

Quadrant des sinus et déclinaison du Soleil

David Alberto, professeur de physique-chimie, Le Havre

Le quadrant des sinus est un instrument mathématique ancien permettant de lire directement des valeurs approchées du cosinus et du sinus d'un angle entre 0 et 90°. Comme son nom l'indique, il a la forme d'un quart de cercle ; il est parfois muni d'un système de visée des astres (mesure de hauteur) et d'un fil à plomb. Ce type d'instrument était utilisé par les astronomes arabes dès le 9^e siècle. Cet article explique comment le quadrant des sinus permet de déterminer la valeur de la déclinaison du Soleil, à une date choisie. La détermination ne se fait pas par mesure, mais par une sorte d'abaque.

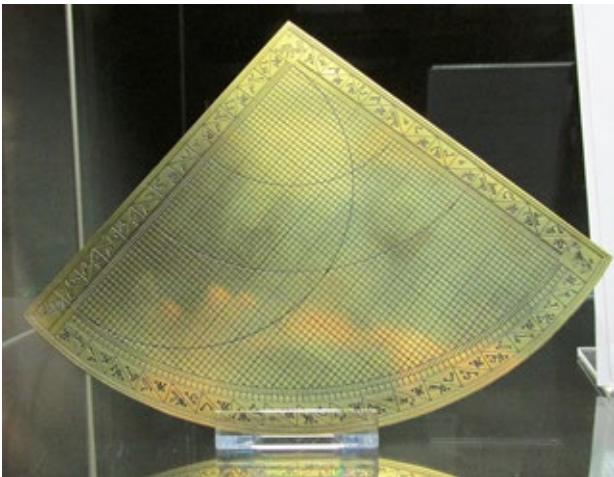


Fig.1. Quadrant des sinus, musée d'histoire des sciences d'Istanbul (image brewbooks/wikimedia).

Principe de la lecture des sinus et cosinus

Le quadrant porte deux séries de graduations sur les bords droits, allant de 0 à 60. Le bord courbé est gradué en degrés. Le quadrillage est parcouru de deux demi-cercles et d'un petit quart de cercle centré sur l'origine des graduations droites (voir figure 2). Un fil fixé au coin de l'instrument sert de repère mobile.

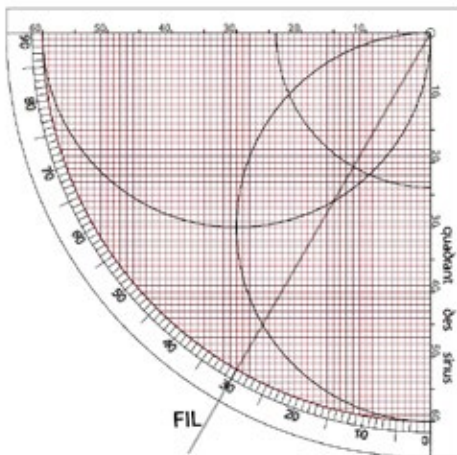


Fig.2. Les lignes d'un quadrant des sinus.

Le principe de la lecture des sinus est simple. On veut par exemple connaître la valeur de $\sin(60^\circ)$:

- on tend le fil sur la graduation 60° (figure 3) ;
- on repère le point où le fil coupe l'arc gradué en degrés ;
- on suit l'horizontale jusqu'à la graduation. On lit « 30 », c'est-à-dire 30/60 soit 0,5.

Pour le cosinus, on suit la verticale jusqu'à l'autre graduation, ce qui donne 52/60, une valeur approchée de $\sqrt{3}/2$.

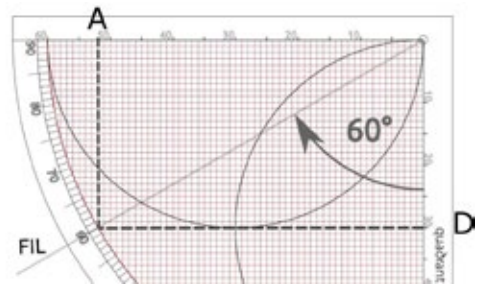


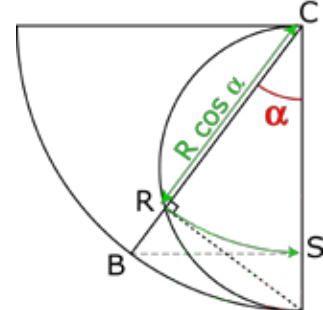
Fig.3. Le sinus (en A) et le cosinus (en D) de 60° .

Remarque

Les deux demi-cercles visibles sur le quadrant fournissent une méthode alternative à la précédente.

Fig.4. Utilisation d'un des demi-cercles pour le cosinus.

Au lieu de projeter B en S, on fait coulisser une perle sur le fil en R, à l'intersection de celui-ci et du demi-cercle. Pour lire la valeur du cosinus, on ramène le fil verticalement et la perle se retrouve en S. Pour le sinus, on utilise l'autre demi-cercle.



Pourquoi les graduations rectilignes ont-elles pour valeur limite « 60 » ?

Comme on l'a vu, cette valeur sert de dénominateur pour la fraction lue. On peut supposer que les

nombreux diviseurs de 60 facilitent certains calculs ou simplifications. De nos jours, un dénominateur 100 nous paraîtrait plus familier, et fonctionnerait également¹.

À quoi sert le petit quart de cercle visible sur de nombreux quadrants des sinus ?

Ce quart de cercle est parfois appelé «*arc d'obliquité*». C'est précisément cet élément qui ajoute à l'instrument une fonctionnalité pratique pour l'astronome : la détermination de la déclinaison du Soleil, à une date donnée.

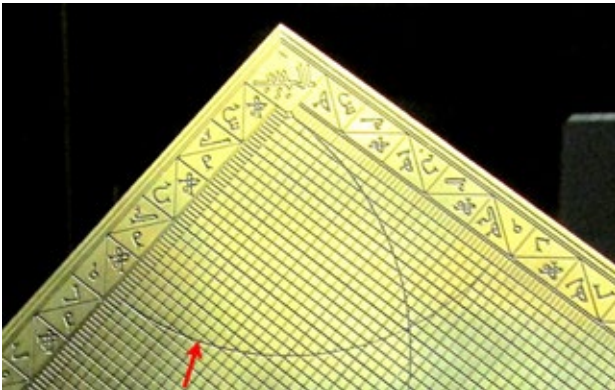


Fig. 5. L'arc d'obliquité.

Pour comprendre son utilisation, il est nécessaire de rappeler la définition de certains angles en astronomie.

Angles astronomiques : longitude écliptique, obliquité et déclinaison

Le plan de l'écliptique, que parcourt le Soleil vu depuis la Terre durant l'année, est incliné par rapport au plan de l'équateur d'un angle $\varepsilon = 23,4^\circ$ (obliquité de l'écliptique)². Ces plans donnent chacun lieu à un système de repérage³ de la position du Soleil au cours de l'année (figure 6).

On note λ la longitude écliptique du Soleil, comptée dans le plan de l'écliptique. Cet angle a pour origine le point vernal, noté γ (voir figure 6). Par définition, c'est à l'équinoxe de printemps que le Soleil passe par le point vernal ($\lambda = 0^\circ$).

On définit également la déclinaison du Soleil, notée δ , comme l'angle entre la direction du Soleil et le plan de l'équateur (cet angle est pris dans un plan perpendiculaire au plan de l'équateur passant par les pôles). Au cours de l'année, la déclinaison du

1 Précisons qu'à l'époque de ces premiers quadrants, on utilisait des fractions mais encore pas de nombres décimaux, ni de nombres négatifs.

2 Aujourd'hui, l'obliquité de l'écliptique vaut $23,4^\circ$, elle était de $23,6^\circ$ au 9^e siècle,

3 Voir par exemple le n° 155 des Cahiers Clairaut (2016).

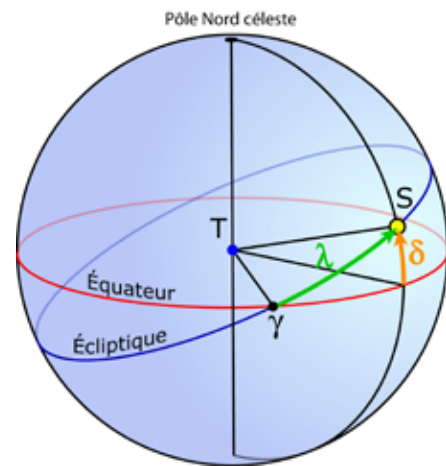


Fig.6. Longitude écliptique λ et déclinaison δ du Soleil.

Soleil est tantôt positive, tantôt négative, ses valeurs extrêmes étant $+ 23,4^\circ$ et $- 23,4^\circ$.

Ces deux angles sont liés par la relation :

$$\sin \delta = \sin \lambda \times \sin \varepsilon \quad (1)$$

Le calendrier zodiacal qui figure dans nombre d'instruments astronomiques anciens, décomposait l'année en 12 signes de 30 degrés.

Un découpage sans correspondance avec les 365 jours de notre année civile, mais bien commode pour relier la date à la longitude écliptique :

- $\lambda = 0^\circ$: premier jour du Bélier (20 mars)
- $\lambda = 30^\circ$: premier jour du Taureau (20 avril)
- $\lambda = 60^\circ$: premier jour des Gémeaux (21 mai)
- etc., à raison d'environ un degré par jour⁴.



Fig.7. Calendrier du zodiaque, calendrier civil et longitude écliptique du Soleil λ .

La connaissance de la déclinaison du Soleil est un paramètre utile en astronomie. Il permet par exemple de déterminer la hauteur méridienne du Soleil, c'est-à-dire sa hauteur maximale au cours de la journée. Mais comme la déclinaison varie de jour en jour, il était pratique d'avoir une méthode pour la déterminer sans transporter sur soi un tableau de 360 ou 365

4 Ces dates peuvent varier d'un jour d'une année à l'autre.

valeurs. C'est ce qui permet le quadrant des sinus et son arc d'obliquité.

Procédure pour une longitude écliptique inférieure à 90°

Supposons que l'on se trouve le 30 avril, le Soleil est au dixième degré du Taureau. La longitude écliptique vaut alors 40° (30° pour le signe du Bélier + 10°).

- (1) On place le fil du quadrant sur l'angle 40° (longitude écliptique) ;
- (2) on repère l'intersection du fil avec l'arc d'obliquité ;
- (3) on suit la grille dans la direction « verticale » (voir figure). On lit alors directement la déclinaison du Soleil (dans cet exemple, un peu moins de 15°).

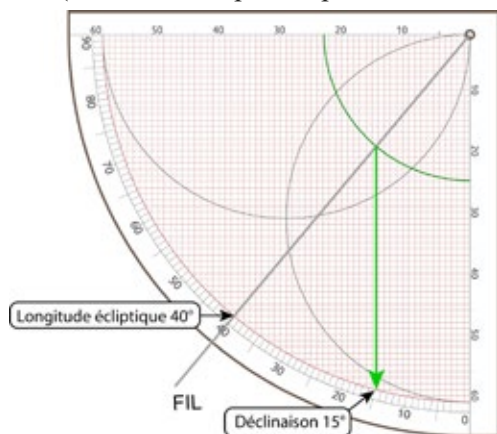


Fig.8. Lecture de la déclinaison du Soleil sur le quadrant.

Afin d'expliquer comment cette procédure fonctionne, rappelons la formule notée (1) vue plus haut :

$$\sin \delta = \sin \lambda \times \sin \varepsilon \quad (1)$$

L'instrument doit donc réaliser une multiplication par $\sin \varepsilon$ pour passer de la longitude à la déclinaison. Ensuite, il faut remarquer deux triangles homothétiques, ABC et EFC, qui apparaissent lors de la lecture de l'angle sur le quadrant (figure 9) :

$$\frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CB} \quad (\text{théorème de Thalès}).$$

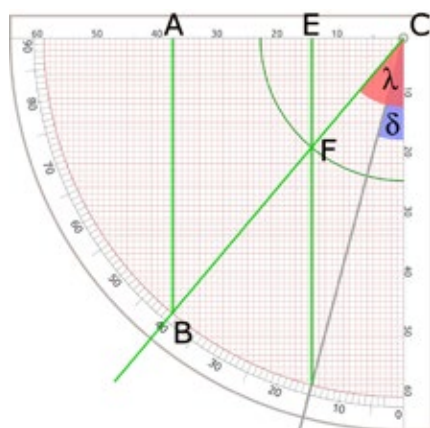


Fig.9. Justification de la construction.

$$CE = R \sin \delta ; CA = R \sin \lambda ;$$

$$CF = r \text{ (rayon de l'arc d'obliquité)} ; CB = R.$$

$$\text{On obtient } \frac{R \sin \delta}{R \sin \lambda} = \frac{r}{R} \text{ donc } r = \frac{R \sin \delta}{\sin \lambda}.$$

On veut que la relation (1) soit vérifiée. On remplace $\sin \delta$ par $\sin \lambda \sin \varepsilon$ et on obtient :

$$r = \frac{R \sin \lambda \sin \varepsilon}{\sin \lambda} = R \sin \varepsilon$$

$r = 60 \sin 23,4^\circ \approx 23,8$. C'est bien le rayon du quart de cercle sur l'instrument.

On peut vérifier avec l'exemple numérique pris ci-dessus, avec $\lambda = 40^\circ$.

On a : $\delta = \arcsin(\sin 40^\circ \sin 23,4^\circ)$, ce qui donne en degrés $\delta \approx 14,8^\circ$

Sur l'instrument, on lit bien un peu moins de 15°.

Les valeurs de déclinaison lues sur le quadrant ne diffèrent pas de plus de 0,5° de la valeur calculée.

Qu'en est-il pour les dates où la déclinaison est supérieure à 90° ?

Une fois atteinte la valeur 90° de longitude écliptique (solstice d'été, 20 ou 21 juin), il faut redescendre l'échelle des angles. Par exemple, pour la date du 1^{er} juillet (ou dixième degré du Cancer), $\lambda = 100^\circ$. On place le fil sur l'angle 80° (car depuis 90°, on redescend de 10°). La valeur de la déclinaison obtenue sera la même que pour la date de longitude 80°.

Au-delà de l'équinoxe d'automne (22 ou 23 septembre, ou premier degré de la Balance), la valeur de la longitude continue d'augmenter (de 180 à 270°). Sur le quadrant, on remonte l'échelle des angles, de 0 à 90°. À partir du solstice d'hiver, on descend à nouveau l'échelle des angles. Il faut se souvenir que la déclinaison est négative (ou sud) en automne et en hiver.

Ainsi, en parcourant quatre fois ce quadrant, on aura décrit une année de course du Soleil autour de la Terre.

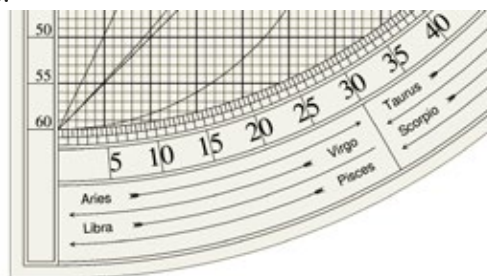


Fig.10. Sur ce quadrant des sinus moderne, les mois zodiacaux ont été placés sur le bord incurvé, afin de faciliter le décompte de ces allers et retours. Image Timothy Mitchell (www.astrolabproject.com).

Bibliographie, sitographie

Les instruments de l'astronomie ancienne, Ph. Dutarte. Éd. Vuibert.

<http://astrolabproject.com/downloads/quadrants/SineQuadrantHandoutVersion1.pdf>