

AVEC NOS ÉLÈVES

Ateliers sur la triangulation en intérieur ou en extérieur

Véronique Hauguel

Au cours des écoles d'été du CLEA, plusieurs ateliers ont été proposés aux stagiaires pour comprendre comment, à partir de triangles, on peut trouver de longues distances pour établir des plans et même pour trouver le périmètre de la Terre. Un atelier ludique accessible aux élèves de collège se fait dans une salle de cours. Un autre atelier demande un peu de préparation et un grand terrain. Il est réalisable avec des élèves de lycée et utilise les formules de trigonométrie dans le triangle et un tableau.

Atelier en intérieur

(niveau collège)

Matériel :

- feuilles avec l'instrument de visée à découper ;
- drapeaux avec pique à brochettes et papier ;
- règle graduée, rapporteur, crayon et gomme ;
- une barre de 2 mètres¹.

Éventuellement :

- une feuille avec le schéma et le tableau à remplir.

L'abbé Picard a proposé à son équipe de mesurer avec soin et méthode la distance entre deux points X et Y, supposés inaccessibles, de la salle de classe par triangulation. On peut représenter, par exemple, les points X et Y par deux traits verticaux tracés sur deux murs opposés de la classe.

L'équipe a une barre mesurant 2 mètres, une petite dizaine de drapeaux, plusieurs instruments de mesure pour les visées, et chaque membre de l'équipe a du matériel pour dessiner et écrire dont un rapporteur et une règle graduée.

Étape de réflexion

Si on prend le temps, la classe peut élaborer le principe de triangulation en étant bien guidé. Ce principe n'est apparu qu'au début du XVI^e siècle et il n'est pas élémentaire à mettre en place même s'il est simple à utiliser.

À partir de cette réflexion, l'équipe place 6 tables avec sur chacune un instrument de visée avec au centre un « drapeau » et une étiquette de A à F pour identifier chacune. Elle dessine un schéma succinct du plan de la classe avec les points A, B, C, D, E, X et Y.

¹ L'abbé Picard ne connaissait pas le mètre mais c'est une autre histoire !

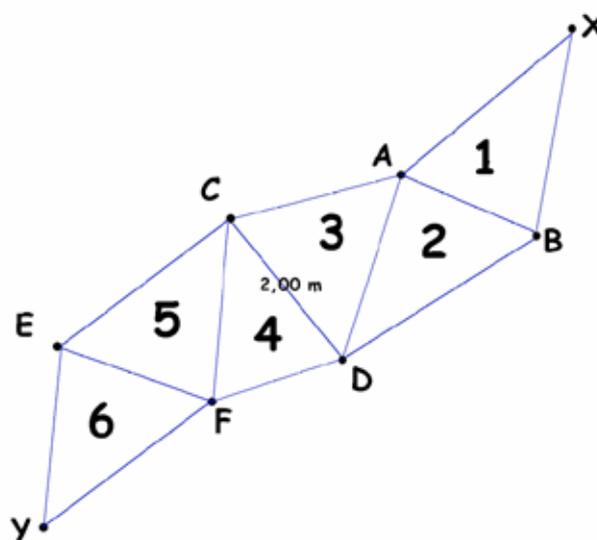


Fig.1. Plan succinct pour représenter les points choisis ainsi que les numéros des triangles formés.

Pour se repérer, les triangles sont numérotés comme le schéma ci-dessus. Sur ce schéma, on a choisi que la distance entre C et D soit 2 mètres.

Étape de mesures

Le but de l'atelier est de trouver la distance entre les points X et Y à partir de mesures d'angle dans les triangles de 1 à 6, sachant que CD mesure 2 mètres.

Les prérequis des élèves sont :

- La somme des angles d'un triangle est égale à 180° ;
- La connaissance de l'échelle d'une carte avec le choix de cette échelle.

En fonction du niveau de la classe, de la motivation et du temps imparti, l'enseignant juge de chaque étape.

Un tableau avec les triangles et les angles peut être proposé ou élaboré.

Triangle 1	Triangle 2	Triangle 3
A =	A =	A =
B =	B =	C =
	D =	D =
	Total =	Total =

Triangle 4	Triangle 5	Triangle 6
C =	C =	E =
D =	E =	F =
F =	F =	
Total =	Total =	

Fig.2. Tableau de résultats.

Sur le terrain, l'équipe de l'abbé Picard mesurait les trois angles, la mesure du troisième angle étant la preuve de la validité des mesures.

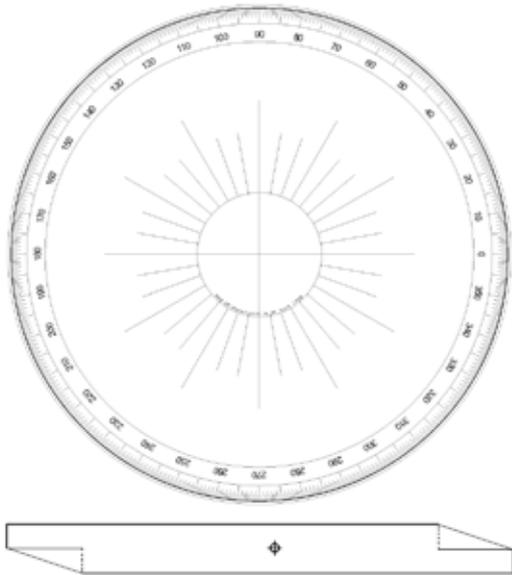


Fig.3. Instrument de mesure pour les visées.

L'équipe peut être divisée pour les mesures d'angle. Chaque visée s'effectue en alignant l'œil, l'alidade avec index relevé de l'instrument, réglé au départ sur 0°, avec 2 drapeaux².



Fig.4. Visée par une stagiaire de l'EEA à Gap.

² Voir aussi <http://clea-astro.eu/lunap/Triangulation/index.html> pour des améliorations avec l'expérience !

Il faut privilégier le soin et la précision en faisant attention de ne pas bouger le matériel de visée (il est conseillé de faire un repère sur la table) !

Étape de dessin géométrique

Une fois toutes les mesures prises et la vérification de la somme des angles dans chaque triangle (si on est trop loin de 180°...il faut recommencer !), on réfléchit sur l'échelle à prendre pour le dessin final et sur la stratégie à avoir pour tracer les 6 triangles. Puis chacun trace à l'échelle la suite des triangles sur sa feuille.

Étape finale, la mesure de XY

On compare les résultats des élèves sur la distance XY, en centimètres, sur le plan. Puis on calcule la distance XY dans la salle, en mètres.

Pour terminer, avec un décamètre, on mesure la distance XY dans la salle et... on se félicite ou on recommence !

Pour finir en beauté

Pour terminer l'atelier, on essaie d'imaginer comment s'y prenait les scientifiques pour effectuer leur mesure sur le terrain et toutes les embûches qu'ils pouvaient rencontrer. On peut aussi parler de l'abbé Picard faisant ses mesures dans l'équipe de Cassini et pour quel objectif (aventure de la cartographie de la France). Cet objectif a évolué tout au long du siècle suivant, comme par exemple, la forme de la Terre qui a initié les expéditions de Bouguer et La Condamine au Pérou ou de Maupertuis et Celsius en Laponie.



Fig.5. Mesure de la base en toise. Expédition de Maupertuis.

Une autre expédition toute aussi remarquable est celle de Delambre et Méchain sous la Révolution française.

De quoi donner une âme d'aventurier et de scientifique, loin du confinement, à tous les élèves !

Atelier en extérieur

(niveau lycée)

L'école d'été du CLEA se passe au Col Bayard au milieu d'un golf remarquable, lieu rêvé pour mettre en place une simulation à petite échelle d'une portion de la triangulation que l'abbé Picard³ (1620-1682) a effectué dans le but de mesurer le degré de méridien, celle de Mareuil à Malvoisine.

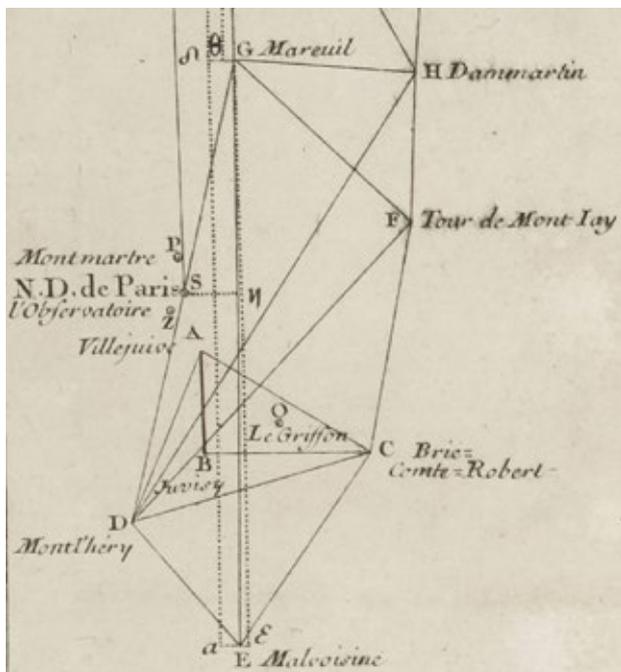


Fig.6. Plan de la triangulation de l'abbé Picard entre Mareuil et Malvoisine. BnF.

Notre principal obstacle étaient les balles de golf qui pouvaient rappeler les conditions de triangulation de Delambre et Méchain pendant la Révolution française !

Nous avons essayé de reprendre les moyens de l'époque mais nous avons fait une entorse sur l'instrument utilisé pour obtenir la différence de latitude entre les deux points extrêmes. C'est le GPS qui a donné cette différence minimale car notre terrain fait environ 300 m de longueur dans la direction nord-sud.

Organisation et objectif

L'expérience peut être réalisée si votre lycée est dans un parc, sinon proche d'un terrain vague ou d'un terrain de sport. En plus du terrain, un peu d'imagination sera nécessaire pour remplacer les

³ En 1668-1669, l'abbé Jean Picard, astronome français, est chargé par l'Académie de la mesure de l'arc de méridien entre Paris et Amiens. Par triangulation, il obtient 111,1 km pour 1° de latitude, soit, en estimant la terre sphérique, un rayon terrestre de 6 372 km (le rayon moyen actuellement mesuré est de 6 371 km).

tours, les églises ou autres bâtiments comportant des étages surélevés.

La triangulation de Picard revient à prendre 7 points, A, B, C, D, E, F et G, pour les 7 stations. Le but étant de trouver la distance GE des deux stations les plus distantes, dans la direction nord-sud. Ces deux stations sont telles que de l'une, on ne puisse pas voir l'autre.

Une reconnaissance du lieu est nécessaire avant de lancer le relèvement des mesures sur le terrain pour trouver des repères visibles de loin ou en inventer. Ces repères seront les stations. En profitant de quelques arbres, d'un petit pont, de poteaux d'enclos de terrain de tennis, nous avons trouvé 6 stations (on en a donc superposé 2) comme le montre la figure 2.

Matériel

- Pour mesurer la base, des bâtons en bois ou en bambous d'une distance donnée ont remplacé la toise⁴ du Châtelet.
- Pour mesurer les angles sur le terrain, Daniel Bardin a fabriqué des « angulomètres » (mot inventé par son constructeur) et même un cercle de Bardin, inspiré du cercle de Borda utilisé par Delambre et Méchain. Picard utilisait un quart de cercle.

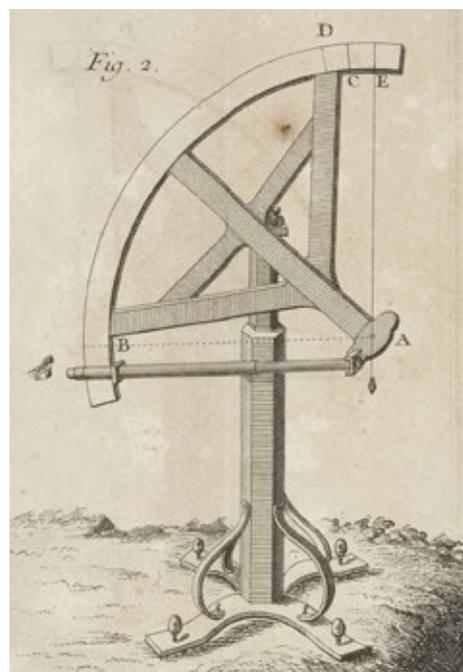


Fig.7. Le quart de cercle de Jean-Picard avec lunette, BnF.

Plus simplement des demi-cercles gradués fixés sur des pieds de fortune avec un tube de PVC qui pivote autour du centre ont été fabriqués (simple, rapide à fabriquer et pas cher).

⁴ Picard prend pour mesurer la base de la méridienne, une toise identique à la toise-étalon du Châtelet (1,949 m).

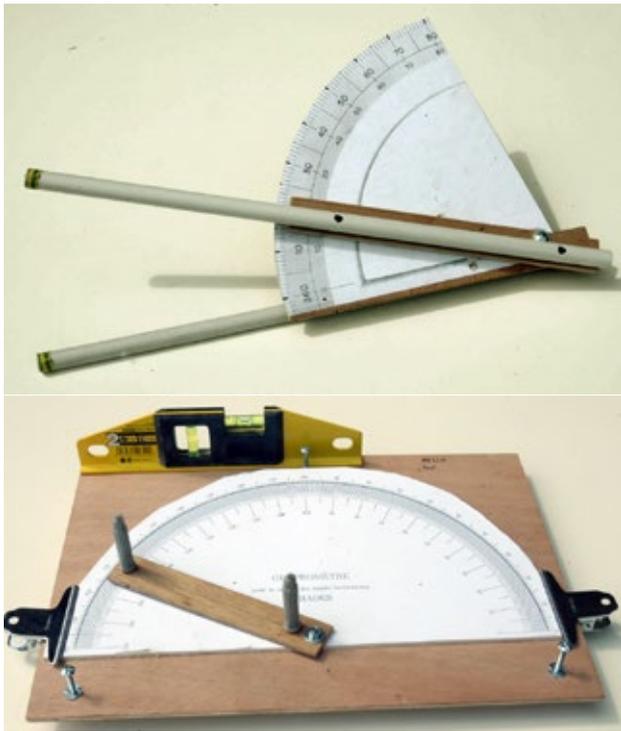


Fig.8. Exemples d'instruments⁵ utilisés à fixer sur un pied (pied photo par exemple).

Des maquettes d'instruments anciens ont fait l'attraction des golfeurs venus en curieux : arbalestrille et sextant basique en plastique.

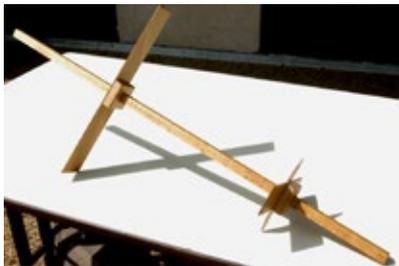


Fig.9. Arbalestrille graduée en angle avec plusieurs marteaux selon que l'angle est petit ou grand.

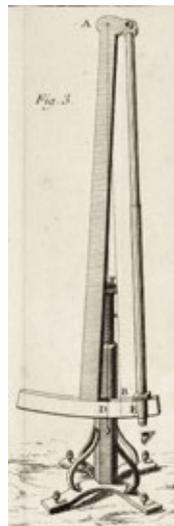


Fig.10. Instrument de visée des astres de Jean-Picard, BnF.

- Pour mesurer les latitudes, le GPS est venu à notre secours là où Picard utilisait un secteur astronomique pour mesurer des distances zénithales d'étoiles...

Les difficultés rencontrées

- Problème du relief : si le terrain est grand, vallonné avec des arbres, pour savoir si une station est vue d'une autre, il faut y aller voir.
- Problème de la disposition des stations : les triangles doivent être le plus proche possible du

⁵ Il est préférable de prendre un demi-cercle gradué.

triangle équilatéral pour limiter l'erreur et la répartir également pour obtenir 180° (on n'a pas toujours pu respecter ce conseil !).

Le principe

Ce qu'il faut savoir :

- la somme des angles dans un triangle est égale à 180°. Pratiquement, on prend la mesure des 3 angles, le troisième servant à vérifier la validité des angles obtenus;
- un triangle est entièrement déterminé si on connaît 2 angles et un côté⁶.

La prise des mesures sur le terrain



Fig.11. Une équipe de stagiaires à l'œuvre.

1. Déterminer une base qui sera un côté d'un des triangles. Picard a pris une base de 5 663 toises du Châtelet, soit 11,037 km.

BASE	en m
23 perches de 2 m et 90 cm	46,90

Notre base sur le terrain était de 47 m environ (mesure prise avec une « toise » faite de bois ou de bambous selon les années).

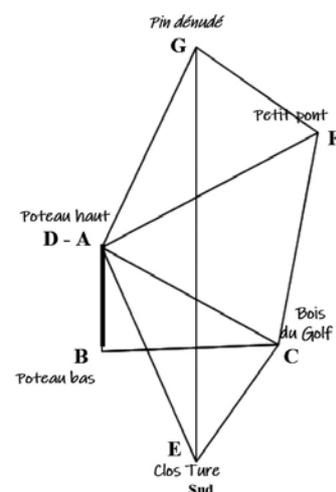


Fig.12. Plan de la triangulation à l'EEA au Col Bayard à Gap

2. Se placer au sommet A du triangle ABC pour prendre l'angle \widehat{BAC} , puis se placer au sommet B pour prendre l'angle \widehat{ABC} puis se placer au sommet C pour prendre l'angle \widehat{BCA} .

Pour chaque triangle on peut ainsi remplir le petit tableau ci-dessous et vérifier que la somme est proche (!) de 180° sinon, il faut recommencer !

⁶ Deux triangles qui ont leurs trois angles égaux sont seulement semblables.

A compléter		Triangle			
		ABC	ECA	CAF	AFG
Angle	A				
	B		X	X	X
	C				X
	D	X	X	X	X
	E	X		X	X
	F	X	X		
	G	X	X	X	
Somme					

Ce tableau permet de faire toutes les visées nécessaires d'un même point...

3. Connaissant le côté AB et les angles dans le triangle ABC , on peut en déduire les autres côtés avec la formule des sinus :

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

Ce procédé est répété pour les autres triangles ici ECA , CAF et AFG .

4. Pour terminer, on prend le triangle AEG dont on connaît les côtés AE (dans le triangle ECA) et AG (dans le triangle AFG).

L'angle A est obtenu en faisant la somme des angles A des triangles ECA , CAF et AFG .

On obtient EG avec la formule d'al Kashi ou loi des cosinus :

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \cos \hat{A}$$

Les calculs

On se sert d'un tableur pour faire les différents calculs.

Calcul 1 : la base

BASE	en m
23 perches de 2 m et 90 cm	46,90

Calcul 2 : mesures des côtés des triangles

On rentre sur le tableur, les angles du premier triangle et la base.

n°	triangle	angle	degré	'	angle	sin	côté	ABC
1	ABC	C	26		26	0,44	AB	46,90
		A	86		86	1,00	BC	106,73
		B	68		68	0,93	AC	99,20
					180			

Puis on rentre les données des autres triangles dans des tableaux similaires.

La colonne *sin* et la colonne *ABC* ont été programmés auparavant avec les formules.

Calcul 3 : mesure de la distance EG

On constitue un autre tableau avec :

- dans la colonne Angle A , la somme des angles A des triangles concernés ;
- dans la colonne « côté », les mesures de AE et de AG calculées dans le *calcul 2*, ci-dessus.

Angle A	cos A	côté	AGE
143,5	-0,80	AE	139,74
		AG	181,00
		GE	304,88

Calcul 4 : mesure de la différence de latitude

Les 2 latitudes sont prises aux stations G et E. Un autre tableau permet de calculer la différence de latitude en seconde d'arc :

Latitude	degré	'	"
G	44	37	18,3
E	44	37	8,58
		diff	9,72

Calcul 5 : mesure du périmètre⁷ de la Terre

Un dernier tableau en rappelant la différence de latitude entre G et E et la distance entre ces deux stations.

	"	en m	périmètre de la Terre en km
angle/dist.	9,72	304,88	
pour 1°	3600	112918,52	40650,67

Attention aux problèmes d'unité en secondes d'arc et degrés puis en m et km !

À préparer avant

- Reconnaissance du terrain et des stations.
- Conseil : pour les stations mettre sur des grands bouts de bois des gilets jaunes avec des lettres écrites en grand.
- Préparer la perche ou autre instrument de mesure de longueur pour mesurer la base.
- Préparer les instruments de mesure d'angle, les pieds pour les y fixer si nécessaire.
- Préparer la feuille de calcul du tableur avec les élèves, feuille prête à recevoir les données du terrain.

Conclusion

Avec peu de moyens et un investissement raisonnable, cet atelier ludique aborde un point de l'histoire des sciences remarquable, la trigonométrie et les triangles en mathématiques, les instruments de mesure en topographie, en astronomie. Il donne un bel exemple d'utilisation d'un tableur et des calculs qu'on peut y faire. Il met en évidence le lien qu'il y a entre l'expérience et la théorie, le problème de l'incertitude des mesures...

Bibliographie

Ouvrage de Jean Picard, BnF, Gallica, *Mesure de la Terre*
<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b7300361b/>

Des documents supplémentaires seront sur le site du CLEA (CC 170 / sommaire).

⁷ Les mesures obtenues dans les différents ateliers ont toujours été supérieures à 40 000 km sans dépasser 45 600 km...