

# NOTIONS DE BASE

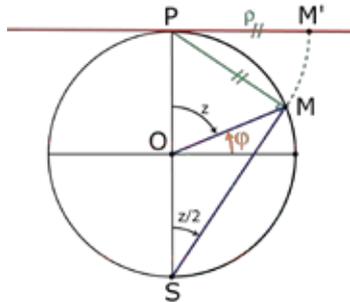
## Cartes du ciel, cartes de la Terre (5)

Michel Bobin, Pierre Causeret

La projection de Hammer-Aitoff est très utilisée en astronomie pour représenter le rayonnement à 3K ou la distribution des galaxies sur l'ensemble du ciel.

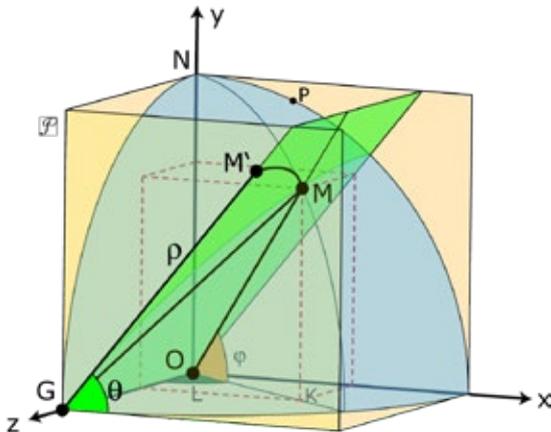
Nous avons vu dans le précédent numéro la projection azimutale équivalente de Lambert.

Il s'agit d'une projection azimutale équivalente, c'est-à-dire qui conserve les aires. On projette ici sur un plan tangent à la sphère céleste en P (pôle Nord) de telle manière que  $PM' = PM$ . Le calcul montre que l'on a  $PM = 2 \sin(z/2)$ .



### Aspect transverse de la projection de Lambert

Au lieu de projeter sur le plan tangent à la sphère en P, il est possible de projeter sur un plan tangent en n'importe quel point de la sphère, par exemple en un point de l'équateur. C'est un passage obligé pour comprendre la prochaine projection de Aitoff-Hammer. La construction vue précédemment où  $PM' = PM$ , devient, dans la figure suivante (fig. 42)  $GM' = GM$ . La construction étant identique, il s'agit d'une projection équivalente.



**Fig.42.** Projection azimutale de Lambert en version transverse. N est le pôle Nord,  $(xOz)$  est le plan de l'équateur,  $\mathcal{P}$ , en jaune, est le plan de projection tangent à la sphère en G. On n'a représenté qu'un huitième de la sphère ici. Le point M de coordonnées sphériques  $(L, \varphi)$  est projeté en  $M'$  de coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  de telle manière que :  $M'$  appartient au plan  $(OGM)$  en vert et  $GM' = GM$ .

### Calcul pour la projection transverse

On cherche déjà les coordonnées cartésiennes du point M dans le repère de la figure 42. On obtient :

$$x_M = \cos \varphi \sin L ; y_M = \sin \varphi ; z_M = \cos \varphi \cos L$$

L'angle  $\theta$  est aussi l'angle entre le plan de l'équateur et le plan OGM en vert. On a :

$$\tan \theta = \frac{y_M}{x_M} = \frac{\tan \varphi}{\sin L}$$

On prendra :  $\theta = \text{atan2}(\tan \varphi, \sin L)$

Note : la fonction  $\text{atan2}$  à deux variables est souvent utilisée en programmation. Entre autres avantages sur la fonction  $\text{atan}$ , elle donne un résultat dans  $[-\pi, \pi]$  au lieu de  $]-\pi/2, \pi/2[$ .  $\text{atan2}(y,x)$  est l'angle  $\theta$  du point de coordonnées  $(x, y)$ .

Calcul de  $\rho$  :

$$\rho = GM' = GM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + (z_M - 1)^2}$$

Après quelques simplifications, on arrive à :

$$\rho = \sqrt{2 - 2 \cos \varphi \cos L}$$

Il est possible de déterminer les coordonnées cartésiennes de  $M'$  en fonction de  $\varphi$  et de L. Là encore, les calculs nécessitent quelques simplifications à base de formule trigonométriques.

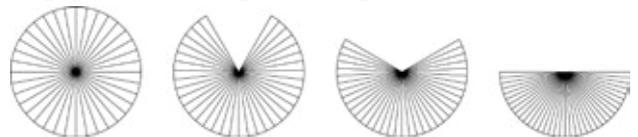
On obtient :

$$x = \frac{\sqrt{2} \cos \varphi \sin L}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos L}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos L}}$$

### Projection de Hammer - Aitoff

En 1889, Aitoff inventa une modification de l'aspect transverse de la projection azimutale de Postel (ou mérid-équidistante) décrite dans le numéro précédent). Cette modification consiste à diviser par 2 les longitudes, puis à doubler les abscisses.

Diviser par 2 les longitudes consiste à condenser la sphère en une demi-sphère, à la manière d'une boule en papier alvéolé que l'on replie (figure 43).



**Fig.43.** On divise les longitudes par deux. Au centre se trouve le pôle (terrestre ou céleste).

Si on projette cette demi-sphère par une projection transverse, la limite de la carte sera un cercle. En effet, si on prend n'importe quel point P sur le méridien contenu dans le plan xOy (cf. figure 42), GP est constant donc GP' aussi et l'image de ce méridien sera le cercle de rayon GN soit .

Mais au centre de la carte projetée, l'image sera déformée. Pour retrouver une quasi identité, il faut multiplier les abscisses par 2. Le cercle limitant la carte devient alors une ellipse dont le grand axe est le double du petit axe.

En 1892, Hammer applique ce processus à la projection azimutale équivalente de Lambert. Cette projection est appelée projection de Hammer-Aïtoff (parfois simplement de Hammer). Comme la projection de Lambert, elle conserve les aires.

### Calculs pour la projection de Hammer-Aïtoff

Il suffit de reprendre les formules de l'encadré précédent, diviser la longitude L par 2 et multiplier l'abscisse x par 2.

Si on utilise les formules des coordonnées polaires, on calcule  $\rho$  et  $\theta$  ainsi :

$$\rho = \sqrt{2 - 2 \cos \varphi \cos \frac{L}{2}} \quad \text{et} \quad \theta = a \tan 2 \left( \tan \varphi \cdot \sin \frac{L}{2} \right)$$

puis les coordonnées x et y avec :

$$x = 2\rho \cos \theta \quad \text{et} \quad y = \rho \sin \theta$$

On peut aussi utiliser les formules des coordonnées cartésiennes.

On obtient alors :

$$x = \frac{2\sqrt{2} \cos \varphi \sin \frac{L}{2}}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \frac{L}{2}}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \frac{L}{2}}}$$

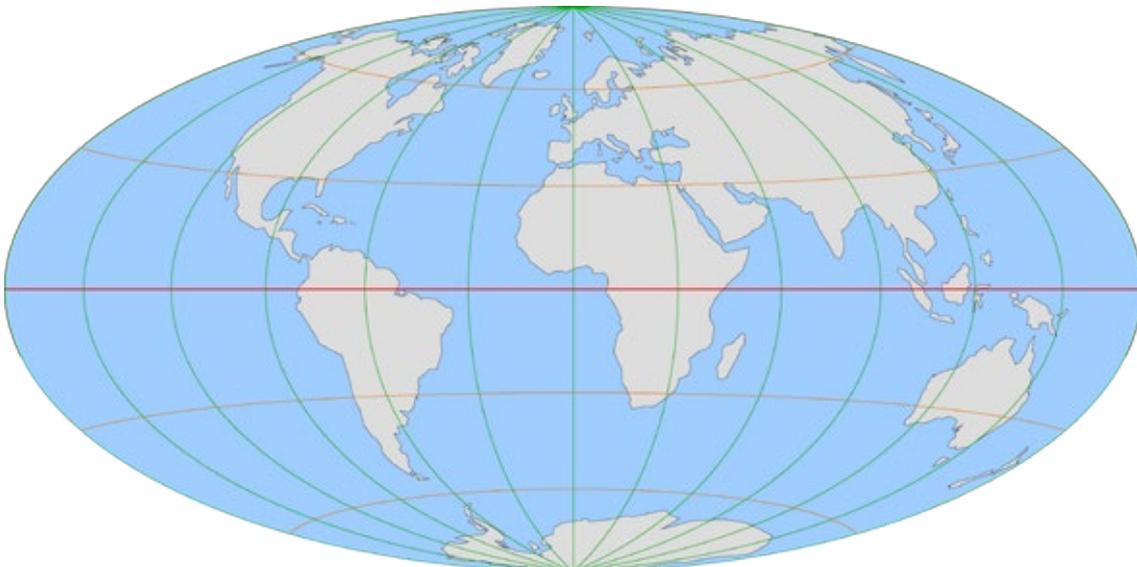


Fig.44. Carte de la Terre en projection de Hammer-Aïtoff.

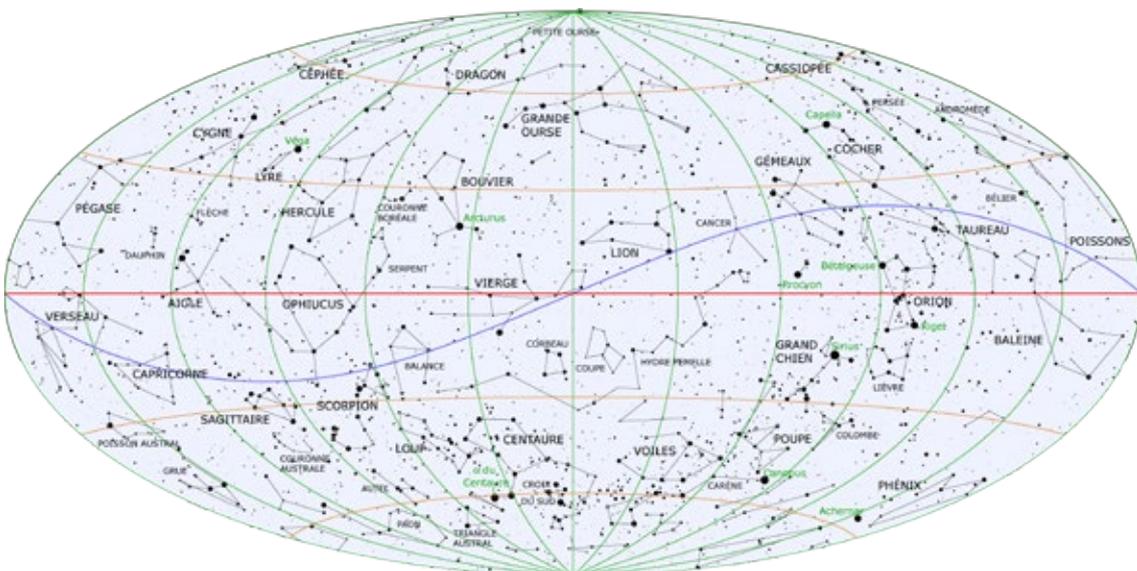
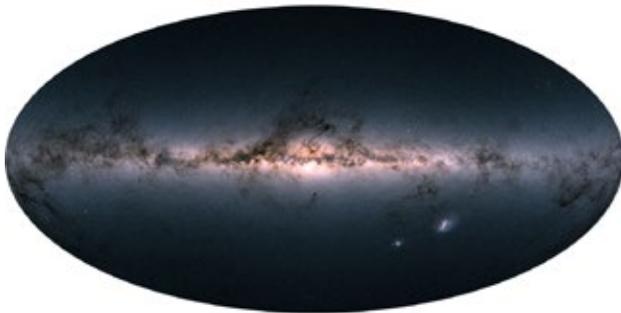


Fig.45. Carte de la sphère céleste en projection de Hammer-Aïtoff. On a utilisé ici des coordonnées équatoriales.

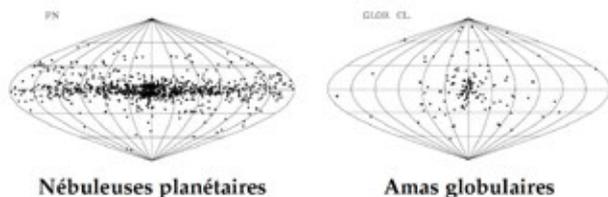
## Conclusion

Il existe un nombre très important de projections pour représenter la sphère céleste. Dans les formules présentées, on a utilisé le plan de l'équateur comme plan de référence, mais on peut utiliser n'importe quel autre plan, comme le plan de l'écliptique ou le plan de la Galaxie.

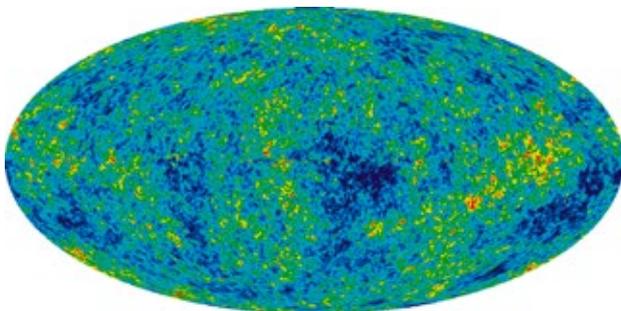


**Fig.46.** La Voie lactée, observée par le satellite Gaia, en projection de Hammer (Crédit ESA/Gaia/DPAC). Pour cette carte, on a utilisé des coordonnées galactiques, le grand axe de l'ellipse représente alors l'équateur galactique.

**Les projections équivalentes**, qui conservent les aires, sont intéressantes lorsque l'on veut montrer une densité d'objets comme la répartition des galaxies par exemple. Les plus utilisées semblent être la projection sinusoïdale de Flamsteed, la projection de Mollweide (voir CC 165) et celle de Hammer-Aitoff (CC 168). On trouve assez peu de cartes en projection azimutale de Lambert qui donne une carte circulaire (CC 167).

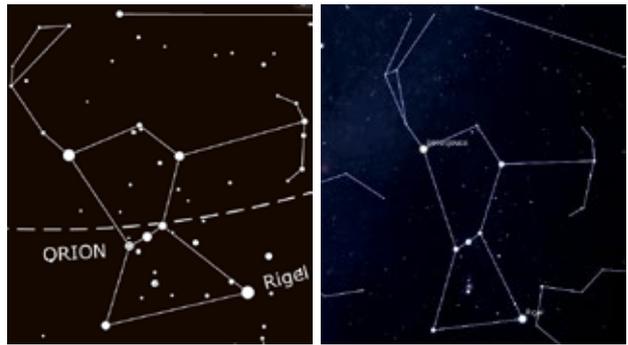


**Fig.47.** Les nébuleuses planétaires sont réparties dans le plan de la Galaxie (carte de gauche) alors que les amas globulaires sont situés autour du centre de la Galaxie (carte de droite). Ces deux cartes sont en projection sinusoïdale de Flamsteed.



**Fig.48.** Le rayonnement du fond cosmologique observé par le satellite WMAP représenté en projection de Mollweide. Le plan de référence est celui de la Galaxie dont le rayonnement a été soustrait.

**Les projections conformes**, qui conservent les formes, sont intéressantes si l'on veut reconnaître l'aspect des constellations.



**Fig.49.** La constellation d'Orion sur une carte tournante du ciel à gauche (en projection azimutale équidistante non conforme) et avec Stellarium à droite (en projection stéréographique conforme). Si on compare avec le vrai ciel, c'est bien l'image de droite qui ressemble à ce que l'on observe.

**Dans les logiciels d'astronomie**, on visualise le ciel sur un écran d'ordinateur plat, il faut donc utiliser une projection.

Le logiciel *Stellarium* utilise par défaut la projection stéréographique (voir CC 167) qui conserve les formes. D'autres projections sont disponibles (dans réglage, affichage du ciel), par exemple gnomonique, orthographique, azimutale équidistante, sinusoïdale, de Hammer-Aitoff...

*Carte du ciel* est un autre logiciel gratuit souvent utilisé par les amateurs. Il utilise par défaut la projection gnomonique (CC 167) jusqu'à 90° de champ, puis la projection de Mercator (CC 165) entre 90 et 360°. D'autres projections sont également disponibles (orthographique, de Hammer-Aitoff...).

**Dans les cartes et atlas du ciel**, on utilise différentes projections.

Pour les cartes tournantes, c'est habituellement la projection azimutale équidistante (cf. CC 168).

Dans l'*Atlas du ciel 2000* de Wil Tirion, les cartes sont réalisées avec différentes projections : azimutale équidistante pour les régions polaires (CC 168), cylindrique avec parallèles équidistants type projection quadratique pour la région équatoriale (CC 165) et sécante conique équidistante pour les régions intermédiaires (CC 166).