

NOTIONS DE BASE

Cartes du ciel, cartes de la Terre (2)

Michel Bobin, Pierre Causeret

Quelles sont les différentes projections utilisées pour représenter la Terre et le ciel ? Voici la suite de l'article commencé dans le n° 164 avec ici les projections cylindriques et pseudocylindriques.

Projections cylindriques

On projette la sphère (terrestre ou céleste) sur un cylindre que l'on choisit tangent à la sphère, selon l'équateur (terrestre ou céleste).

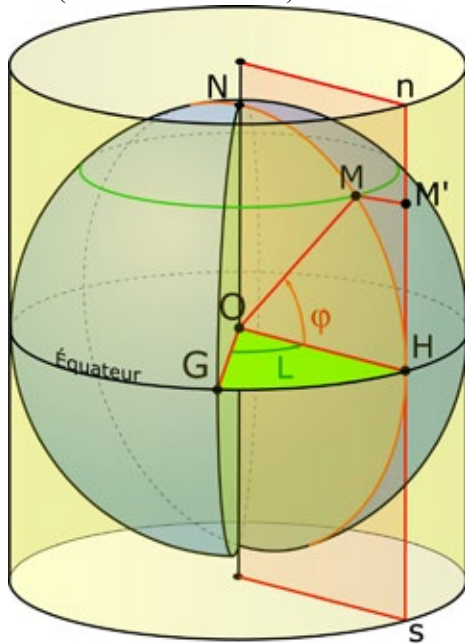


Fig.9. Le point M de la sphère est projeté sur le cylindre en un point M' qui est situé dans le plan du méridien de M (représenté en rose sur la figure), donc quelque part sur la droite (ns) . Pour les formules, rappelons que l'on considère une sphère de rayon 1 et des angles en radians.

Dans un deuxième temps, on déroule le cylindre pour obtenir une représentation plane de la sphère. Le point M' a alors pour abscisse L (on prend G comme origine) et comme ordonnée HM' qui ne dépend que de φ , le point H se projetant en H .

On a donc :

$$x = L \text{ et } y = f(\varphi) \text{ avec } f(0) = 0$$

La projection quadratique vue dans la première partie de l'article est une projection cylindrique où l'on a $y = \varphi$.

Projection cylindrique perspective

On décide que O , M et M' sont alignés (figure 10). On a donc $HM' = \tan \varphi$

Fig.10. Projection cylindrique perspective. Lorsque le point M se rapproche du pôle Nord, M' tend vers l'infini. Cette projection est intéressante à proximité de l'équateur où c'est une quasi isométrie mais elle a peu d'utilité près des pôles.

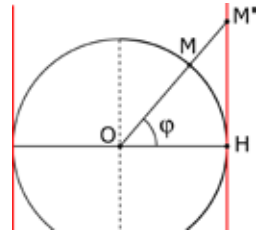


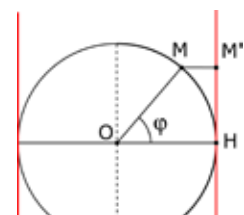
Fig. 11. Carte du ciel et de la Terre en projection cylindrique perspective pour une déclinaison (ou une latitude) comprise entre -60° et $+60^\circ$. On a supprimé les régions trop proches des pôles, très déformées. On a tracé les parallèles $0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 60^\circ$.

Projection cylindrique équivalente de Lambert

Une projection équivalente doit conserver les aires. Les calculs de l'encadré page suivante montre que l'on doit avoir :

$$x = L \text{ et } y = \sin$$

Fig.12. Projection cylindrique équivalente dite aussi projection cylindrique de Lambert. Pour avoir $y = \sin \varphi$, il suffit que (MM') soit parallèle à (OH) .



Calculs pour une projection cylindrique équivalente

Nous avons montré dans la première partie qu'une projection est équivalente si $\frac{1}{\cos \varphi} \times \left(\frac{dx}{dL} \times \frac{dy}{d\varphi} - \frac{dx}{d\varphi} \times \frac{dy}{dL} \right)$ est constant.

En remplaçant x par L et y par $f(\varphi)$, cela devient :

$\frac{1}{\cos \varphi} \times \left(1 \times \frac{dy}{d\varphi} - 0 \times 0 \right)$ est constant donc $\frac{dy}{d\varphi} = k \times \cos \varphi$

On en déduit $y = k \sin \varphi$ (pour $\varphi = 0$, on doit voir $y = 0$).

On prendra ici $k = 1$ donc $y = \sin \varphi$.

Sur les cartes ci-dessous, on peut remarquer que, plus on s'éloigne de l'équateur, plus les parallèles sont étirés et les méridiens compressés. Cette projection ne conserve pas les distances, ni sur les parallèles, ni sur les méridiens.

Un simple coup d'oeil sur ces cartes montre aussi qu'elle n'est pas conforme : les constellations comme les continents sont déformés. On peut chercher s'il existe une projection cylindrique conforme.

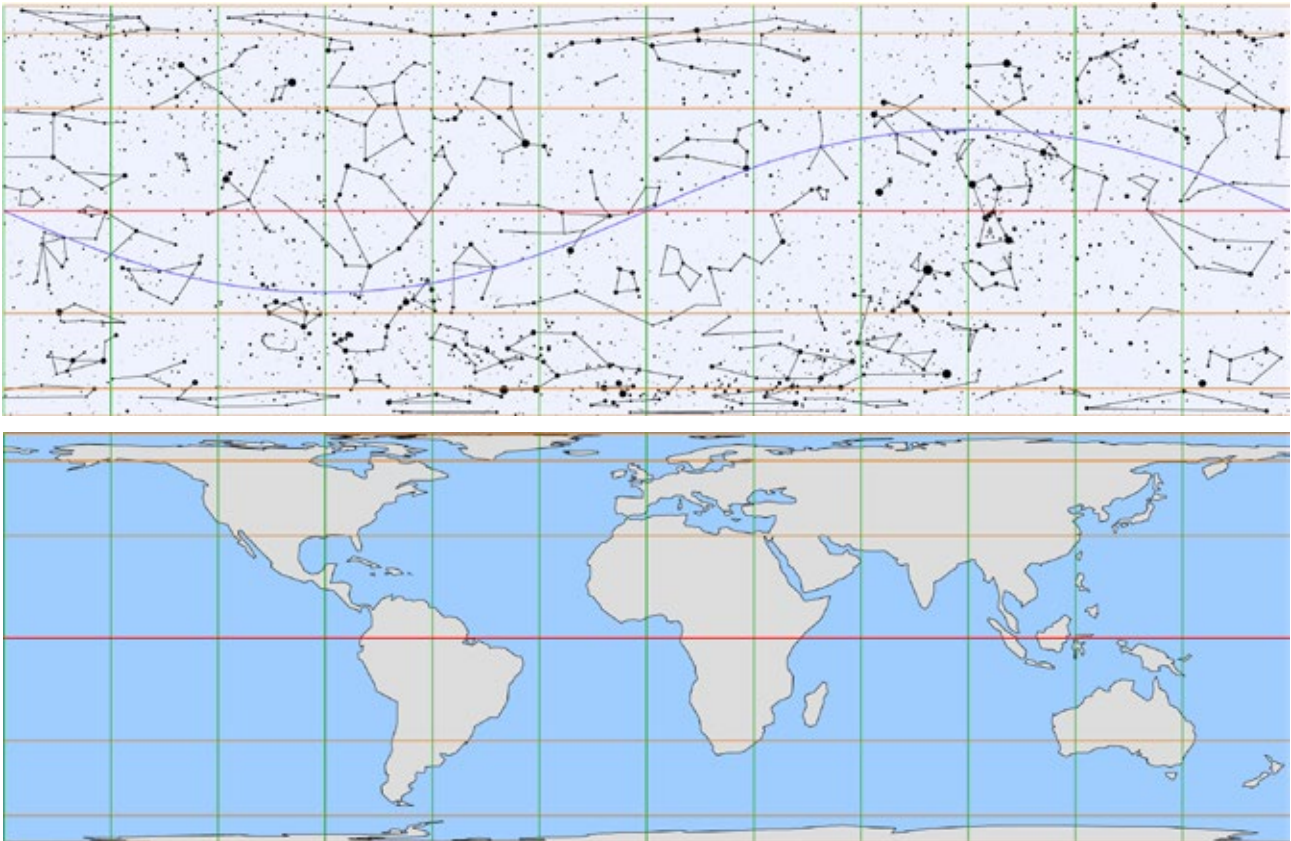


Fig.13. Carte du ciel et de la Terre en projection cylindrique de Lambert. Ici, les aires sont conservées, la projection est dite équivalente.

Projection cylindrique conforme de Mercator

Une projection conforme doit conserver les angles. Les formes seront donc aussi être conservées. Si on observe les cartes ci-dessus, on peut deviner qu'il doit être possible d'obtenir une projection cylindrique conforme en étirant la carte vers le haut et vers le bas du côté des pôles. Mais obtenir une formule précise est une autre histoire. Les calculs sont donnés dans les encadrés de la page suivante. La projection cylindrique conforme, dite aussi projection cylindrique de Mercator, est définie ainsi :

$$x=L \text{ et } y = \ln \left(\tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

Sur ce type de carte, plus on s'éloigne de l'équateur, plus l'agrandissement est important.



Fig.14. Carte de la Terre en projection cylindrique conforme (de -80° à $+80^\circ$ de latitude). La forme des continents est bien reconnaissable. Mais cette projection ne conserve pas les aires : le Groenland apparaît ici aussi grand que l'Afrique...

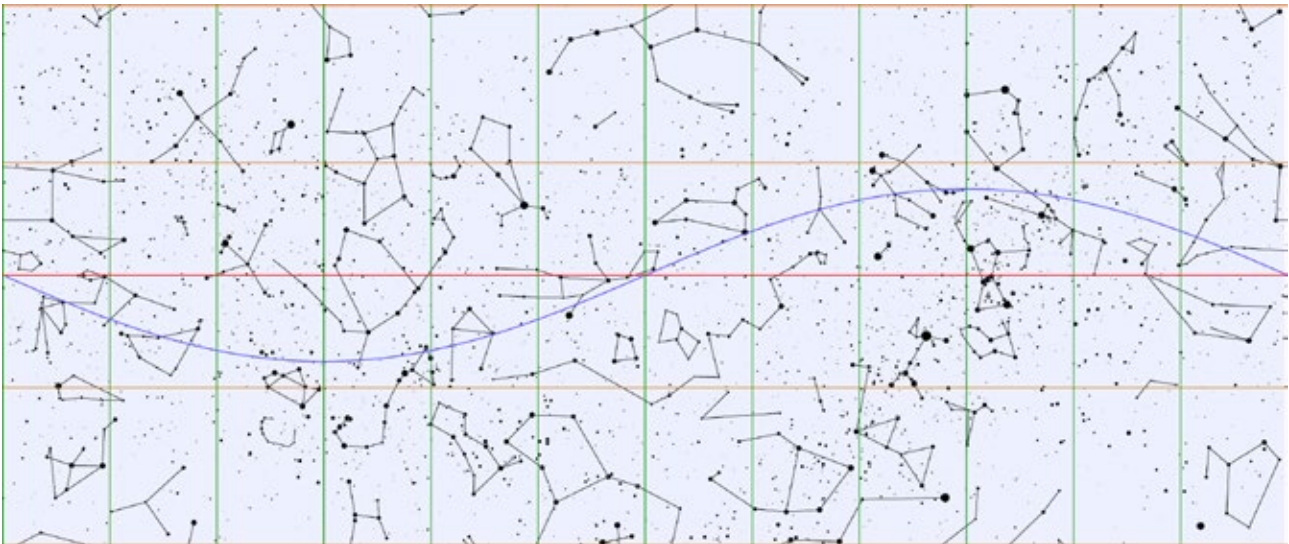


Fig.15. Carte du ciel en projection cylindrique conforme (de -60° à $+60^\circ$ de latitude). On reconnaît bien les formes, comme les constellations d'Orion ou de la Grande Ourse mais la première est beaucoup trop petite comparée à la seconde.

Conditions pour une projection conforme (avec quelques calculs mathématiques)

Rappels de l'article précédent

Sur la sphère unité

$M_1(L, \varphi) ; M_2(L+\Delta L, \varphi)$

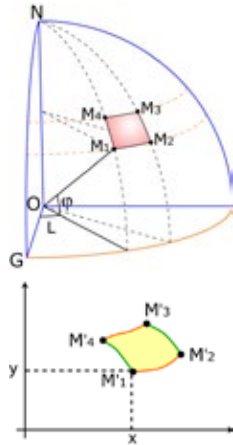
$M_4(L, \varphi+\Delta\varphi) ; M_3(L+\Delta L, \varphi+\Delta\varphi)$

$M_1M_2M_3M_4$ est un «rectangle» élémentaire.

Rayon du parallèle de M_1 : $\cos \varphi$.

Longueur de $\overline{M_1M_2} = \Delta L \times \cos \varphi$

Longueur de $\overline{M_1M_4} = \Delta\varphi$



Sur la carte

$M'_1M'_2M'_3M'_4$ est assimilé à un parallélogramme.

$$M'_1(x, y) \text{ et } M'_2\left(x + \frac{dx}{dL} \Delta L, y + \frac{dy}{dL} \Delta L\right) \text{ donc } \overline{M'_1M'_2} : \Delta L \left(\frac{dx}{dL}, \frac{dy}{dL}\right)$$

$$M'_1(x, y) \text{ et } M'_4\left(x + \frac{dx}{d\varphi} \Delta\varphi, y + \frac{dy}{d\varphi} \Delta\varphi\right) \text{ donc } \overline{M'_1M'_4} : \Delta\varphi \left(\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi}\right)$$

Première condition pour une projection conforme (C1)

Les angles droits doivent être conservés donc $\overline{M_1M_2}$ doit être perpendiculaire à $\overline{M_1M_4}$. Leur produit scalaire doit être nul, ce qui s'écrit, avec les coordonnées ci-dessus :

$$\frac{dx}{dL} \times \frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dL} \times \frac{dy}{d\varphi} = 0 \quad (C1)$$

Deuxième condition pour une projection conforme (C2)

Pour que les angles soient conservés, il ne faut pas que le rectangle élémentaire soit aplati ou étiré. Ce qui revient à dire que l'échelle locale de distance le long d'un parallèle doit être égale à l'échelle locale de distance le long d'un méridien :

Echelle locale de distance le long d'un méridien (notée E_{dm}) :

$$E_{dm} = \frac{M'_1M'_4}{M_1M_4} = \frac{\Delta\varphi \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}}{\Delta\varphi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}$$

Echelle locale de distance le long d'un parallèle (notée E_{dp}) :

$$E_{dp} = \frac{M'_1M'_2}{M_1M_2} = \frac{\Delta L \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dL}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dL}\right)^2}}{\Delta L \cdot \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dL}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dL}\right)^2}$$

On doit donc avoir :

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dL}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dL}\right)^2} \quad (C2)$$

Pourqu'une projection définie en coordonnées cartésiennes soit conforme, il faut qu'elle vérifie les deux conditions (C1) et (C2).

Si la projection est définie en coordonnées polaires (ρ, γ), ces deux conditions s'écriront :

$$\frac{d\rho}{dL} \times \frac{d\rho}{d\varphi} + \rho^2 \frac{d\gamma}{dL} \times \frac{d\gamma}{d\varphi} = 0$$

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\gamma}{d\varphi}\right)^2} = \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dL}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\gamma}{dL}\right)^2}$$

Calculs pour une projection cylindrique conforme

La condition (C1) ci-dessus est remplie pour toute projection cylindrique. En effet, avec $x = L$ et $y = f(\varphi)$, (C1) devient :

$1 \times 0 + 0 \times f'(\varphi) = 0$. Ce que l'on aurait aussi pu vérifier à partir de la construction même d'une projection cylindrique qui donne, sur la carte, des méridiens « verticaux » ($//(y'y)$) et des parallèles « horizontaux » ($//(x'x)$), d'où $\overline{M'_1M'_2} \perp \overline{M'_1M'_4}$

C'est plus délicat pour la condition (C2) qui s'écrit, avec $x = L$ et $y = f(\varphi)$: $dy/d\varphi = 1/\cos \varphi$. Vous pourrez essayer de résoudre cette équation différentielle par changement de variable en posant $\theta = \varphi + \pi/2$ puis $t = \tan(\theta/2)$. On obtient comme solution :

$$y = \ln \left(\tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

Propriétés des projections cylindriques

Projection	quadratique	cylindr. perspective	cylindr. de Lambert	cylindr. de Mercator
Images des parallèles	segments parallèles			
Images des méridiens	segments (ou droites) parallèles			
Longueurs sur un parallèle	non conservées			
Longueurs sur un méridien	conservées	non conservées	non conservées	non conservées
Angles	non conservés	non conservés	non conservés	conservés
Aires	non conservées	non conservées	conservées	non conservées

Projections pseudocylindriques

Sur une carte réalisée à l'aide d'une projection pseudocylindrique (ou méricylindrique), les parallèles sont des segments parallèles et le méridien central est un segment (ou une droite), ceci comme dans les projections cylindriques.

Mais les méridiens ne sont plus des segments (ou des droites) parallèles entre eux comme dans les projections cylindriques, ce sont des courbes coupant à intervalle régulier les parallèles (voir les figures 16 et 17). Cela évite d'avoir des parallèles aussi grands que l'équateur.

Dans ce type de projection, l'image d'un point de la sphère de coordonnées (L, φ) est un point du plan de coordonnées (x, y) tel que :

$$x = L \times f(\varphi) \text{ et } y = g(\varphi).$$

Pour une valeur de φ donnée :

- y est constant donc les parallèles sur la carte sont bien parallèles ;
- x est proportionnel à L donc les méridiens de la carte vont bien couper les parallèles à intervalle régulier. Le coefficient de proportionnalité est fonction de φ (ou de y).

Il existe une infinité de projections pseudocylindriques différentes. Aucune n'est conforme (à part les projections cylindriques) car, pour conserver les angles, les méridiens devraient être perpendiculaires aux parallèles. Plusieurs peuvent être équivalentes donc conserver les aires. En voici deux.

La projection de Flamsteed

Si on choisit $y = \varphi$, les parallèles seront régulièrement espacés. À partir de la condition d'équivalence (rappelée dans l'encadré de la page 32), on trouve $f(\varphi) = k \times \cos \varphi$ donc $x = k \times L \times f(\varphi)$. On choisit $k = 1$ pour que l'échelle soit la même sur l'équateur et le méridien central. On retrouve alors la projection de Flamsteed, étudiée dans l'article précédent (CC 164 p.10, figures 7 et 8).

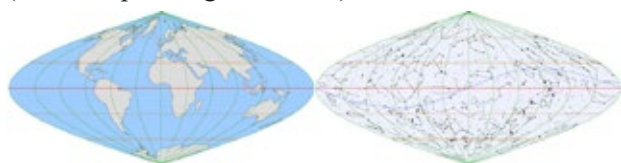


Fig.16. Cartes en projection de Flamsteed en petit format.

Calculs pour la projection de Mollweide (expliquée page suivante)

Les calculs sont ici plus longs et complexes. En voici un résumé.

On cherche une projection pseudocylindrique, on peut donc écrire : $x = L \times f(\varphi)$ et $y = g(\varphi)$ (1)

Si on remplace x et y par ces valeurs dans la condition d'une projection équivalente, $\frac{1}{\cos \varphi} \times \left(\frac{dx}{dL} \times \frac{dy}{d\varphi} - \frac{dx}{d\varphi} \times \frac{dy}{dL} \right) = k$,

$$\text{on obtient : } \frac{1}{\cos \varphi} \times f'(\varphi) \times g'(\varphi) = k \quad (2)$$

On veut que la sphère projetée soit limitée par une ellipse de grand axe 4 et de petit axe 2 donc :

$$\text{pour } L = \pi \text{ et } L = -\pi, \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad (3)$$

(3) avec (1) devient : $\frac{\pi^2}{4} f^2(\varphi) + g^2(\varphi) = 1$ soit

$$f(\varphi) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - g^2(\varphi)}$$

En remplaçant dans (2) :

$$\frac{1}{\cos \varphi} \times \frac{2}{\pi} \times \sqrt{1 - g^2(\varphi)} \times g'(\varphi) = k$$

$$\text{ou encore : } \sqrt{1 - g^2(\varphi)} \times g'(\varphi) = k \times \frac{\pi}{2} \times \cos \varphi \quad (4)$$

Pour résoudre cette équation différentielle, on effectue un changement de variable en posant $g(\varphi) = \sin \theta$

En remplaçant dans (4), on arrive à :

$$2 \cos^2 \theta \, d\theta = k\pi \cos \varphi \, d\varphi \quad (5)$$

Sachant que $2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$, on peut intégrer chaque membre de (5) et on arrive à :

$$2\theta + \cos 2\theta = 2k\pi \sin \varphi \quad (6)$$

Pour trouver k , on sait que, pour $\varphi = \pi/2$, $y = 1$ donc $\sin \theta = 1$ et $\theta = \pi/2$.

En remplaçant dans (6), on en déduit $k = 1/2$.

L'équation (6) devient alors $2\theta + \cos 2\theta = \pi \sin \varphi$, équation qui ne peut se résoudre que par approximations successives.

Une fois trouvé θ , on a $y = g(\varphi) = \sin \theta$ et

$$x = L \times f(\varphi) \text{ avec } f(\varphi) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - g^2(\varphi)} = \frac{2}{\pi} \cos \theta$$

Conclusion :

$$x = \frac{2}{\pi} \times L \times \cos \theta \text{ et } y = \sin \theta$$

avec θ solution de $2\theta + \cos 2\theta = \pi \sin \varphi$

La projection de Mollweide

Le côté pointu des pôles sur les cartes précédentes peut gêner. On peut essayer d'obtenir un contour elliptique dont le grand axe sera l'équateur et le petit axe, le méridien central, de longueur moitié du précédent. Tous les méridiens seront alors des demi-ellipses.

Pour obtenir une projection équivalente, les calculs sont complexes. Vous les trouverez résumés dans l'encadré de la page précédente ou plus détaillés sur le site dans la version numérique. Les formules sont données ci-dessous, suivies des deux cartes correspondantes.

$$x = \frac{2}{\pi} \times L \times \cos \theta \text{ et } y = \sin \theta$$

avec $2\theta + \sin 2\theta = \pi \sin \varphi$, cette équation en θ devant se résoudre par approximation.

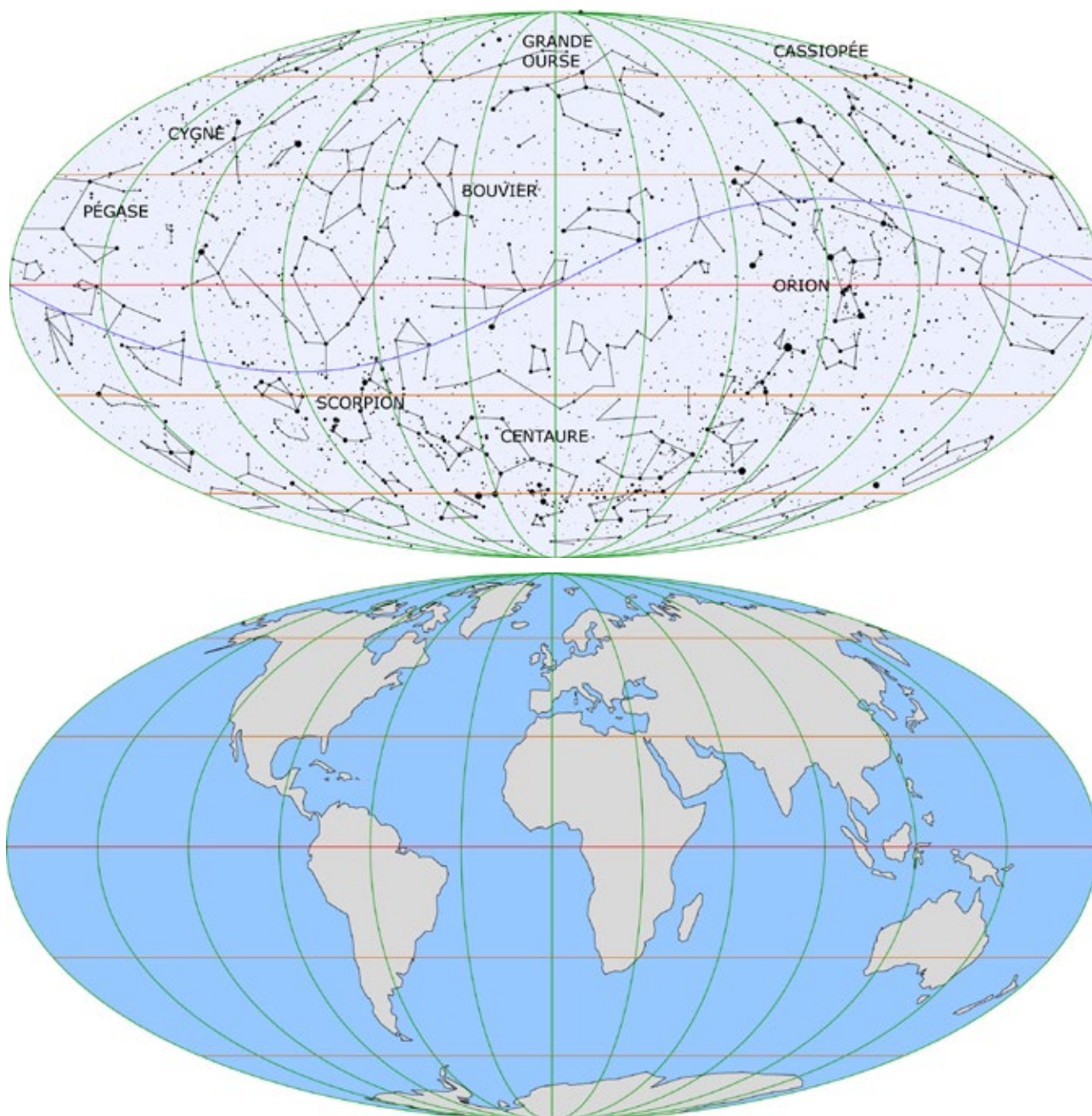


Fig. 17. La projection de Mollweide donne des cartes de l'ensemble de la sphère céleste ou terrestre qui apparaissent plus crédibles qu'avec la projection de Flamsteed à cause de leur forme elliptique, mais les calculs sont plus complexes. Ces deux projections conservent les aires.

Dans le prochain numéro, nous aborderons les projections coniques. ■

Projection pseudocylindrique de Mollweide

Calcul des coordonnées

Données

Coordonnées du point M sur la sphère de rayon 1 : (L, φ) projeté en un point de coordonnée (x, y).

L (longitude) de $-\pi$ à $+\pi$ et φ (latitude) de $-\pi/2$ à $+\pi/2$

→ Projection pseudocylindrique donc $x = L \times f(\varphi)$ et $y = g(\varphi)$ (1)

→ On veut une projection équivalente donc $\frac{1}{\cos \varphi} \times \left(\frac{dx}{dL} \times \frac{dy}{d\varphi} - \frac{dx}{d\varphi} \times \frac{dy}{dL} \right) = k$

ce qui devient, avec (1) : $\frac{1}{\cos \varphi} \times f(\varphi) \times g'(\varphi) = k$ (2)

→ On veut que la sphère projetée soit limitée par une ellipse de grand axe 4 et de petit axe 2

donc pour $L = \pi$ et $L = -\pi$, $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (3)

Calculs

(3) avec (1) devient : $\frac{\pi^2}{4} f^2(\varphi) + g^2(\varphi) = 1$ soit $f(\varphi) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - g^2(\varphi)}$

En remplaçant dans (2) : $\frac{1}{\cos \varphi} \times \frac{2}{\pi} \times \sqrt{1 - g^2(\varphi)} \times g'(\varphi) = k$

ou encore : $\sqrt{1 - g^2(\varphi)} \times g'(\varphi) = k \times \frac{\pi}{2} \times \cos \varphi$ (4)

Pour résoudre cette équation différentielle, on effectue un changement de variable en posant $g(\varphi) = \sin \theta$ (on a $-1 < y < 1$ donc $-1 < g(\varphi) < 1$)

En remplaçant dans (4) : $\cos \theta \times \cos \theta \times \frac{d\theta}{d\varphi} = k \times \frac{\pi}{2} \times \cos \varphi$

soit $2 \cos^2 \theta \, d\theta = k \times \pi \times \cos \varphi \, d\varphi$ (5)

On sait que $2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$, ce qui permet d'intégrer chaque membre de (5)

$\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta = k \times \pi \times \sin \varphi$ ou $2\theta + \cos 2\theta = 2k\pi \times \sin \varphi$ (6)

Calcul de k :

Pour $\varphi = \pi/2$, $y = 1$ donc $\sin \theta = 1$ et $\theta = \pi/2$

En remplaçant dans (6) : $\pi = 2k\pi$ donc $k = 1/2$

L'équation (6) devient donc $2\theta + \cos 2\theta = \pi \sin \varphi$

On peut résoudre cette équation par approximations successives, par dichotomie, par la tangente (méthode qui pose problème pour φ proche de $\pi/2$).

Une fois trouvé θ , on a $y = g(\varphi) = \sin \theta$

Pour x, on sait que $x = L \times f(\varphi)$ et $f(\varphi) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - g^2(\varphi)} = \frac{2}{\pi} \cos \theta$

Conclusion

Pour trouver le projeté de M : (L, φ)

1. On résout l'équation $2\theta + \cos 2\theta = \pi \sin \varphi$ par approximations successives.

2. On calcule x et y ainsi :

$x = \frac{2}{\pi} \times L \times \cos \theta$ et $y = \sin \theta$