

NOTIONS DE BASE

Cartes du ciel, cartes de la Terre (3)

Michel Bobin, Pierre Causeret

Quelles sont les différentes projections utilisées pour représenter la Terre et le ciel ? Voici la troisième partie de l'article commencé dans le n° 164, avec ici les projections coniques.

Projections coniques (cône tangent)

On projette la sphère sur un cône dont le sommet S appartient à l'axe (ON). Nous choisirons ici un cône tangent à la sphère suivant un parallèle de latitude φ_0 (il est aussi possible de considérer un cône sécant à la sphère suivant deux parallèles, cas que nous aborderons plus loin).

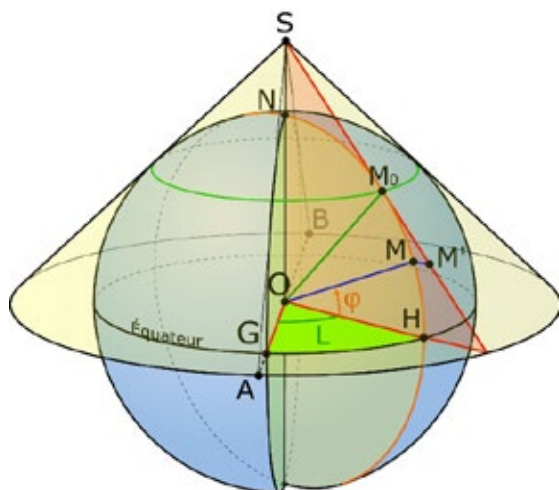


Fig.18. Le cône est tangent à la sphère suivant le parallèle vert. M est un point de la sphère de coordonnées (L, ϕ) . Le demi-plan de frontière (ON) passant par M (représenté en rose) coupe le parallèle vert en M_0 . Le point M de la sphère est projeté sur le cône en un point M' situé sur la demi-droite $[SM_0]$.

On découpe ensuite le cône suivant $[SB]$, à l'opposé du méridien origine, et on le déroule (figure 19). Cette famille de projection est intéressante car elle admet comme cas limite les projections cylindriques si S est à l'infini (voir CC n° 165) et les projections azimutales si S est en N (voir le prochain article).

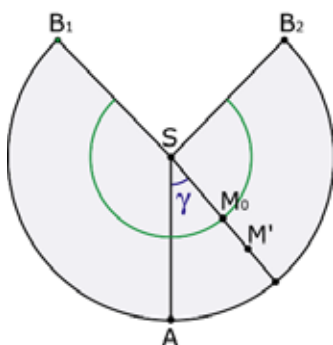


Fig.19. Le cône une fois déroulé.

Cette forme de carte, en cône déplié, ressemble peu à une sphère. On l'utilise rarement pour représenter la sphère (terrestre ou céleste) en entier. Par contre, on l'emploie couramment pour représenter une partie seulement de sphère. Dans ce cas, on choisit le parallèle de tangence au milieu de la région qui nous intéresse.

Le développement du cône

(notions mathématiques niveau collège)

Calcul de l'angle $\widehat{B_1SB_2}$ de la figure 19

Sur la figure 20 : $\widehat{HOM_0} = \varphi_0$ (latitude du parallèle tangent).

$\widehat{SOM_0} = z_0$ = complémentaire de $\widehat{HOM_0}$ donc de φ_0 .

$\widehat{KSM_0}$ = complémentaire de $z_0 = \varphi_0$.

$\sin \widehat{KSM_0} = KM_0 / SM_0$ donc $SM_0 = KM_0 \sin \varphi_0$

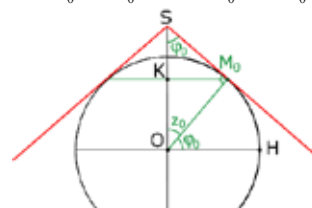


Fig.20. Coupe dans le plan rose de la figure 18.

L_1 , longueur du parallèle vert (fig. 18-19-20) = $2\pi \times KM_0$

L_2 , longueur du cercle entier de rayon SM_0 de la figure 19 :

$2\pi \times SM_0 = 2\pi \times KM_0 \sin \varphi_0$ donc $L_2 = L_1 \sin \varphi_0$

Puisque $L_2 / L_1 = \sin \varphi_0$, l'angle au centre $\widehat{B_1SB_2}$ sur la figure 19 est égal à $2\pi \times \sin \varphi_0$.

Sur les figures précédentes, on a pris $\varphi_0 = 49^\circ$: $\widehat{B_1SB_2}$ mesure alors 272° ($360^\circ \times \sin 49^\circ$).

Calcul de l'angle γ en fonction de L (figure 16)

L varie de $-\pi$ à π et γ varie de $-\pi \times \sin \varphi_0$ à $\pi \times \sin \varphi_0$.

On aura donc : $\gamma = L \times \sin \varphi_0$

M' sur la figure 19 sera repéré en coordonnées polaires (ρ, γ) . La distance SM' , notée ρ , n'est fonction que de ϕ , la latitude de M , alors que l'angle γ est une fonction linéaire de L (voir encadré ci-dessus) :

$$\rho = r(\phi) \text{ et } \gamma = L \sin \varphi_0$$

Dans les exemples de projections coniques qui suivent, on fera en sorte que les déformations au voisinage du parallèle de tangence soient nulles : on parle alors de parallèle automécoïque.

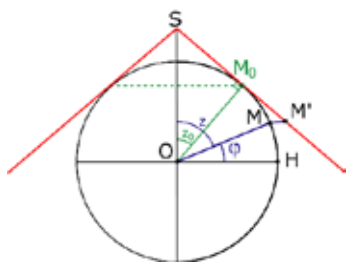


Fig.21. Au lieu d'exprimer ρ en fonction de φ , on peut l'exprimer en fonction de z , son complémentaire (colatitude). On aura alors : $\rho = f(z)$ et $\gamma = L \cos z_0$

Projection conique mérid-équidistante

On veut que l'échelle locale de distance sur les méridiens soit constante. Les parallèles sur la carte seront alors équidistants (voir figures 22). On doit aussi s'arranger pour que l'échelle de distance sur ces méridiens soit la même que sur le parallèle de tangence (le parallèle vert de la figure 18), ceci pour que les cartes soient peu déformées au niveau des régions traversées par ce parallèle (dit automécoïque). Pour cela, on doit avoir : $M_0M' = \widehat{M_0M}$ (longueur de l'arc). Les calculs donnent alors (voir encadré) : $\rho = z - z_0 + \tan z_0$ (ou z est le complémentaire de φ)

C'est la projection de Delisle.

Calculs pour une projection conique mérid-équidistante

Quand on déroule le cône, le parallèle de tangence ne change pas de longueur, et l'échelle locale de distance y est égale à 1.

Pour avoir la même échelle locale de distance sur les méridiens, on doit avoir (figure 21) :

$$M_0M' = \widehat{M_0M} = z - z_0 \text{ (la sphère a pour rayon 1).}$$

$$\text{D'où } \rho = SM' = SM_0 + M_0M' = \tan z_0 + z - z_0.$$



Fig.22a. Carte de la Terre en projection conique mérid-équidistante. Projection sur un cône tangent au parallèle $+47^\circ$, indiqué en pointillés rouges (latitude moyenne en France métropolitaine).

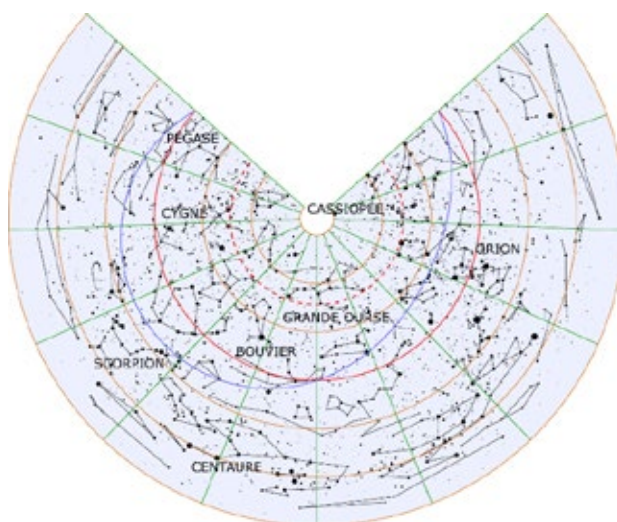


Fig.22b. Carte du ciel en projection conique mérid-équidistante. Projection sur un cône tangent au parallèle $+47^\circ$. On remarque sur ces deux cartes que le pôle Nord n'est pas ponctuel, mais étalé sur un arc de cercle.

Projection conique équivalente (d'Albers)

Nous avons vu dans la partie 1 (CC n° 164 p 11) la condition pour qu'une projection soit équivalente (conserve les aires).

De plus, pour que le parallèle de tangence soit automécoïque, l'échelle locale de distance sur les méridiens aux alentours du parallèle de tangence doit être la même que sur le parallèle tangent (où elle vaut 1). Les calculs (dans l'encadré) donnent alors :

$$\rho = \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \varphi_0} - 2 \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}} \text{ et } \gamma = L \sin \varphi_0$$

Calculs pour une projection conique équivalente

Une projection est équivalente si (cf partie 1 CC n° 164) :

$$\frac{\rho}{\cos \varphi} \times \left(\frac{d\rho}{dL} \times \frac{d\gamma}{d\varphi} - \frac{d\rho}{d\varphi} \times \frac{d\gamma}{dL} \right) \text{ est constant} \quad (1)$$

Comme $\gamma = L \sin \varphi_0$, $d\gamma/d\varphi = 0$ et $d\gamma/dL = \sin \varphi_0$, la condition

$$(1) \text{ devient : } \frac{\rho}{\cos \varphi} \times \left(-\frac{d\rho}{d\varphi} \times \sin \varphi_0 \right) = a \quad (2)$$

ou encore $\rho d\rho \times \sin \varphi_0 = -a \cos \varphi d\varphi$

soit, en intégrant : $\rho^2/2 \times \sin \varphi_0 = -a \sin \varphi + b \quad (3)$

On calcule a et b à partir des deux conditions suivantes (fig 20)
1. Pour φ proche de φ_0 , l'échelle locale de distance doit être égale à 1. On aura donc $d\rho/d\varphi = -1$ au voisinage de φ_0 (quand φ augmente, ρ diminue, d'où le signe $-$).

On remplace dans l'égalité (2) ρ par ρ_0 (soit $1/\tan \varphi_0$), φ par φ_0 et $d\rho/d\varphi$ par -1 :

$$\frac{1}{\tan \varphi_0 \times \cos \varphi_0} \times \sin \varphi_0 = a \text{ d'où } a = 1$$

2. Si $\varphi = \varphi_0$, $\rho = 1/\tan \varphi_0$. En remplaçant dans (3), on obtient :

$$1/\tan^2 \varphi_0 / 2 \times \sin \varphi_0 = -\sin \varphi_0 + b$$

$$\text{ce qui donne } b = (1 + \sin^2 \varphi_0)/(2 \sin \varphi_0)$$

En remplaçant a et b par leur valeur dans l'égalité 3, on arrive

$$\text{finalement à : } \rho^2 = 1 + \frac{1}{\sin^2 \varphi_0} - 2 \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}$$

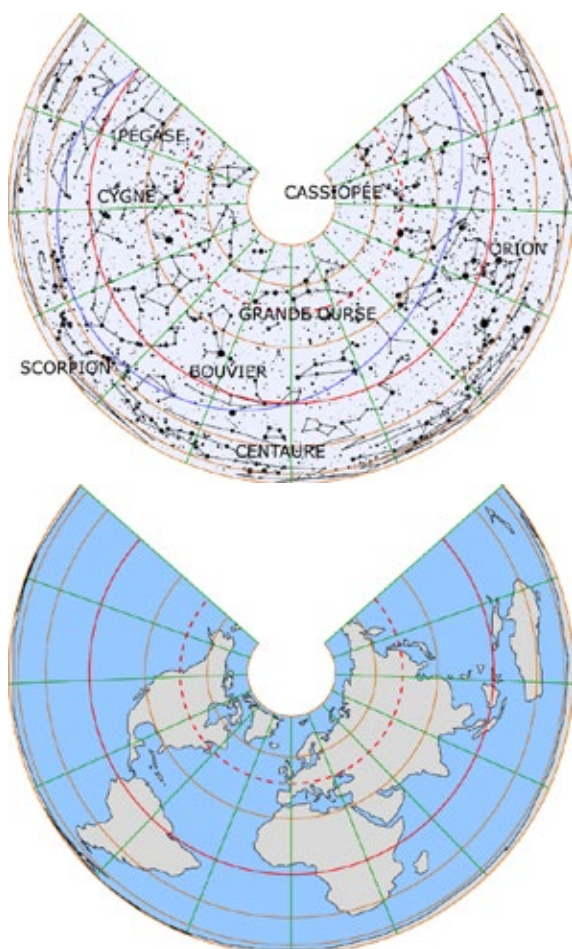


Fig.23. Cartes du ciel et de la Terre en projection conique équivalente jusqu'à la déclinaison de -60° . Projection sur un cône tangent au parallèle $+47^\circ$ (pointillés rouges). Ici, les aires sont conservées et non les formes. Le Scorpion ou l'Australie sont étirés en largeur et aplatis en hauteur.

Projection conique conforme (de Lambert)

Nous avons vu dans la partie 2 (CC n° 165 p. 33) les conditions pour qu'une projection soit conforme (conserve les formes donc les angles). Pour une projection conique, on obtient la formule suivante (calculs dans l'encadré) :

$$\rho = \tan z_0 \times e^{\cos z_0 \times \ln \left(\frac{\tan(z/2)}{\tan(z_0/2)} \right)}$$

Lorsque l'on s'éloigne du pôle Nord, les parallèles deviennent de plus en plus espacés. On ne peut pas représenter ainsi toute la sphère (terrestre ou céleste). Les cartes qui suivent vont du pôle Nord au parallèle -60° .

Les formes sont conservées à petite échelle : la France ou Madagascar sont bien reconnaissables sur la première carte ainsi que la Grande Ourse ou le Scorpion sur la seconde.

Calculs pour une projection conique conforme

La projection étant conique, nous avons :

$$\rho = r(\varphi) \text{ et } \gamma = L \cos z_0 \text{ donc } d\gamma/d\varphi = 0 \text{ et } d\gamma/dL = \cos z_0,$$

Pour une projection conforme, nous avons vu (CC n° 165 p. 33) deux conditions (C1) et (C2).

(C1) se vérifie facilement avec la formule ou en remarquant simplement que, sur la carte projetée, les parallèles sont bien perpendiculaires aux méridiens.

Pour la condition (C2), on obtient, en remplaçant $d\gamma/d\varphi$ par 0 et $d\gamma/dL$ par $\cos z_0$, dans la formule :

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + 0 = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \times (0 + \rho^2 \sin^2 \varphi_0)$$

Si le parallèle tangent est dans l'hémisphère nord, φ_0 est positif ; $\cos \varphi$, ρ et $\sin \varphi$ sont aussi positifs alors que $d\rho/d\varphi$ est négatif car $\rho = r(\varphi)$ est décroissant. Si φ_0 négatif, $\sin \varphi_0$ est négatif mais tous les autres termes, y compris $d\rho/d\varphi$ sont positifs. On a donc :

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{\cos \varphi} \times \rho \sin \varphi_0$$

ce que l'on peut écrire : $\frac{1}{\rho} d\rho = -\sin \varphi_0 \times \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi$ (1)

On a trouvé une primitive de $1/\cos \varphi$ dans la recherche d'une projection cylindrique conforme (CC n° 165 p. 33 encadré 2). On peut donc intégrer la formule (1) et on obtient :

$$\ln \rho = -\sin \varphi_0 \times \ln \left(\tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) + k \quad (2)$$

Si on remplace φ par $\pi/2 - z$ (voir figure 21), cette formule devient :

$$\ln \rho = \cos z_0 \times \ln(\tan z) + k \quad (3)$$

On sait que, si $z = z_0$, alors $\rho = \tan z_0$ (1^{er} encadré de la page précédente). En remplaçant dans la formule (3), on en déduit k :

$$k = \ln(\tan z_0) - \cos z_0 \times \ln(\tan z_0)$$

La formule (3) peut alors s'écrire :

$$\ln \rho - \ln(\tan z_0) = \cos z_0 \times \ln(\tan z) + \cos z_0 \times \ln(\tan z_0)$$

ou encore

$$\rho = \tan z_0 \times e^{\cos z_0 \times \ln \left(\frac{\tan(z/2)}{\tan(z_0/2)} \right)}$$



Fig.24a. Carte de la Terre en projection conique conforme jusqu'à la déclinaison de -60° . Projection sur un cône tangent au parallèle $+47^\circ$ (en rouge).

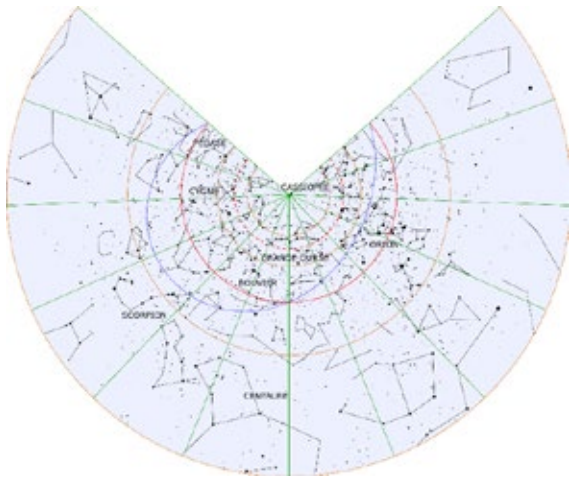


Fig.24b. Carte du ciel en projection conique conforme jusqu'à la déclinaison de -60° . Projection sur un cône tangent au parallèle $+47^\circ$ (en rouge).

Projections coniques (cône sécant)

On peut remplacer le cône tangent par un cône sécant suivant deux parallèles (figure 25). Il est possible de faire en sorte que ces deux parallèles soient automécoïques (déformations locales nulles autour de chacun de ces deux parallèles). Pour une carte de France avec peu de déformation, on choisira par exemple comme parallèles auto-mécoïques, les latitudes 44° et 49° .

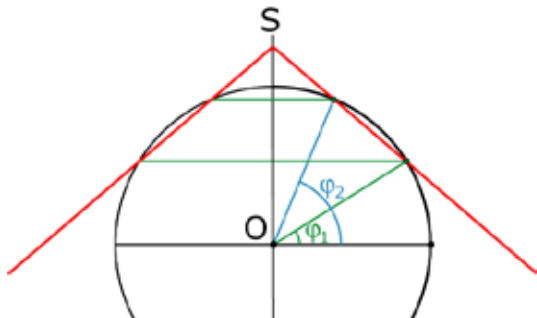


Fig.25. Le cône est ici sécant à la sphère suivant deux parallèles de latitude φ_1 et φ_2 .

On peut alors chercher des formules pour une projection mérid-équidistante, équivalente ou conforme. Si l'on veut avoir deux parallèles automécoïques, il n'est plus possible de déplier

le cône comme dans le paragraphe précédent et d'utiliser la formule $\gamma = L \sin \varphi_0$.

On utilise alors une formule de la forme $\gamma = L \times n$, ce qui revient à ouvrir ou fermer le cône déplié à la manière d'un éventail.

Les formules obtenues ne sont pas simples mais elles sont utilisées couramment, aussi bien pour les cartes terrestres que pour les cartes célestes. Nous ne les démontrerons pas ici, elles sont justes données dans l'encadré qui suit, où φ_1 et φ_2 sont les latitudes des parallèles intersection.

Formules avec cône sécant

Projection conique mérid-équidistante (de Delisle)

$$\gamma = \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} \times L \quad \text{et} \quad \rho = -\varphi + \frac{\varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}$$

Projection conique équivalente (d'Albers)

$$\gamma = \frac{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2}{2} \times L$$

$$\rho = \frac{2}{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2} \sqrt{(1 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) - \sin \varphi \cdot (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)}$$

Projection conique conforme (de Lambert)

$$n = \frac{\log(\cos \varphi_1) - \log(\cos \varphi_2)}{\log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) - \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2}\right)\right)}$$

$$\gamma = n \times L \quad \text{et} \quad \rho = \frac{\cos \varphi_1}{n} \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) \right)^n \times \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right)^n$$

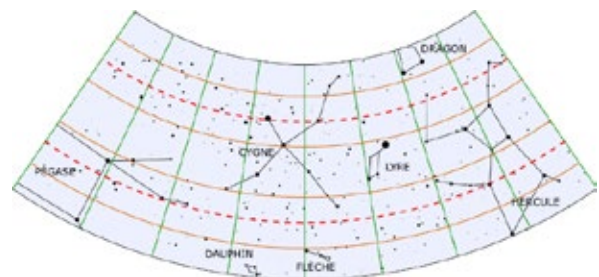


Fig.26. Carte partielle du ciel en projection conique conforme ($14^\circ < \delta < 56^\circ$ et $16 \text{ h} < \alpha < 24 \text{ h}$). Les deux parallèles automécoïques sont en pointillés rouges (25° et 45°). Les parallèles sont tracés en orange tous les 10° et les méridiens en vert toutes les heures.

Propriétés des projections coniques

Projection	merid-équidistante	conique d'Albers	conique de Lambert
Images des parallèles	arcs de cercle		
Images des méridiens	segments (ou demi-droites)		
Longueurs sur un parallèle	non conservées		
Longueurs sur un méridien	conservées	non conservées	non conservées
Angles	non conservés	non conservés	conservés
Aires	non conservées	conservées	non conservées