Mesure du rayon de la Terre

Vincent Deparis
Lycée Jean Monnet – Annemasse (vincent.deparis@neuf.fr)

Après avoir mesuré la latitude de son lycée avec un groupe d'élèves, Vincent Deparis nous propose ici de retrouver le rayon de la Terre, travail effectué par 4 élèves dans le cadre des Olympiades de physique.
Un bel exemple de manipulation réalisée sur le terrain avec des élèves. Le plaisir de déterminer les dimensions de notre planète à l'aide de méthodes simples mais efficaces.

Mesurer la Terre est un projet ancien. La première tentative a été effectuée par Ératosthène, un savant du III^e siècle avant J.-C., vivant à Alexandrie en Égypte. De nombreux savants ont ensuite tenté d'améliorer la méthode employée. D'abord les astronomes arabes au IX^e siècle, puis les astronomes occidentaux à partir du XVI^e siècle. La première mesure précise est due à Jean Picard en 1669-1670.
Dans le cadre de leur participation aux Olympiades de physique, quatre élèves (Jules Bazin, Florent Bonzon, Habibatou Diallo et Solenn Sarton) du lycée Jean Monnet à Annemasse ont voulu eux aussi relever le défi et déterminer la valeur du rayon terrestre en utilisant le matériel à leur disposition : un sextant, une mire de géomètre et un théodolite optique des années 1970, acheté 200 euros à un géomètre à la retraite. Pour le temps du projet, ils ont mis leurs pas dans les traces des anciens astronomes et se sont transformés en arpenteurs de la Terre.

La méthode pour mesurer la Terre est simple en théorie. Elle implique deux types de mesures très différents (figure 1) :
- *des mesures astronomiques* pour déterminer la différence de latitude $\Delta\varphi$ entre deux lieux A et B d'un même méridien ;
- *des mesures géodésiques* pour déterminer la distance à la surface de la Terre entre les deux lieux A et B.

Connaissant la longueur de l'arc de méridien AB et la valeur de l'angle $\Delta\varphi$ correspondant, il est facile avec un produit en croix de calculer la valeur du périmètre de la Terre, puis en divisant par 2π de trouver la valeur du rayon terrestre. Les mesures astronomiques de latitude ne posent pas de soucis particuliers, nous avons appris à les effectuer avec un sextant, avec une assez bonne précision (voir Cahiers Clairaut n° 145). La difficulté principale provient des mesures géodésiques : comment mesurer une grande distance à la surface de la Terre ?

Principe de la mesure du rayon terrestre

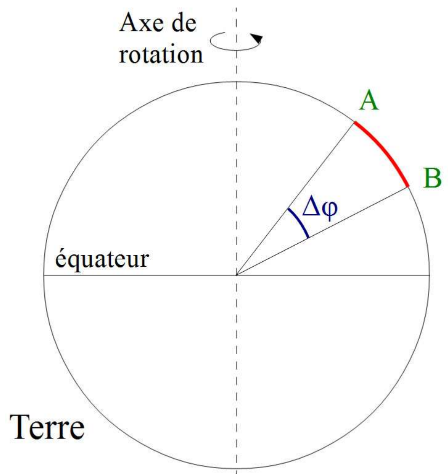

Fig.1. *Mesure du rayon terrestre.*

Mesure d'une distance à la surface de la Terre

Jean Picard est le premier à donner une valeur précise du rayon terrestre parce qu'il utilise avec succès la méthode de la triangulation géodésique. Celle-ci consiste à remplacer la mesure d'une grande distance par la mesure d'une plus petite distance et par la mesure d'une série d'angles dans des triangles. Nous allons nous aussi utiliser cette méthode : en partant d'une petite longueur connue (la mire de géomètre), nous allons progressivement l'agrandir jusqu'à atteindre une distance de 50 km environ en mesurant précisément des angles grâce au théodolite optique.

Longueur de la base

La première opération consiste à déterminer la longueur de la base de départ entre un point *A* (Andilly A) et un point *M* (Andilly *M*). Le point *M* est situé sur un petit monticule (réservoir d'eau), ce qui nous permet de nous positionner pour que la ligne *AM* soit pratiquement horizontale. Le théodolite est placé au point *A* et une mire de géomètre de 2,5 m de haut au point *M*. La règle possède un niveau à bulle pour qu'elle soit positionnée bien verticalement. Nous effectuons deux mesures (figure 3) :

- l'angle β_1 entre la verticale et la direction du point *M* : β_1 = 100,06 grades ;
- L'angle β_2 entre la verticale et la direction du point *N*, situé 1,90 m au-dessus du point *M* : β_2 = 99,50 grades.

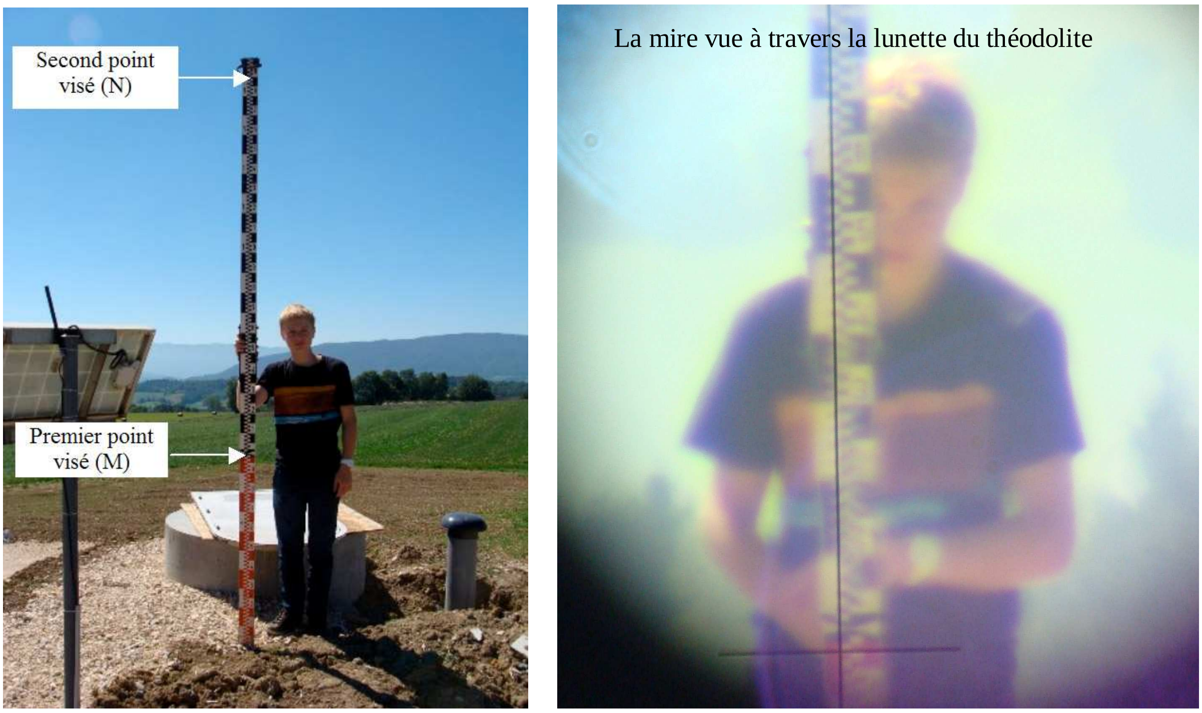

Fig.2. *Positionnement de la règle au point Andilly M.*

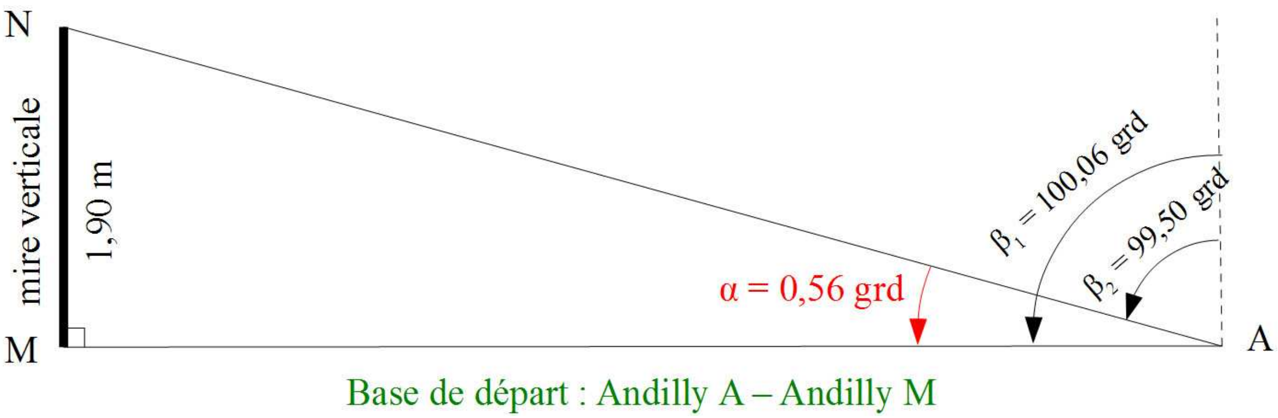

Fig.3. *Le point A est Andilly A et le point M, Andilly M. Le point N, un point de la mire, situé à 1,90 m au-dessus de M.*

Nos deux mesures permettent de déterminer l'angle α : $\alpha = \beta_1 - \beta_2$ = 0,56 grades = 0,504°.

En utilisant la trigonométrie, on peut calculer la distance *AM* :

$$AM = \frac{MN}{\tan\alpha} = \frac{1{,}90}{\tan 0{,}504} = 216\,\text{m}$$

Premier triangle

AndillyA-AndillyM-Salève

À partir de la base Andilly A - Andilly M, nous mesurons et construisons un premier triangle en visant le Salève, qui possède un petit monticule servant de point de repère.

Les points *A* (Andilly A) et *M* (Andilly M) ont été choisis à côté de repères restant à demeure : un piquet indiquant un terrain d'aéromodélisme pour le point *A* et un panneau photovoltaïque pour le point *M*. Ils peuvent être visés depuis le Salève sans avoir besoin de laisser l'un d'entre nous pour tenir lieu de point de repère.

Fig.4. *Visée depuis le Salève.*

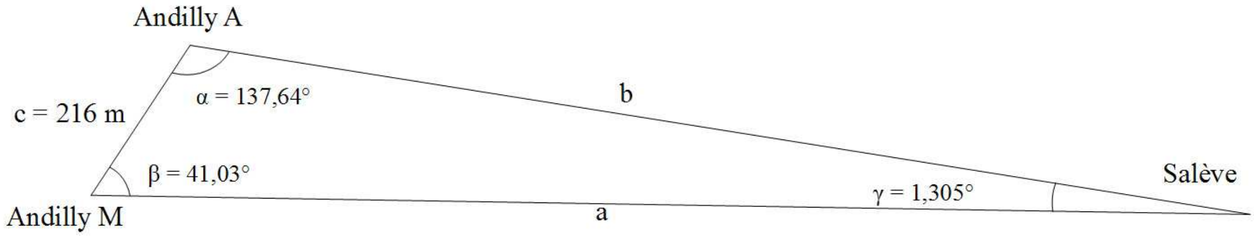

Fig.5. *Premier triangle.*

Nos mesures des trois angles du triangle sont les suivantes :

Mesure effectuée depuis	Angle (en grades)	Angle (en °)
Andilly A	152,935	137,642
Andilly M	45,59	41,031
Salève	1,45	1,305

En additionnant les trois angles du triangle, nous obtenons 179,978°. Comme la somme devrait être égale à 180°, nous avons commis une erreur de 0,022°. Puisque le côté Andilly A - Andilly M a une longueur connue, nous pouvons en déduire la longueur du côté Andilly A - Salève (figure 5). En effet, dans un triangle quelconque, la relation suivante est toujours vérifiée :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

soit,

$$b = \frac{c \times \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{216 \times \sin 41{,}03}{\sin 1{,}305} = 6226 \text{ m} = 6{,}226 \text{ km}$$

Orientation du côté Andilly A – Salève

La chaîne de triangles que nous allons construire à partir du côté Andilly A – Salève doit être orientée par rapport au méridien. Pour cela, nous orientons le côté Andilly A - Salève par rapport au sud en nous servant du Soleil. Le site internet de l'IMCCE (Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides) indique que pour notre lieu de mesure, le Soleil passe au sud à 11 h 34 min 47 s UTC le 4 septembre 2013. Le théodolite est placé à Andilly A et nous mesurons l'angle entre la direction du Salève et celle du Soleil, lorsqu'il passe au méridien. Nous trouvons un azimut de :

98,05 grades = 88,3°.

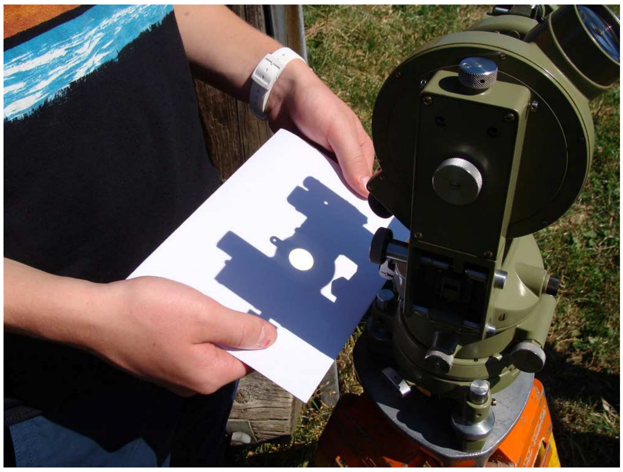

Fig.6. *Image du Soleil sur une feuille de papier.*

La chaîne de triangles jusqu'à la Croix du Nivolet

À partir de Andilly A et du Salève (situés au sud de Genève), nous construisons une chaîne de triangles qui nous amène jusqu'à la Croix du Nivolet, au-dessus de Chambéry. Les points visés constituent des repères bien marqués : une antenne (Chaumont), un pylône de télésiège (Semnoz), une table d'orientation (Clergeon) et une croix (Croix du Nivolet). La lunette du théodolite, qui a un agrandissement de 30, permet de faire des visées précises. Si possible, tous les angles des triangles doivent être mesurés car la comparaison de la somme des trois angles d'un triangle avec 180° permet de vérifier la qualité des mesures. Malheureusement, les visées n'ont pas été possibles depuis l'antenne de Chaumont (il nous aurait fallu demander l'autorisation de grimper à l'échelle de l'antenne).

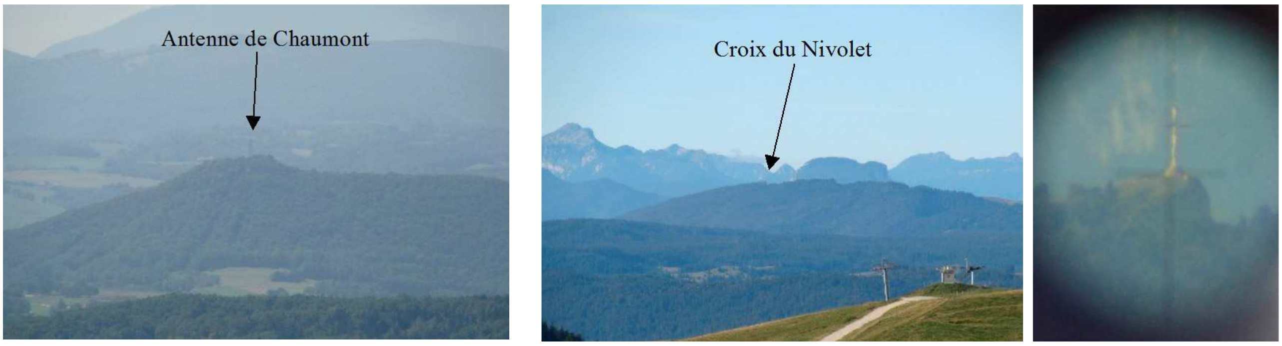

Fig.7. *Exemples de points de repère visés***.**

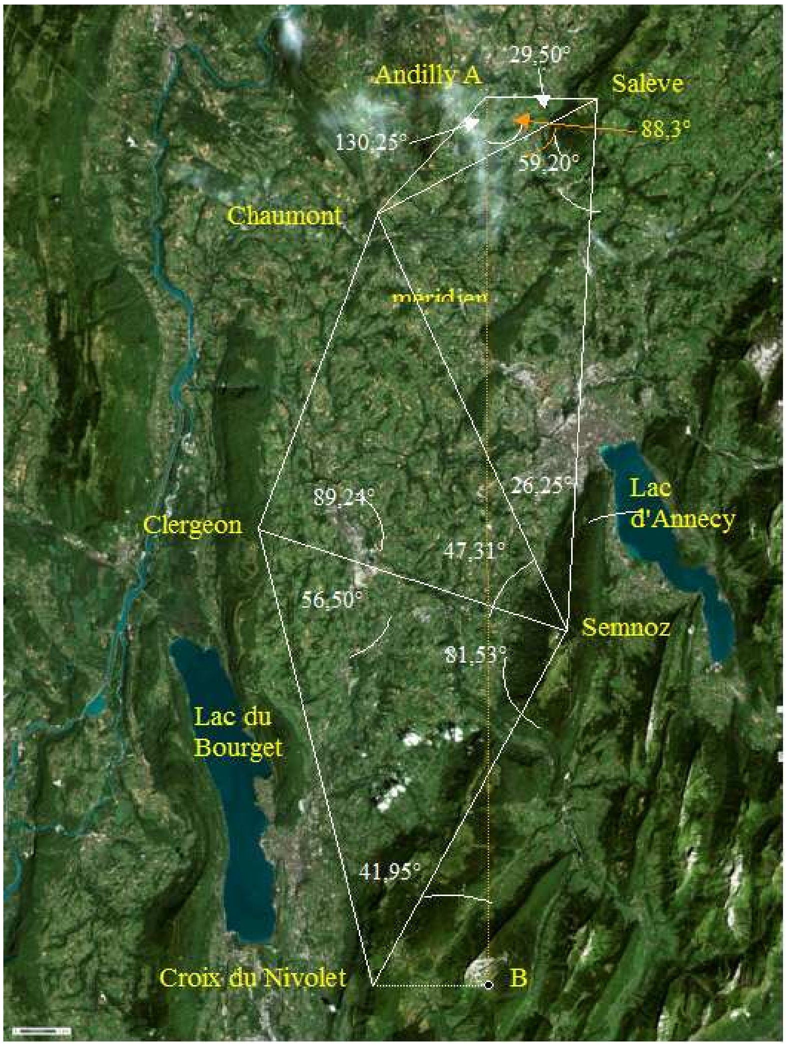

Fig.8. *La chaîne de triangulation.*

L'ensemble des angles des triangles et la connaissance de la longueur du côté Andilly A - Salève permet de construire la chaîne de triangles en utilisant le logiciel GeoGebra (figure 8). L'azimut du côté Andilly A – Salève permet d'orienter la chaîne par rapport au méridien.

En projetant le point correspondant à la Croix du Nivolet sur le méridien, nous obtenons le point B. Le point B a la même latitude que la Croix du Nivolet (il est situé sur le même parallèle) et il appar-tient au même méridien que Andilly A. Le logiciel GeoGebra permet de voir que la distance Andilly A - point B est 8,24 fois plus grande que la distance Andilly A - Salève.

Puisque cette dernière est de 6,226 km, la distance entre les points extrêmes de la triangulation est :

Andilly A – Andilly B
$= 8{,}24 \times 6{,}226$
$= 51{,}30$ km

Différence de latitude entre les lieux extrêmes de la triangulation

En mesurant, à l'aide d'un sextant, la hauteur du Soleil au midi solaire (passage au méridien) aux deux extrémités de la triangulation, il est possible d'obtenir la latitude des deux lieux. Puisque nous nous intéressons à une différence de latitude, il n'est pas nécessaire de tenir compte de la réfraction atmosphérique (supposée égale lors des deux mesures). Nous trouvons que la différence de latitude entre *Andilly A* et la *Croix du Nivolet* est égale à 0,475°. Notre triangulation s'étend donc sur environ 1/2° du méridien.

Calcul du rayon terrestre et influence des différentes grandeurs mesurées

Puisque la différence de latitude entre *Andilly A* et le *point B* est de 0,475° et que la distance entre ces deux lieux situés sur un même méridien est de 51,30 km, nous pouvons en déduire que le périmètre de la Terre est de 38 880 km. En divisant par 2π, nous obtenons le rayon de la Terre, soit 6 190 km. Comme la valeur communément admise est de 6 371 km, nous sommes à moins de 200 km de la valeur réelle, soit une erreur de 3 %.

Notre détermination du rayon terrestre fait intervenir un grand nombre de mesures : différence de latitude, longueur de la base, premier triangle, chaîne de triangulation, orientation de la chaîne. Parmi toutes ces grandeurs, lesquelles sont les plus déterminantes pour la précision du résultat final ? Nous estimons grossièrement la précision de chacune des mesures : la différence de latitude est précise à 1', les angles mesurés au théodolite sont précis à 0,01° (ce qui est confirmé par le calcul de la somme des trois angles d'un triangle), la longueur de 1,90 m sur la mire vue à travers le théodolite est précise à 2 cm. Avec ces estimations, nous voyons que trois grandeurs sont prépondérantes :

- la différence de latitude : une erreur de 1' occasionne une erreur de 200 km sur le calcul du rayon !
- la longueur de la base : une erreur de 2 cm sur la mire occasionne une erreur de 70 km sur le calcul du rayon ;
- l'angle γ du premier triangle : une erreur de 0,01° occasionne une erreur de 50 km sur le calcul du rayon (le premier triangle, contrairement aux suivants, est très allongé, d'où sa plus grande influence).

Notre résultat final est donc de 6 200 ± 400 km. Avec le matériel à notre disposition, il est difficile de faire mieux ! Il faudrait mesurer plus précisément la différence de latitude, en utilisant les étoiles, augmenter la longueur de la base et la mesurer en utilisant les dispositifs modernes (temps de parcours d'une onde infrarouge) et prolonger la chaîne de triangulation pour mesurer un arc de méridien plus grand. Rivaliser avec Jean Picard n'est donc pas une mince affaire ! Mais comme lui et comme tous les astronomes géodésiens du XVIII^{e} siècle, nous avons pu arpenter la Terre, chercher un lieu propice à la triangulation, sélectionner les sommets des triangles, réaliser l'ensemble des mesures, transpirer pour porter les instruments aux lieux de mesure lorsque ceux-ci n'étaient pas à proximité des voies de communication (Croix du Nivolet). Bref, faire avec un grand plaisir, de la science en dehors des bancs de l'école !

Fig.9. *Montée au Semnoz.*

■

À propos de l'horloge de la couverture

L'astrolabe donne de nombreuses indications astronomiques (du cadran extérieur vers l'intérieur) :

- l'heure bohémienne (en chiffres arabes gothiques), c'est-à-dire le nombre d'heures écoulées depuis le coucher du Soleil avec 24 heures égales pour la durée du jour) ;
- l'heure civile (en chiffres romains) : en principe ce devrait être l'heure solaire, mais la plupart des horloges astrolabiques monumentales indiquent l'heure légale du pays pour des raisons pratiques ;
- l'heure sidérale (aiguille portant une petite étoile) lue sur le même cadran que l'heure civile ;
- l'heure babylonienne (en chiffres arabes) : c'est le nombre d'heures écoulées depuis le lever du Soleil : il s'agit d'heures "inégales" dont la durée varie avec les saisons avec 12 h de jour, 12 h de nuit ;
- la position du Soleil sur le zodiaque ;
- la phase et la position de la Lune sur le zodiaque.