre pour Mercure. Le langage de Dieu est mathématique et harmonieux.
La première publication de sa troisième loi se fait en 1619 dans *Harmonices Mundi* car elle ajoute à son image du monde un lien pythagoricien donc mathématique entre T et a, comparable à celui existant entre la longueur d'une corde d'instrument musical et la note fondamentale émise. Il y voit une sorte de « musique des sphères » qui s'exprime ainsi.
Notons qu'il a alors abandonné son idée d'enchâsser les orbites dans des polyèdres, il s'est incliné devant les résultats des mesures et de ses calculs (orbites elliptiques et non circulaires).

On retrouve ainsi l'idée d'un modèle (polyèdres « osculateurs ») confronté à une expérience (orbites mesurées) ; ici ce modèle est religieux et philosophique ce qui diffère évidemment très largement des processus de pensée de la science moderne.
Le modèle héliocentrique du chanoine Copernic a été condamné d'abord par Luther et Melanchton en 1541 dès sa prépublication *Narratio Prima*, puis par l'Église catholique en 1616 [4]. C'est l'époque des guerres de religions. Ces condamnations conduisirent aux complexes et douloureuses affaires Giordano Bruno et Galilée, où dogmes, astronomie, politique et jalousies s'entremêlent. L'héliocentrisme fut donc défendu avec courage par Kepler malgré les risques encourus. Cependant, science et religion resteront intimement liées pendant plus de deux siècles, à la recherche de la structure mathématique du monde céleste, image de l'harmonieuse pensée de Dieu.

L'interprétation dynamique de Newton

Kepler échoua dans ses tentatives de développer un modèle cohérent de cause physique aux révolutions des planètes autour du Soleil. Pour lui, la rotation propre

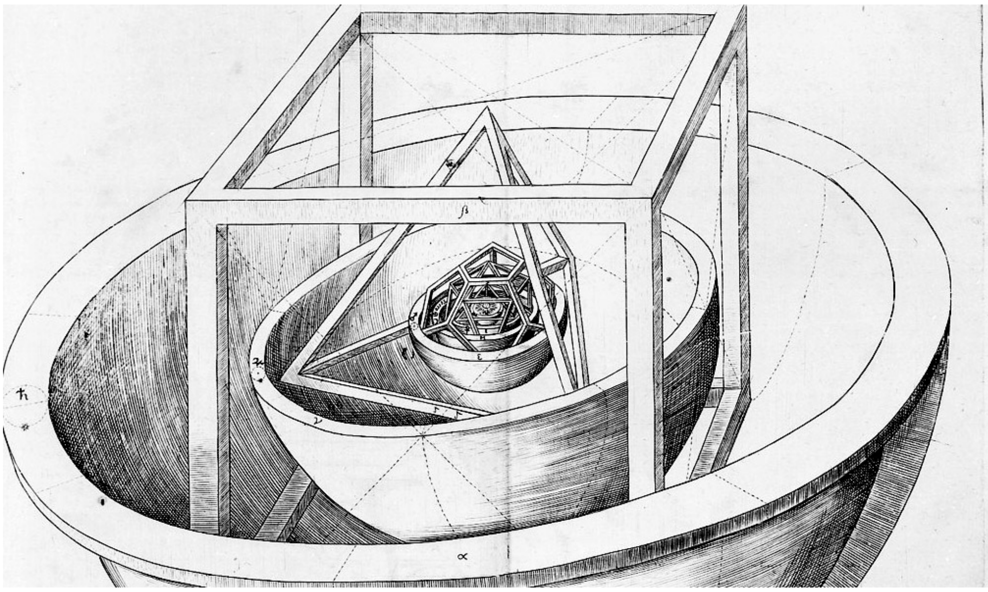

Fig.2. **Polyèdres et orbites tirée de Prodomus dissertationum cosmographicarum par Johannes Kepler (1621). L'orbite la plus extérieure est celle de Saturne, puis on trouve Jupiter, Mars… (source gallica.bnf.fr/BnF)**

2 Cinq polyèdres réguliers.

du Soleil, alors mesurée par les premiers observateurs comme Galilée ou le Père jésuite Scheiner, entraînait les planètes, idée développée plus tard par Descartes dans la théorie des tourbillons.

Il faut attendre 1687 et la publication de l'ouvrage révolutionnaire d'Isaac Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica pour obtenir une interprétation dynamique des mouvements orbitaux des planètes. Entretemps, Kepler était décédé en 1630. Newton y démontre les lois de Kepler à partir de sa seconde loi de la mécanique, qu'on appelle principe fondamental de la dynamique du point (PFD) et avec sa loi de la gravitation universelle (GU) appliquée à l'action à distance du Soleil sur la planète qui est le moteur dynamique du mouvement. Là encore, comme pour Kepler, ses hypothèses sont inspirées d'idées religieuses et alchimistes mais aussi des travaux scientifiques de Galilée, entre autres.

Cette troisième loi de Kepler s'obtient très simplement dans le cas d'une orbite circulaire, comme la Terre (en première approximation) :

- (PFD) $F = m\gamma$ où γ est l'accélération et m la masse de la planète. Les mathématiques (cinématique) donnent $\gamma = 4\pi^2 a/T^2$ pour le mouvement circulaire uniforme. Soit $F = m\, 4\pi^2 a/T^2$
- (GU) $F = G\, mMs/a^2$ où Ms est la masse du Soleil et G la constante de gravitation universelle dont la valeur numérique est liée aux unités choisies.

En comparant les deux expressions possibles de F, on obtient :

$$T^2/a^3 = 4\pi^2 / (GMs)$$

C'est la nouvelle expression de la troisième loi de Kepler où la constante est enfin explicitée et où on observe qu'elle est valable quelle que soit la masse m de la planète[3].

Cette démonstration simple est souvent présentée aux étudiants en quelques minutes alors qu'elle représente des années de travaux acharnés des plus grands physiciens du XVII^e siècle. Newton ne s'est évidemment pas contenté du cas simpliste d'une orbite circulaire. Son œuvre aboutit aux trois lois de Kepler dans le cas général. Pour cela il a dû mettre au point des méthodes mathématiques originales pour intégrer les équations différentielles du mouvement. Ce n'est que vers 1830 que le mathématicien-astronome Jacques Binet proposa une méthode rapide enseignée aux étudiants de premier cycle.

La dernière étape

Il apparaît clairement qu'en mesurant T, a, G on peut accéder aisément à la masse Ms du Soleil. Depuis les mesures de la parallaxe de Mars par Cassini et Richer en 1672, les astronomes avaient enfin accès aux valeurs des demi-grands axes a des orbites. La valeur de l'unité astronomique avait donc été calculée : 1 UA= a_{Terre} = 138 millions de km en unités modernes [5]. Rappelons que la valeur actuelle est 149,6 millions de km. Contrairement à Kepler, Newton avait donc connaissance de la taille réelle du Système solaire jusqu'à Saturne.

Notons que cette détermination associée à l'observation d'un décalage temporel entre les observations des éclipses des satellites galiléens de Jupiter et leurs éphémérides calculées, avaient conduit l'astronome danois Ole Roëmer, sous la direction du même Cassini, à calculer la vitesse de la lumière en 1676 : c = 260 000 km/s [5].

Malgré ces progrès considérables la troisième loi de Kepler contenait toujours une inconnue : la constante de gravitation universelle G ! Newton mourut en 1727 sans avoir une idée précise de sa valeur tant elle était difficile à déterminer.

Il faut attendre 1798 pour que l'anglais Henry Cavendish (né en 1731 à Nice) parvienne à mesurer G au laboratoire en utilisant une balance de torsion ultrasensible. Les forces de gravitation réciproques mais infimes de deux masses sphériques de plomb sont déduites du couple qu'elles exercent. Connaissant la distance entre les centres des sphères il en déduisit G. La balance utilisée avait été inventée auparavant par John Michell un astronome-géologue anglais.

Cent quatre-vingts années de travaux théoriques et pratiques, longs et complexes ont été nécessaires pour maîtriser la physique contenue dans l'une des formules les plus importantes de l'astronomie classique, la troisième loi de Kepler.

Épilogue

Ainsi les masses du Soleil, de la Terre et de toutes les planètes possédant au moins un satellite naturel furent connues au début du XIX^e siècle. Actuellement, cette loi reste également applicable aux satellites artificiels de la Terre. Mais l'histoire n'est pas complète si l'on omet de signaler la généralisation de cette loi dans le cas où les astres en interaction gravitationnelle ont des masses d'ordres de grandeur proches comme pour les étoiles doubles ou les couples étoile – exoplanète fortement massives. Ce que l'on appelle le problème à deux corps. En ce début d'année 2022, rendons hommage à Kepler, le visionnaire, né il y a 450 ans. Sa troisième loi reste l'une des plus belles formules de la physique. L'apprendre par cœur peut être comparé à l'apprentissage d'un poème de Baudelaire…

■

[1] https://mathpages.com/rr/s8-01/8-01.htm

[2] « Science classique et théologie », Robert Locqueneux chez Vuibert, 2010, collection adapt-Snes, p15.

[3] « Ciel passé, présent », Gilbert Walusinski chez Etudes vivantes, Paris-Montréal, 1981, p72.

[4] idem p 62.

[5] https://www.observatoiredeparis.psl.eu.

3 Cette formule est valable si la masse m de la planète est petite devant Ms, la masse du Soleil.