# AVEC NOS ÉLÈVES

## Magnitude apparente d'une étoile

**Sylvie Thiault,** professeur de mathématiques au lycée J-P Sartre de Bron.

*Je propose ce travail en accompagnement personnalisé en mathématiques à une classe de Terminale S après l'étude des fonctions logarithmes, en janvier. Il est précédé d'une observation du ciel à l'œil nu, quand la météo le permet… à défaut une brève introduction à la différence d'intensité et de couleur des étoiles à l'aide du logiciel Stellarium.*

.

BO n° 8 du 13 octobre 2011, extrait des commentaires : « On évoque la fonction logarithme décimal pour son utilité dans les autres disciplines... » ;
« [SPC] Intensité sonore, magnitude d'un séisme, échelle des pH ».
Les élèves avaient déjà étudié en physique l'intensité sonore et connaissaient également l'échelle des pH. J'ai choisi d'étendre les suggestions d'utilisation des logarithmes décimaux aux magnitudes des astres.

### Magnitude apparente

Hipparque, mathématicien et astronome grec du IIe siècle av J.-C., avait proposé de classer les étoiles en fonction de leur éclat, sur une échelle de 1 à 6. Les étoiles les plus brillantes sont de grandeur 1 et les moins lumineuses de grandeur 6.


Au XIXe siècle, Fechner montre que si on double la puissance reçue, que ce soit pour un son ou un rayonnement, nous percevons non pas une puissance double, mais une variation logarithmique. Une suite de puissance lumineuse comme 1, 2, 4, 8, 16 sera perçue par l'œil et le cerveau comme 1, 2, 3, 4, 5.
Pogson, astronome anglais adapte cette loi aux magnitudes des astres.

La magnitude m en fonction de l'éclat perçu E doit donc être de la forme :

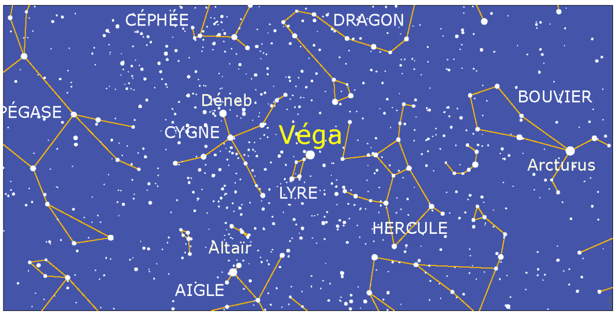
$$m = k \log(E) + k'.$$

(l'éclat est la puissance reçue par unité de surface)

Pour rester en accord avec la classification ancienne, on a décidé qu'entre une étoile de magnitude 1 et une étoile de magnitude 6, le rapport des éclats apparents est 100.

**1.** Soit $E_1$ l'éclat d'une l'étoile $S_1$ de magnitude 1 et $E_2$ l'éclat d'une l'étoile $S_2$ de magnitude 6.
On a donc : $E_1/E_2 = 100$.
On peut alors écrire : $1 = k \log(E_1) + k'$
et $6 = k \log(E_2) + k'$.
En utilisant les deux relations ci-dessus, calculer k.

**2.** L'étoile Véga, de la constellation de la Lyre, est très brillante. On a fixé sa magnitude apparente à 0.
On notera $E_0$ l'éclat apparent de Véga.




*Carte d'identité de l'étoile Véga (source : Stellarium).*

Véga (alpha Lyr - 3 Lyr) - HIP 91262
Type : étoile variable pulsante
Magnitude : 0.00
Magnitude absolue : 0.57
Type spectral : A0Vvar
Distance : 25.04 années-lumière
Parallaxe : 0.13023"
Période : 0.19 days

Exprimer k' en fonction de $E_0$.

En déduire m, la magnitude apparente d'une étoile d'éclat apparent E.

**3.** Montrer que si m et m' sont les magnitudes apparentes de deux étoiles d'éclat respectifs E et E', on a : m < m' si et seulement si E > E'.
Interpréter.
Que peut-on dire d'une étoile qui a une magnitude apparente négative ?

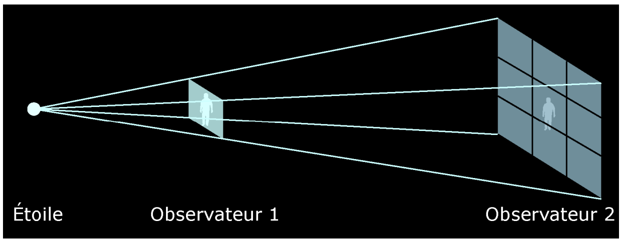
**4.** L'étoile la plus brillante, après le Soleil, est Sirius, dans la constellation du grand Chien. Son éclat est 3,8 fois celui de Véga. Calculer sa magnitude apparente.

La magnitude apparente du Soleil, $m_S$, est –26,7. Calculer le rapport entre l'éclat apparent du Soleil, $E_S$, et celui de Véga, $E_0$.

## Magnitude absolue

Pour une étoile située à une distance d de l'observateur, E, l'éclat de l'étoile qu'il perçoit, est la quantité d'énergie qui arrive à la distance d par unité de temps et par unité de surface perpendiculaire à son rayonnement. Si L est la luminosité intrinsèque d'une étoile, c'est à dire la puissance rayonnée par l'étoile dans toutes les directions, on a :

$$E = \frac{L}{4\pi d^2}.$$




*Si on triple la distance étoile-observateur, l'éclat reçu par unité de surface est divisé par 9. L'éclat E est inversement proportionnel au carré de la distance d.*

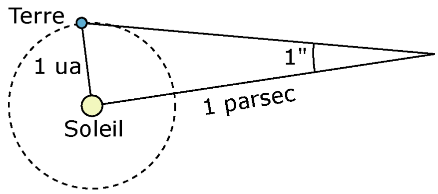
Pour comparer la luminosité intrinsèque des étoiles, les astronomes utilisent la magnitude absolue.
Par définition, la magnitude absolue M d'une étoile serait sa magnitude apparente si elle était à une distance de 10 parsecs (voir encadré).

**1.** Exprimer la magnitude apparente m d'une étoile située à une distance d, en fonction de sa distance d, de sa luminosité intrinsèque L et de $E_0$, l'éclat de Véga.

En déduire l'expression de M en fonction de L et de $E_0$.

### Les unités de longueur des astronomes

L'unité astronomique (UA) est le demi-grand axe de l'orbite terrestre (distance moyenne Terre-Soleil).
L'année-lumière est la distance parcourue par la lumière en un an.
Le parsec (pc) est la distance à laquelle on verrait une unité astronomique sous un angle de 1 seconde d'arc.




1 UA = $1{,}5\times10^8$ km ;

c = vitesse de la lumière = $3\times10^5$ km.s$^{-1}$.

1 al = $3\times10^5\times3\,600\times24\times365{,}25$ km = $9{,}5\times10^{12}$ km

1pc = 206 265 UA = $3{,}1\times10^{16}$ m = 3,26 al

**2.** Montrer que pour une étoile située à une distance d, on a : **m – M = 5 log(d) – 5**.
Cette quantité s'appelle le module de distance de l'étoile. On le note μ.

Vérifier que les données fournies sur Véga vérifient la formule du module de distance.

Exprimer d en fonction de μ.

**3.** Calculer les distances des étoiles suivantes (calculer en pc, puis en km et en al).

| Magnitude | absolue | apparente |
|---|---|---|
| Aldébaran | -0,69 | 0,86 |
| Bételgeuse | -5,5 | 0,42 |
| Capella | -0,51 | 0,08 |

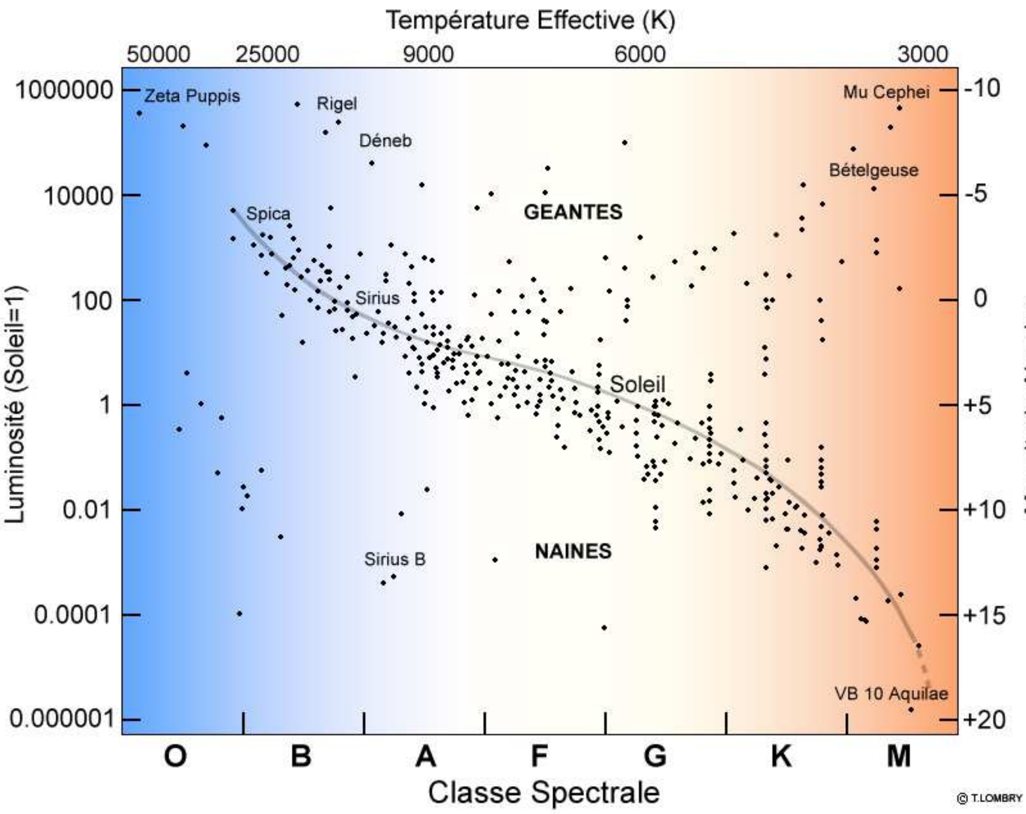
*(source SIMBAD)*

**Compléments possibles**

**4.** Placer Véga dans le diagramme de Hertzsprung-Russel (H.R.) page suivante.

**5.** Loi de Stefan. Si on appelle L la luminosité intrinsèque d'une étoile (puissance rayonnée dans toutes les directions), on a :
$L = 4\times\pi\times R^2\times\sigma\times T^4$,
où R est le rayon de l'étoile, σ une constante et T la température de surface de l'étoile.
Cette loi permet de calculer le rayon d'une étoile connaissant sa luminosité mais les fonctions puissances ne sont plus au programme de TS

# Le diagramme HR pour placer Véga




**Les solutions**

Sur la magnitude apparente :

1. $k = -2{,}5$

2. $k' = 2{,}5 \log(E_0)$ ; $m = -2{,}5 \log(E/E_0)$

3. $m < m' \Leftrightarrow \log(E/E_0) > \log(E'/E_0) \Leftrightarrow E > E'$
Plus l'étoile a une luminosité faible, plus sa magnitude est grande.
Si $m < 0$, alors $E > E_0$. Une étoile de magnitude négative est plus brillante que Véga.
$E_{Sirius} = 3{,}8\ E_0 \Leftrightarrow m_{Sirius} = -2{,}5 \log(3{,}8) = -1{,}45$
$m_S = -26{,}7 \Leftrightarrow -2{,}5 \log(E_S/E_0) = -26{,}7 \Leftrightarrow E_S/E_0 = 10^{(26,7/2,5)} \approx 10^{10}$

Sur la magnitude absolue :

1. On a $m = -2{,}5 \log(E/E_0)$ et $E = \dfrac{L}{4\pi d^2}$ d'où : $m = 2{,}5 \log(E_0) - 2{,}5 \log(L/4\pi d^2)$.
   Pour $d = 10$ pc, on a : $M = 2{,}5 \log(E_0) - 2{,}5 \log(L/400\pi)$.

2. On en déduit : $\mu = m - M = -2{,}5 \log(L/4\pi d^2) + 2{,}5 \log(L/400\pi) = -2{,}5 \log(100/d^2) = 5 \log d - 5$.
   Pour Véga : $\mu = m - M = -0{,}57$ et $5 \log(d) - 5 = 5 \log(25{,}04/3{,}26) - 5 = -0{,}57$.
   $\mu = 5 \log d - 5 \Leftrightarrow d = 10^{(\mu+5)/5}$.

3.

| Magnitude | absolue | apparente | Module de distance | d en pc | d en km | d en al |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aldébaran | -0,69 | 0,86 | 1,55 | 20 | $6{,}3\times10^{14}$ | 67 |
| Bételgeuse | -5,5 | 0,42 | 5,92 | 153 | $4{,}7\times10^{15}$ | 498 |
| Capella | -0,51 | 0,08 | 0,59 | 13 | $4\times10^{14}$ | 43 |

■