Cartes du ciel, cartes de la Terre (4)

Michel Bobin, Pierre Causeret

Après les projections cylindriques et coniques vues dans les articles précédents, voici les projections azimutales pour réaliser des cartes de la Terre ou du ciel.

Projections azimutales

On projette la sphère $\mathcal{S}$, terrestre ou céleste, sur un plan $\mathcal{P}$ choisi ici tangent à la sphère en N, le pôle Nord. Un point M de la sphère, de coordonnées (L, φ), est projeté sur le plan en un point M' situé sur la demi-droite [Nt), intersection du plan tangent et du demi plan méridien de M (voir figure 27). Le pôle Nord N se projette en N et le pôle Sud n'a pas d'image.

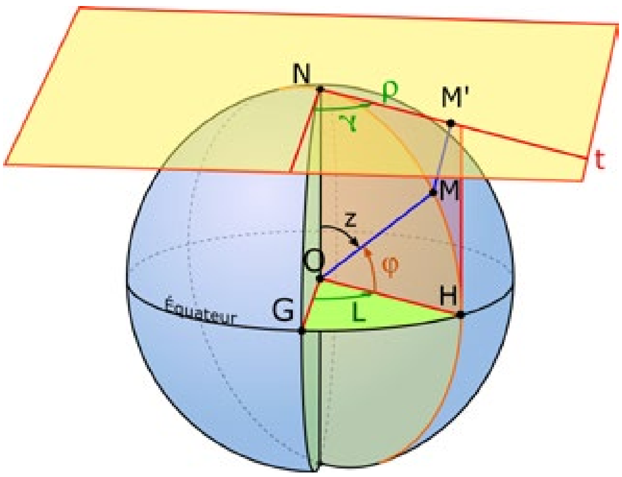

Fig.27. *Le plan sur lequel on projette est tangent à la sphère en N. Le point M de la sphère de coordonnées (L, φ) est projeté sur le plan en un point M' (ρ, γ) en coordonnées polaires.*

Il est souvent plus pratique de travailler avec la colatitude z qu'avec la latitude φ (on a $z = \pi/2 - \varphi$).

Les formules des projections azimutales seront de la forme : $\boldsymbol{\gamma = L}$ **et** $\boldsymbol{\rho = f(z)}$ avec $f(0) = 0$ (car $P \rightarrow P$).

Pour que la projection autour de N soit proche de l'identité, on choisira de plus $f'(0) = 1$.

Les trois projections qui suivent sont des projections perspectives avec, à chaque fois, un point de vue différent.

Projection gnomonique

Le projeté de M est à l'intersection de [OM] et du plan tangent (figure 28). On a donc $\boldsymbol{\rho = \tan z}$ (rappelons que l'on a pris le rayon de la sphère comme unité).

Dans cette projection :

- on ne peut représenter ainsi que l'hémisphère nord, sans l'équateur ;
- les demi-méridiens deviennent des demi-droites issues de O ;
- c'est une projection très déformante au voisinage de l'équateur ;
- mais elle possède une propriété intéressante : le chemin le plus court d'un point à un autre sur la sphère est un segment sur la carte. En effet, ces chemins les plus courts sont des arcs de grands cercles qui sont vus comme des droites depuis le centre de la sphère. La projection est dite orthodromique.

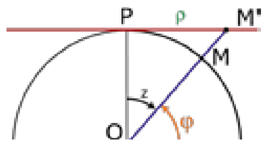

Fig.28. *Projection gnomonique. M se projette en M'. Le point de vue est en O : c'est comme si l'on regardait la sphère depuis son centre O.*

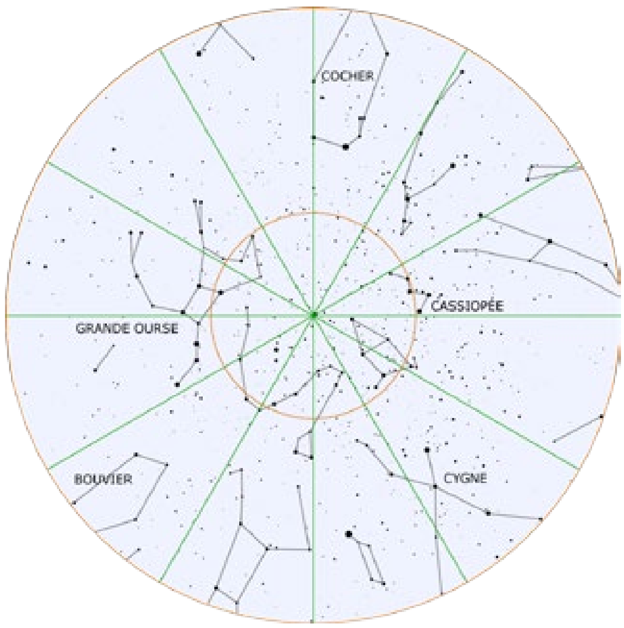

Fig.29. *Projection gnomonique du ciel pour les étoiles de déclinaison supérieure à 30°. Dans cette carte comme dans celle de la Terre, on observe des déformations importantes dès qu'on s'éloigne du pôle.*

Fig.30. Projection gnomonique de la Terre pour des latitudes supérieures à 30°. Pour trouver le chemin le plus court de Paris à Tokyo, il suffit de joindre ces deux villes en ligne droite sur la carte.

Projection orthographique

Il s'agit d'une projection orthogonale : (MM') est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. On a **$\rho = \sin z$**

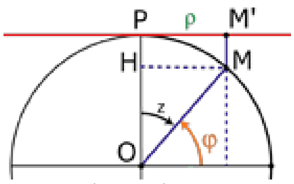

Fig.31. Projection orthographique. M se projette en M'. Le point de vue est repoussé à l'infini. φ= HM = sin z.

Fig.32. Hémisphère nord de la Terre en projection orthographique.

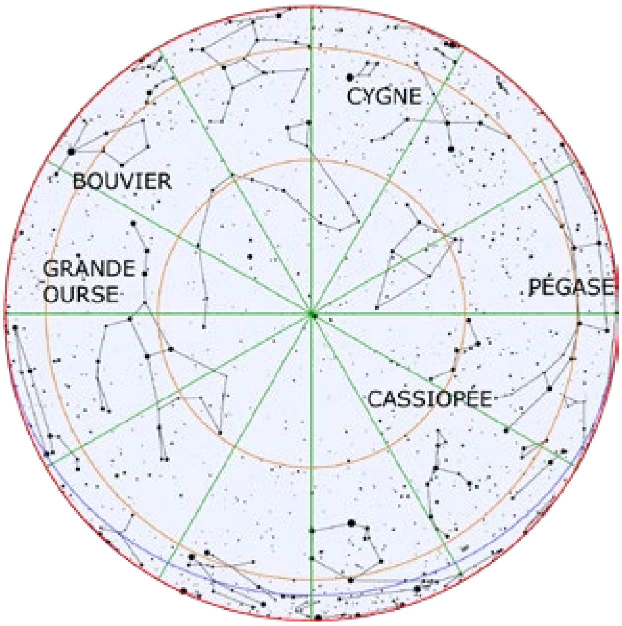

Fig.33. Hémisphère nord du ciel en projection orthographique.

Dans cette projection :

- on ne représente que l'hémisphère nord ;
- les parallèles sont projetés en vraie grandeur ;
- les demi-méridiens deviennent des rayons du cercle équateur ;
- pour la Terre, la carte obtenue est ce qu'on voit depuis l'espace, au zénith du pôle Nord et à une grande distance.

Projection stéréographique

Le point de vue est cette fois le pôle Sud S. M' est à l'intersection de (SM) et du plan tangent. L'angle inscrit $\widehat{PSM}$ vaut alors la moitié de l'angle au centre $\widehat{POM}$ donc $\widehat{PSM} = z/2$.

tan $\widehat{PSM}$ = PM'/PS = ρ/2 donc **$\rho = 2 \tan (z/2)$.**

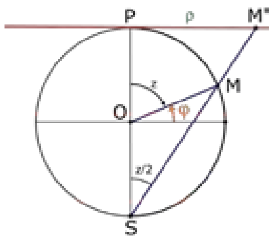

Fig.34. Projection stéréographique. On observe la sphère depuis le pôle Sud S.

Cette projection était connue d'Hipparque (-2^e s.) et fut décrite par Ptolémée (+2^e s.). Elle possède des propriétés intéressantes :

- c'est une projection conforme – elle conserve les angles donc les formes (voir encadré) ;
- l'image d'un cercle ne passant pas par S est un cercle (sinon, c'est une droite).

Cette deuxième propriété l'a rendue très intéressante pour la réalisation d'astrolabes. En effet, il faut représenter de très nombreux cercles de la sphère céleste : cercles de hauteur, cercles d'égal azimut, écliptique, équateur, tropiques (voir par exemple CC 144, hiver 2013, pages 20 et 29).

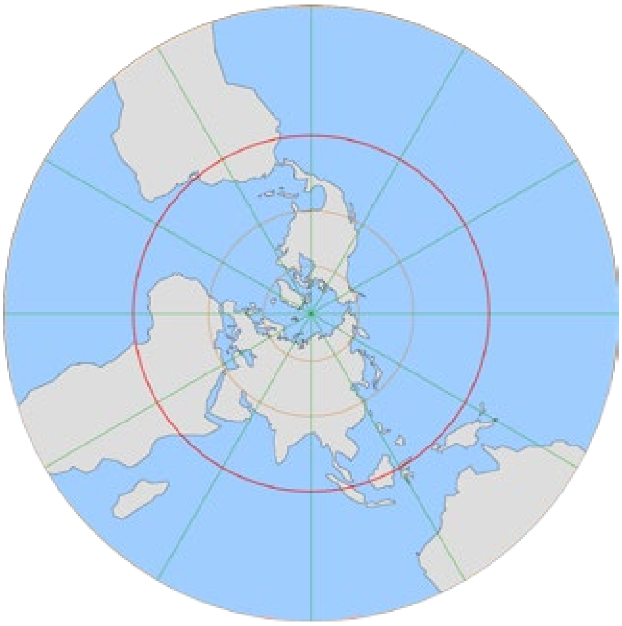

Fig.35. *La Terre en projection stéréographique, à partir de la latitude 30° S. La France ou Madagascar ont bien la bonne forme mais les échelles ne sont pas les mêmes. Dans cette projection, l'hémisphère nord est représenté à l'intérieur du cercle équateur (en rouge) et l'hémisphère sud à l'extérieur.*

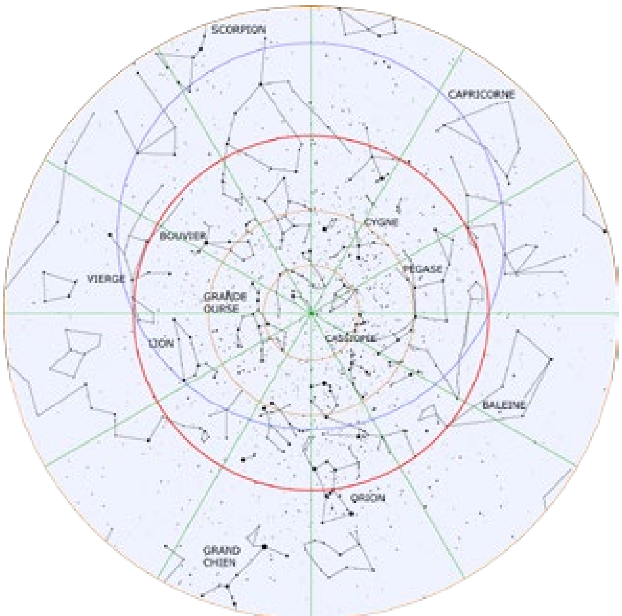

Fig.36. *Carte du ciel en projection stéréographique pour les étoiles de déclinaison supérieure à –30°. On reconnaît bien ici les formes des constellations, que ce soit la Grande Ourse ou Orion. Principal inconvénient de cette projection : plus on s'écarte du pôle Nord, plus l'échelle est grande. L'écliptique (en bleu) et l'équateur (en rouge) sont bien représentés par deux cercles.*

Lorsque l'on définit la projection stéréographique, on peut aussi projeter sur le plan de l'équateur en plaçant M' à l'intersection de (SM) et (OE) sur la fig. 34. On obtient la même carte mais à l'échelle ½.

Recherche d'une projection azimutale conforme

La projection étant azimutale, nous avons :

$\gamma = L$ donc $d\gamma/d\varphi = 0$ et $d\gamma/dL = 1$.

$\rho = f(z)$ avec $z = \pi/2 - \varphi$ donc $d\rho/dL = 0$ et $d\rho/d\varphi = -d\rho/dz$.

Pour une projection conforme, nous avons vu dans la partie 2 deux conditions, (C1) et (C2) (voir CC 165 p 33).

- La première traduit le fait que les méridiens images doivent couper les parallèles images à angle droit, ce qui est vrai pour toute projection azimutale. On peut d'ailleurs le vérifier facilement avec la formule (C1) :

$$\frac{d\rho}{dL}\times\frac{d\rho}{d\varphi}+\rho^2\frac{d\gamma}{dL}\times\frac{d\gamma}{d\varphi}=0$$

- La deuxième condition s'écrivait

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2+\rho^2\left(\frac{d\gamma}{d\varphi}\right)^2}=\frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dL}\right)^2+\rho^2\left(\frac{d\gamma}{dL}\right)^2}$$

En remplaçant par les valeurs données au début de l'encadré :

$$\frac{d\rho}{dz}=\frac{1}{\sin z}\times\rho \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\rho}d\rho=\frac{1}{\sin z}dz \ \text{(C3)}$$

Une primitive de $1/\sin z$ peut se trouver avec le changement de variable $t = \tan(z/2)$. On obtient $\ln(\tan(z/2))$.

En intégrant l'égalité (C3), on obtient $\ln \rho = \ln(\tan(z/2) + k$.

D'où $\rho = a\times\tan(z/2)$. La condition $f'(0) = 1$ nous donne $a = 2$, il s'agit bien de la projection stéréographique.

Projection azimutale mérid-équidistante

On veut ici que les distances soient conservées sur les méridiens. Donc $d\rho/dz$ doit être constant d'où $\rho = kz$ (pour $z = 0$, $\rho = 0$). Pour avoir $f'(0) = 1$, on choisira $k = 1$ donc $\boldsymbol{\rho = z}$.

C'est la projection azimutale de Guillaume Postel.

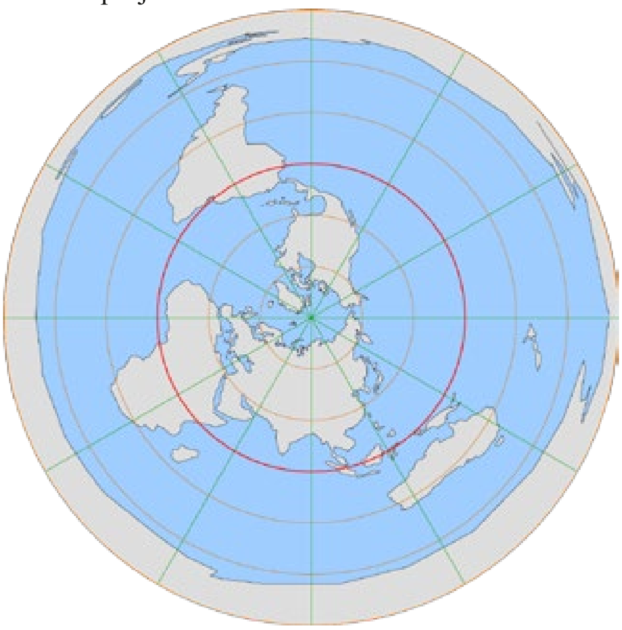

Fig.37. *La Terre en projection mérid-equidistante. On peut représenter l'ensemble de la Terre mais l'Antarctique prend ici une place énorme.*

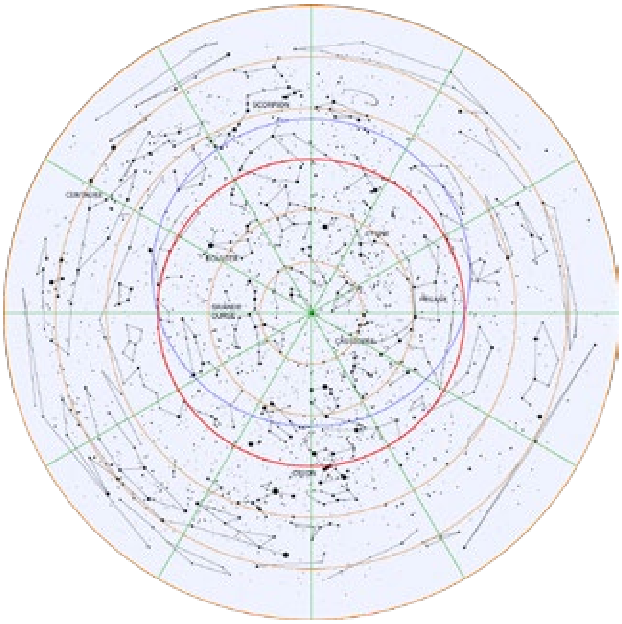

Fig.38. *Le ciel en projection mérid-équidistante. C'est la projection utilisée pour les cartes tournantes du ciel. Dans ce cas, on s'arrête aux alentours de -45° ou -50° de déclinaison, les étoiles plus au sud n'étant pas visibles à nos latitudes.*

Recherche d'une projection azimutale équivalente

Une projection est équivalente si (voir CC 164 p. 11) :

$$\frac{\rho}{\cos\varphi}\times\left(\frac{d\rho}{dL}\times\frac{d\gamma}{d\varphi}-\frac{d\rho}{d\varphi}\times\frac{d\gamma}{dL}\right) \text{ est constant}$$

On sait que $d\gamma/d\varphi = 0$, $d\gamma/dL = 1$, $d\rho/dL = 0$ et $d\rho/d\varphi = -d\rho/dz$

La condition ci-dessus devient :

$$\frac{\rho}{\cos\varphi}\times\left(-\frac{d\rho}{d\varphi}\right)=a \text{ soit } \frac{\rho}{\sin z}\times\frac{d\rho}{dz}=a \text{ d'où } \rho\cdot d\rho=a\times\sin z\cdot dz$$

On obtient en intégrant : $\frac{1}{2}\rho^2 = -a.\cos z + b$

Si $z = 0$, $\rho = 0$ donc $a = b$ et $\rho^2 = 2a \times (1 - \cos z)$.
Or, pour tout angle z : $\cos z = 1 - 2\sin^2(z/2)$.
Ce qui donne $\rho^2 = 4a \times \sin^2(z/2)$ donc $\rho = k \times \sin(z/2)$.
La condition $f'(0) = 1$ nous donne $k = 2$. D'où $\rho = 2\sin(z/2)$.

Projection azimutale équivalente de Lambert

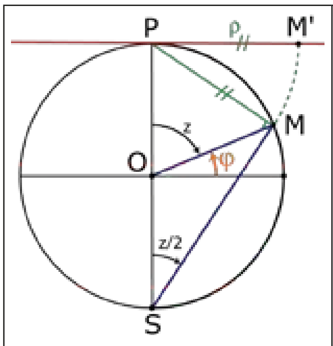

Fig. 39. *Projection azimutale de Lambert.*
Le projeté M' est tel que PM = PM'.
On peut vérifier que, dans ce cas, on a bien PM = 2 sin (z/2) comme on a trouvé dans l'encadré car sin(z/2)=PM/PS.

La projection azimutale de Lambert conserve les aires, c'est une projection équivalente. On la définit par $\boldsymbol{\rho = 2\sin(z/2)}$ (voir encadré). On peut en déduire une construction géométrique des projetés (figure 39).

Fig.40. *La Terre en projection azimutale équivalente.*

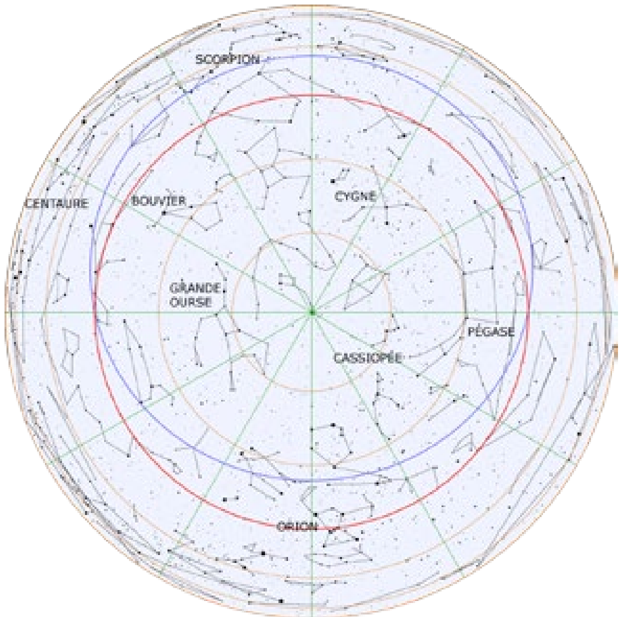

Fig.41. *Le ciel en projection azimutale équivalente. Les aires sont conservées mais les constellations sont de plus en plus déformées au fur et à mesure qu'on s'éloigne du pôle Nord.*

Propriétés des projections azimutales

<table>
<tr><td>Projection</td><td>gnomonique</td><td>orthographique</td><td>stéréographique</td><td>Mérid-équidistante</td><td>équivalente de Lambert</td></tr>
<tr><td>Images des parallèles</td><td colspan="5">cercles</td></tr>
<tr><td>Images des méridiens</td><td colspan="5">segments</td></tr>
<tr><td>Longueurs sur un parallèle</td><td></td><td>conservées</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Longueurs sur un méridien</td><td></td><td></td><td></td><td>conservées</td><td></td></tr>
<tr><td>Angles</td><td></td><td></td><td>conservés</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Aires</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>conservées</td></tr>
</table>

Nous terminerons cette série dans le prochain numéro par la projection de Hammer-Aïtoff.