

Calcul de la masse de 51 Pegasi b

51 Pegasi b est le nom de la première exoplanète découverte par Michel Mayor et Didier Queloz à l'observatoire de Haute-Provence grâce au spectromètre ELODIE. La méthode a été décrite dans le dernier numéro des Cahiers Clairaut. Voici une application concrète, le calcul de la masse de cette planète.

51 Pegasi (51 Peg en abrégé) est le nom de l'étoile. La planète qui orbite autour a été nommée 51 Peg b et surnommée Bellérophon, du nom du héros grec qui a dompté le cheval Pégase.

Ce que l'on savait de 51 Peg

51 Peg est une étoile semblable au Soleil, de type spectral, G3 V. De plus, on connaît sa distance par mesure de parallaxe (48 années-lumière), sa magnitude visuelle par l'observation (5,5), donc sa magnitude absolue (4,5). À partir de ces données, on trouve que sa masse est très légèrement supérieure à celle du Soleil (1,06 masse solaire soit $2,11 \times 10^{30}$ kg).

Ce que nous a appris ELODIE

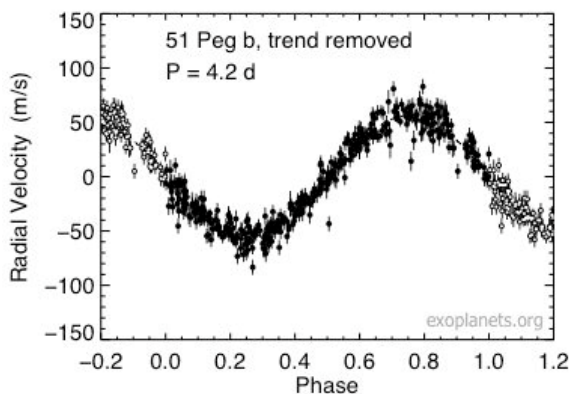


Image exoplanets.org sur en.wikipedia.org

Le graphique ci-dessus représente les valeurs de la vitesse radiale qui proviennent des mesures du spectromètre¹⁴. La vitesse radiale maximale est un peu supérieure à 50 m/s et la période (notée $P = 4,2$ d sur ce graphique) est de 4,2 jours. Pour les calculs ci-dessous, on a retenu une vitesse radiale maximale de 56 m/s.

Notations

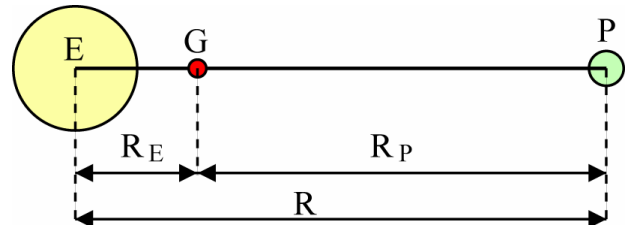
On note :

R_E , la distance du centre de l'étoile au centre de masse du système étoile planète (inconnue).

M_P , la masse de la planète (inconnue) et M_E la masse de l'étoile (connue) : $M_E = 2,11 \times 10^{30}$ kg.

R_P , la distance du centre de la planète au centre de masse du système étoile planète (inconnue).

R , la distance du centre de l'étoile au centre de la planète (inconnue).



V_E , la vitesse linéaire (supposée constante) de l'étoile sur son orbite (supposée circulaire) autour du centre de masse. Si on suppose que la Terre est dans le plan de l'orbite, la vitesse radiale maximale mesurée par effet Doppler est égale à V_E . On prendra $V_E = 56$ m/s. Si la Terre n'est pas dans le plan de l'orbite, V_E est supérieur à la vitesse radiale mesurée.

F , la force d'attraction entre l'étoile et la planète.

T_E , la période de révolution de l'étoile autour du centre de masse. $T_E = 4,2$ jours. **On a la même période de révolution pour la planète $T_P = 4,2$ jours.**

Les formules

(1) $M_E R_E = M_P R_P$ (définition du centre de masse).

(2) $R = R_E + R_P$ (voir figure).

(3) $F = G \frac{M_E M_P}{R^2}$ (loi de Newton).

(4a) $F = M_E \frac{V_E^2}{R_E}$ et (4b) $F = M_P \frac{V_P^2}{R_P}$ (force centripète).

(5a) $T_E V_E = 2 \pi R_E$ et (5b) $T_P V_P = 2 \pi R_P$ (distance parcourue en une révolution).

Calcul de R_P à partir de M_E et T_P

Les formules (3) et (4b) donnent $V_P^2 = G \frac{M_E R_P}{R^2}$.

La formule (5b) donne $V_P^2 = \frac{4 \pi^2 R_P^2}{T_P^2}$

d'où $G \frac{M_E R_P}{R^2} = \frac{4 \pi^2 R_P^2}{T_P^2}$ ou $\frac{T_P^2}{R_P \times R^2} = \frac{4 \pi^2}{G M_E}$.

Or, $R_P \times R^2 = R_P \times (R_P + R_E)^2 = R_P^3 \times (1 + R_E/R_P)^2 = R_P^3 \times (1 + M_P/M_E)^2$ qu'on assimile à R_P^3 car $M_P \ll M_E$.

¹⁴ Le graphique montre en réalité les variations de la vitesse radiale. En effet, l'étoile 51 Pegase s'approche de nous à la vitesse de 33,7 km/s, vitesse qui a été soustraite des mesures.

On retrouve donc la 3^e loi de Kepler $\frac{T_P^2}{R_P^3} = \frac{4 \pi^2}{G M_E}$.

Avec :

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.kg}^{-2}.\text{m}^2, M_E = 2,11 \times 10^{30} \text{ kg},$$

$$T_E = 4,2 \times 24 \times 3600 \text{ s}, \text{ on trouve :}$$

$$R_P = 7,8 \times 10^9 \text{ m soit environ 7,8 millions de km.}$$

Calcul de M_P

La formule (5a) $T_E V_E = 2 \pi R_E$ donne R_E .

$$T_E = 4,2 \times 24 \times 3600 \text{ s et } V_E = 56 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{d'où } R_E = \mathbf{3,2 \times 10^6 \text{ m}}$$

On peut alors calculer M_P avec la formule (1) :

$$M_E R_E = M_P R_P.$$

$$M_E = 2,11 \times 10^{30} \text{ kg}, R_E = \mathbf{3,2 \times 10^6 \text{ m}},$$

$$R_P = \mathbf{7,8 \times 10^9 \text{ m}} \text{ donc } M_P = 8,7 \times 10^{26} \text{ kg.}$$

On convertit souvent en nombre de masse de Jupiter (de masse $1,908 \times 10^{27} \text{ kg}$).

On trouve donc pour la masse de 51 Peg b 0,46 fois la masse de Jupiter.

Comme on n'a pas tenu compte d'une éventuelle inclinaison de l'orbite, il s'agit ici d'une masse minimale.

Remarque : la formule générale donnant M_P est

$$\therefore M_P^3 = \frac{M_E^2 \times T_E \times V_E^3}{2\pi G}. \quad \blacksquare$$