HISTOIRE

Clairaut mathématicien, un aperçu

Jean-Pierre Kahane, Laboratoire de Mathématiques Université Paris-Sud à Orsay, membre de l'Académie des sciences

Avec cet article se termine notre célébration du tricentenaire de la naissance d'Alexis Clairaut.
Jean-Pierre Kahane nous fait découvrir l'apport d'Alexis Clairaut en mathématiques, travail souvent ignoré du public. Les membres du CLEA comprendront mieux pourquoi Gilbert Walusinski, ancien président le l'APMEP avait choisi « Les Cahiers Clairaut » comme titre de notre revue. Alexis Clairaut liait astronomie et mathématiques.

Clairaut est un très grand mathématicien, et il est méconnu. Ce n'est pas exceptionnel pour un mathématicien, mais dans le cas d'Alexis Clairaut, cette méconnaissance me paraît particulièrement choquante.
Le nom de Clairaut apparaît bien dans les cours de mathématiques sous deux formes : le théorème de Clairaut et l'équation de Clairaut. Je montrerai comment ces deux sujets se présentent dans son œuvre. Dans ces deux cas, le contexte et la démarche sont instructifs et nous ménagent des surprises. Je passerai ensuite à la théorie des perturbations sous la forme la plus achevée qu'il a donnée en 1757, et à la découverte qu'il a faite à partir de là de ce que nous appelons aujourd'hui la transformation de Fourier discrète. Mais je commencerai avec l'examen des Éléments de géométrie, le produit de ses entretiens avec la marquise du Châtelet, qui ont été célèbres et qui méritent de le redevenir. Ce ne sera qu'un aperçu sur Clairaut mathématicien.

Les Éléments de géométrie

La petite histoire dit qu'ils sont issus des entretiens de Clairaut avec la marquise du Châtelet quand elle venait le voir et l'écouter dans la retraite qu'il partageait avec Maupertuis au Mont Valérien. Ces éléments de géométrie ont été pour moi une découverte, et cela témoigne seulement de mon ignorance. Ils ont été célèbres immédiatement, en France et dans toute l'Europe. Édités en 1741, il y eut 11 éditions en France jusqu'en 1920, et l'édition de 1920, en deux volumes, dans la collection « Les maîtres de la pensée scientifique », contient une courte et excellente notice sur Clairaut par Maurice Solovine. Entre 1744 et 1772, ils ont été traduits en suédois, en italien, en néerlandais, en polonais et en portugais ; plus tard, en allemand, en anglais et en russe. Ils ont été tout récemment réédités par Jacques Gabay (2006).
Il y a d'autres façons d'exposer la géométrie élémentaire, mais je n'en connais pas de plus attrayante. Clairaut explique dans sa préface pourquoi il veut rompre avec la manière classique d'enseigner les mathématiques, définitions, axiomes, théorèmes, démonstrations. Un très bon résumé en a été fait par Grandjean de Fouchy, Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences, dans son Éloge funèbre de Clairaut :

« Cet ouvrage est d'une espèce singulière ; il y remonte partout des usages de la Géométrie aux Problèmes, aux Théorèmes et enfin aux Axiomes ; il suit en un mot la marche que les hommes ont suivie dans l'invention de cette Science et il l'enseigne moins à ses lecteurs qu'il ne la leur fait inventer ».

Le livre contient quatre parties :

I. Des moyens qu'il était le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des terrains

II. De la méthode géométrique de comparer des figures rectilignes

III. De la mesure de figures circulaires et de leurs propriétés

IV. De la manière de mesurer les solides et leurs surfaces.

J'en extrais quelques passages pour tenter d'en faire goûter la saveur.
En prologue à la partie I.
« Ce qu'il me semble qu'on a dû mesurer d'abord, ce sont les longueurs et les distances »,
puis, au n° 3, pour introduire l'orthogonalité
« Une ligne qui tombe sur une autre, sans pencher sur elle d'aucun côté, est perpendiculaire à cette ligne ».
Le cercle est introduit au n° 6 :
« Le cercle est la trace entière que décrit la pointe mobile d'un compas pendant qu'elle tourne autour de l'autre pointe ».
Suivent la manière d'abaisser une perpendiculaire (n° 7) et de couper une ligne en deux parties égales (n° 8).

Une série de questions pratiques mène à ce que nous appelons le théorème de Thalès, puis (n° 25), revenant à la mesure des terrains, Clairaut montre la nécessité de figures semblables. La mesure des angles arrive à ce moment.

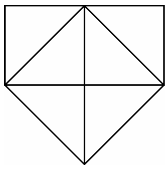
« En quoi consiste la ressemblance de deux figures ? » (n° 34) est la question qui termine la première partie.

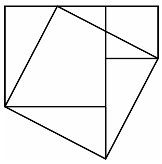
De la partie II, j'extrais seulement deux questions, deux constructions et deux figures :

« Faire un carré double d'un autre » (n° 16)

« Faire un carré égal à deux autres pris ensemble » (n° 17)

Les constructions sont claires par examen des figures.





Le théorème de Pythagore découle de la construction du n° 17, et cette construction en est une très élégante démonstration.

C'est assez, je crois, pour dire tout le charme des Éléments de géométrie.

Le théorème de Clairaut

Ce que l'on appelle théorème de Clairaut est la formule

(1) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

et ses conditions de validité. L'approche usuelle actuellement est de partir de l'égalité

$$(f(x+h, y+k) - f(x, y+k)) - (f(x+h, y) - f(x, y))$$
$$= (f(x+h, y+k) - f(x+h, y)) - (f(x, y+k) - f(x, y))$$

et de donner des conditions de dérivabilité sur f pour passer de là à la formule (1). Elle est correcte, élémentaire et ennuyeuse. Clairaut (1740) est plus rapide. Il observe que (1) est valable quand

$$f(x, y) = x^m y^n$$

et il ajoute : « Malgré la simplicité de cet exemple, il est aisé de faire voir que tous les autres, quelque composés qu'ils soient, peuvent s'y réduire ». Il poursuit : « car quelle que soit la quantité ou fonction de x et de y qu'on aura, il est évident qu'elle pourra être réduite à une infinité de termes, comme $ax^my^n + bx^py^q + cx^ry^s$ + etc ». C'est expéditif, littéralement incorrect, et néanmoins excellent comme approche. L'« évidence » doit être remplacée par un programme : définir des classes de fonctions approchables par des polynômes ainsi que leurs dérivées du premier et du second ordre. C'est une bonne introduction aux espaces fonctionnels ; l'espace désigné aujourd'hui par $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ fait l'affaire.

La motivation de Clairaut était l'intégration des équations différentielles du premier ordre. Le cas le plus simple est celui de l'équation :

(2) $$Adx + Bdy = 0$$

quand le premier membre est une différentielle exacte. Et le théorème de Clairaut s'énonce ainsi (1739, 1740) :

« Si $Adx+Bdy$ représente la différentielle d'une fonction composée de x, de y et de constantes, je dis que la différence de A, en supposant seulement y variable et en ôtant les dy, est égale à la différence de B, x seulement étant variable, et en ôtant les dx, ce que j'exprime ainsi :

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx} \text{ . »}$$

La suite est la mise en évidence d'équations qui se ramènent à la forme (2).

On notera que l'usage des ∂ pour les dérivations partielles n'était pas encore introduit.

Clairaut énonce ce théorème, sous la même forme, dans les deux articles (1739) et (1740). Dans le second, il signale que Fontaine et Euler l'avaient obtenu indépendamment, et il en donne aussi une autre démonstration, illustrée par une figure, qui est celle que j'ai indiquée au début. Ce théorème était dans l'air. Clairaut lui a donné une forme précise, deux démonstrations, et des applications aux équations différentielles.

Quid de « l'équation de Clairaut » ? Pour nous, c'est une équation différentielle de la forme

$$y(x) = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Les courbes intégrales sont les droites

$$y = ax + f(a)$$

et leur enveloppe, définie par

$$\begin{cases} x = -f'(a) \\ y = f(a) - af'(a) \end{cases}$$

Outre leur simplicité, leur intérêt est de mettre en évidence qu'aux points de l'enveloppe il passe deux courbes intégrales et non une seule.

C'est un phénomène découvert par Clairaut à propos d'un problème que je vais indiquer tout à l'heure, et voici comment il l'exprime (1734, p. 213) :

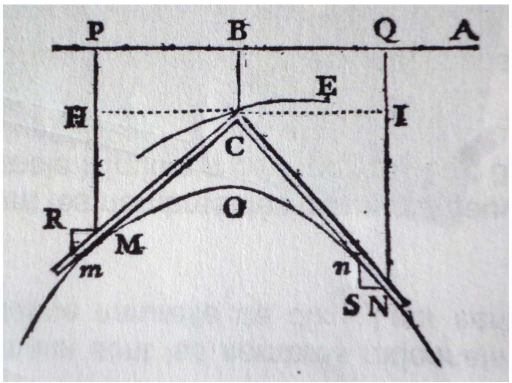
« C'est une digression dans le problème que nous traitons dans ce mémoire, mais j'ai été bien aise de montrer cette singularité de calcul qui s'est présentée d'elle-même ; on pourrait l'énoncer, indépendamment du problème présent, de cette manière. Il y a des équations différentielles capables d'avoir deux solutions différentes l'une de l'autre, dont l'une (et même dans ce cas-ci la plus générale) n'a pas besoin du calcul intégral ; telles sont les équations précédentes $xdydx - dy^2 = ydx^2 - dydx$ à laquelle $4y = xx+2x+1$ et $2ax - 2x = -4y+1 - aa$ satisfont également, et $ady^2 + xdy^2 - ydydx = xdxdy - ydx^2$, qui donne pour solutions

$$\frac{x}{\sqrt{y}} - \sqrt{y} = \sqrt{4a} \text{ et } bby - 2bx + 2by = -4a$$

En général, $\dfrac{d\Phi(x,y)}{\Phi(x,y)}$= fonction quelconque de *x, y, dx, dy* serait de cette nature ; intégrée, elle donnerait une équation, et sans aucune intégration, l'autre ».

Dans l'article (1734), « il s'agit de trouver des courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches » (1734, p. 196). Voici le problème dont sont issues les « équations de Clairaut » :

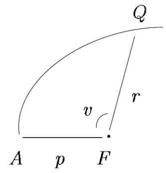
« Trouver les courbes MON autour desquelles, faisant glisser l'équerre MCN, le sommet C de cette équerre soit toujours dans la courbe donnée EC » (1734, p. 206). Un dessin explique le problème et les notations. On donne une courbe par son équation cartésienne $y = \Phi(u)$, et on cherche la courbe parcourue par le point de rencontre de deux tangentes perpendiculaires (le sommet et les branches de l'équerre) quand on les fait glisser le long de la courbe donnée. La solution n'est pas immédiate, et elle s'exprime par une représentation paramétrique $x = f(u)$, $y = g(u)$. Pour cela, on n'a pas besoin d'une équation différentielle liant *x, y, dx, dy*. Si cependant on introduit cette équation différentielle, la « solution générale » est une solution parasite, à savoir celle des branches de l'équerre. D'où la « digression » de Clairaut, bien plus importante que le problème.



Clairaut et les perturbations

Dans sa jeunesse, Alexis Clairaut était avant tout mathématicien, soucieux des courbes sous tous leurs aspects, y compris les équations différentielles comme nous venons de le voir. La figure de la Terre apparaît aussi dans ses premières recherches. Ensuite c'est l'astronomie qui alimente ses principaux travaux. Faut-il ou non, modifier la loi de la gravitation universelle pour expliquer le mouvement de la lune ? Ce n'est pas ici le lieu de raconter l'histoire du problème et des ses approches. La réponse finale, négative (la loi de Newton tient bon !) se trouve dans l'article (1748) : « De l'orbite de la lune en ne négligeant pas les quarrés des quantités de même ordre que les perturbations ». Le terme de « perturbations » revient dans le gros article (1754) : « Sur l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre, en ayant égard aux perturbations produites par les actions de la Lune et des Planètes principales ». C'est dans cet article que se trouve l'exposé systématique de la « théorie des perturbations » (pp. 525-534) avant les données numériques et les tables (pp. 535-544).

Le point de départ de la théorie des perturbations est la correction à apporter à l'équation de l'ellipse que décrirait une planète Q sous l'action d'un corps fixe F s'il n'y avait pas de force perturbatrice. Cette équation, en coordonnées polaires, est



$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{c \ \cos v}{p} \,.$$

L'équation de l'orbite « troublée » est

$$\frac{p}{r} = 1 - c \ \cos v + \sin v \int \Omega \cos v dv - \cos v \int \Omega \sin v dv$$

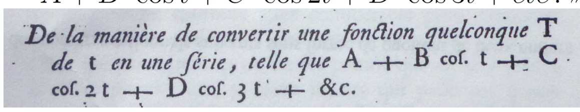
où la quantité Ω exprime les perturbations dues aux autres planètes. Un lemme, qui est « d'une ressource infinie dans la théorie des planètes », explicite la correction lorsque Ω est une combinaison linéaire de cosinus de multiples de l'angle v :

$$\Omega = A \ \cos qv + B \ \cos nv + etc \,. \,,$$

avec n, q etc. entiers > 1 (1 exclu). Dans la suite, on ne peut se borner au cas où le corps F est fixe, et cela mène à des calculs compliqués.

On voit tout de suite le lien possible entre la théorie des perturbations et les sommes ou séries trigonométriques. Ce lien est explicité de manière remarquable dans les pages 545 à 551 sous le titre « De la manière de convertir une fonction T de t en une série telle que

$$A + B \ \cos t + C \ \cos 2t + D \ \cos 3t + etc \,. »$$


De la manière de convertir une fonction quelconque T *de* t *en une série, telle que* A + B cof. t + C cof. 2 t + D cof. 3 t + &c.

Sur cette question, Clairaut se réfère à Euler (1748) et à d'Alembert (1754) ; mais d'Alembert n'a pas pensé la méthode praticable et l'a abandonnée, tandis que, dit Clairaut, « le chemin que j'ai suivi dans la même recherche m'a paru devoir être celui que l'inventeur, M. Euler, a caché ; j'ai vu qu'on me saurait gré d'avoir donné mes réflexions sur toute cette question, que j'ai considérée d'ailleurs d'une manière très générale, ce qui pourra être utile en plusieurs rencontres » (pp. 545-546).

Ce qui suit est un exposé parfait de la transformation de Fourier discrète dans le cas des fonctions paires ; il s'agit de la transformation de Fourier sur un groupe cyclique au lieu du cercle, et toutes les formules s'expriment par des sommes finies. La transformation de Fourier discrète est donc bien antérieure à Fourier, et elle est de grand intérêt actuellement puisqu'elle est à la base de la transformation de Fourier rapide (pp. 546-549).

En une ligne p. 549, Clairaut donne la formule de Fourier pour le calcul des coefficients d'une fonction définie sur le cercle, ce qui répond formellement au titre « De la manière de convertir une fonction T de t en une série etc. ». On sait que sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique une controverse a opposé Daniel Bernoulli, qui l'affirmait, et Euler, d'Alembert et Lagrange, qui la niaient. C'est Fourier qui a éclairci la question. L'histoire du sujet est parfaitement décrite dans la thèse de Riemann sur les séries trigonométriques et dans le livre de Lebesgue sur le même sujet.

la valeur rigoureuſe (...) du coëfficient quelconque S du terme où eſt pt, ſera par la même raiſon $\int \frac{Tdt \text{ coſ. } pt}{2c}$, t étant toûjours égal à c.

Ainsi Clairaut mathématicien, et pionnier en mathématiques, apparaît aussi bien lorsqu'il s'occupe d'astronomie que dans ses travaux de géomètre ou d'analyste. Ses digressions s'avèrent un moyen d'aller à l'essentiel. La largeur et la profondeur de ses vues s'alimentent d'un goût très sûr.

Conclusion

L'œuvre de Clairaut est considérable, et je n'en ai effleuré ici qu'une petite partie. Je n'ai parlé ni des courbes gauches (« courbes à double courbure »), son premier sujet d'étude, ni des oscillations du pendule, ni de la figure de la Terre, ni des mathématiques requises par ses travaux sur les lunettes et la réfringence, ni de celles à l'œuvre dans son mémoire sur la comète de 1759 (la comète de Halley) ni de son traité d'algèbre. Clairaut mathématicien apparaît dans toute son œuvre.

Clairaut appartient à une époque de grande création en mathématiques, et il s'inscrit dans le grand mouvement des sciences et des arts du 18e siècle. C'est aussi une époque d'erreurs, de débats et de controverses. Clairaut se distingue par la profondeur et la justesse de ses vues, et par un goût très sûr qui lui fait découvrir l'essentiel dans la nouveauté comme dans la tradition. Si cela est visible dans les quelques exemples présentés ici, le but de cet article sera atteint.

Références

Alexis Clairaut (1739) Recherches générales sur le calcul intégral, Mémoires de l'Académie des sciences 1739, pp. 425-436.

(1740) Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre, ibid. 1740, pp. 293-323.

(1734) Solution de plusieurs problèmes où il s'agit de trouver des courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une équation donnée, ibid. 1734, pp. 196-215.

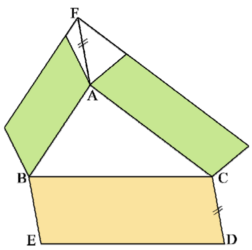
(1754) Sur l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre, en ayant égard aux perturbations produites par les actions de la Lune et des Planètes principales, ibid. 1754, pp. 521-564.

(1741) Éléments de géométrie, Paris. ■

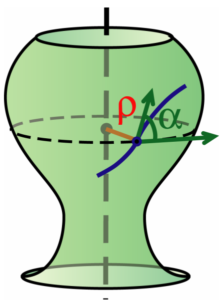
NDLR : voir sur le site du CLEA la liste des mathématiciens contemporains d'Alexis Clairaut

Quelques pistes pour des lecteurs souhaitant apercevoir d'autres facettes de Clairaut mathématicien
(et elles sont nombreuses comme le dit dans sa conclusion J-P. Kahane)

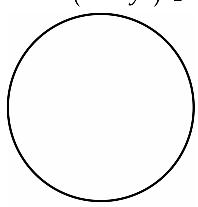
1. Le théorème de Clairaut en géométrie plane euclidienne :
Le parallélogramme orange a pour aire la somme des aires des deux parallélogrammes verts, (AF) étant parallèle à (CD).

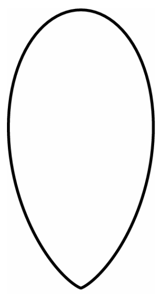


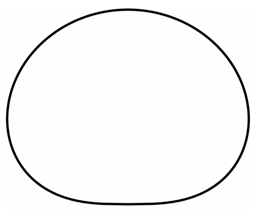
2. Un autre théorème, en géométrie différentielle des courbes gauches :
« Excepté dans le cas des parallèles, les géodésiques d'une surface de révolution sont les courbes C telles que le produit de la distance ρ à l'axe d'un point M par le cosinus de l'angle entre C et le parallèle passant par M est constant :
$\rho \times \cos \alpha = c$ = constante de Clairaut de la géodésique C ».



3. Les courbes de Clairaut d'indice n réel ayant pour équation polaire $\rho = a \times \sin^n \vartheta$ ou pour équation cartésienne $\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{n+1}{2}} = ay^n$


n = 1.0


n = 5


n = 0.5


n = -0.5

Michel Bobin ■