

## Cycle lunaire, nombre d'or et épacte

Véronique Hauguel, Association Sciences en Seine et Patrimoine (Rouen)

*On n'entend plus beaucoup parler de cycle lunaire, d'épacte ou de nombre d'or. Pourtant ils sont toujours dans l'almanach du facteur et ils ont beaucoup été utilisés, en particulier par les marins comme Denoville. Véronique Hauguel nous explique ici leur signification et détaille différentes manières de les obtenir.*

Le calendrier grégorien est l'aboutissement de réformes pour mettre en place un calendrier solaire annuel contenant un nombre entier de jours alors que le nombre moyen n'est pas entier<sup>1</sup>. En plus de ce calage du temps à travers les siècles, il fallait trouver un cycle commun lié au mouvement annuel du Soleil et de la Lune. Pour l'Église, cette réforme était primordiale pour uniformiser la date de la fête de Pâques partout dans le monde alors que les explorateurs découvraient de nouveaux territoires. De plus, pour les marins, connaître la position de la Lune était indispensable pour ne pas être victime des marées des océans.

Le comput<sup>2</sup> permet de trouver la phase de la Lune à une date donnée ; les calculs sont accessibles à un non-matheux contrairement aux calculs des vrais mouvements des astres. Ils sont plus simples mais approchés. Il faut préciser que l'on parle ici comme dans toute la suite, de Lune du comput ou Lune ecclésiastique qui est une Lune moyenne, assez loin de la Lune astronomique qui a un mouvement irrégulier et complexe.

Pour illustrer les calculs, on utilisera les volvelles<sup>3</sup> d'un beau manuscrit de 1760, écrit par un marin inconnu Denoville et découvert en 2000 par l'IREM de Rouen à la bibliothèque municipale Jacques Villon.

### Cycle lunaire et nombre d'or

Comment trouver un cycle commun qui lie l'année solaire et ses douze mois avec l'année lunaire et ses douze lunaisons ?

On dit que c'est Méton, astronome grec du v<sup>e</sup> siècle avant notre ère, qui mit en évidence une période

commune de 19 ans entre le Soleil et la Lune appelée cycle lunaire ou cycle de Méton (19 années solaires correspondent à 235 lunaisons à moins de 2 heures près). Autrement dit, le cycle lunaire est une période de 19 années au bout desquelles les nouvelles lunes reviennent aux mêmes dates dans le calendrier solaire. Le rang de l'année dans ce cycle est appelé nombre d'or car ces nombres furent inscrits par les Athéniens en lettres d'or sur la place publique de leur ville<sup>4</sup>. Comme toujours en astronomie, la correspondance n'est pas exacte et l'avance est d'un jour tous les 312 ans environ.

Le calcul du nombre d'or ne dépend que de l'année, ce n'est que son rang dans le cycle lunaire, il est donc valable pour le calendrier julien et le calendrier grégorien.

Calcul du nombre d'or  $n$  :

Soit  $m$  l'année.

Le nombre d'or  $n$  est le reste de la division de  $m+1$  par 19. Soit, en notation mathématique :

$$m + 1 \equiv n [19] \text{ (modulo 19)}$$

Si  $n = 0$ , on prend  $n = 19$  comme nombre d'or.

Exemple : Quel est le nombre d'or de 2012 ?

Le reste de la division de 2013 par 19 est 18. Le nombre d'or de 2012 est 18. On peut vérifier ce nombre, écrit dans tout almanach du facteur, en général en bas de la colonne du mois de février.

*Fig.1. Le comput de 2012 sur l'almanach du facteur.*

COMPUT 2012: Épacte 6,  
Lettres dominicales AG, Cycle solaire 5  
Nombre d'or 18, Indiction romaine 5

Le nombre d'or commence en mars de l'année jusqu'à fin février de l'année suivante. Il sert à calculer l'épacte qui permet de déterminer les dates des phases de la Lune de l'année, plus particulièrement des nouvelles et pleines lunes.

<sup>1</sup> Voir l'article de F. Suagher dans ce même numéro.

<sup>2</sup> On appelle comput l'ensemble des règles de calcul dans le calendrier ecclésiastique.

<sup>3</sup> Une volvelle est un instrument en papier se composant d'un ou de plusieurs disques gradués tournant les uns sur les autres.

<sup>4</sup> Ce nombre  $n$  a rien à voir avec l'autre nombre d'or qui vaut environ 1,618.

## Épacte (du XVII<sup>e</sup> au XXI<sup>e</sup> siècle)

L'épacte est le nombre de jours "que l'année civile du Soleil surpasse celle de la Lune ou bien c'est l'âge qu'avait la Lune le dernier jour de l'année qui précède celle qu'on demande" (Denoville). Elle varie de 0 à 29, 0 étant communément remplacé par ✕. Par exemple, en 2012, l'épacte est de 6, ce qui signifie que la Lune a 6 jours le 31 décembre 2011, ou que la dernière nouvelle Lune a lieu le 25 décembre<sup>1</sup>.

L'année tropique du Soleil est de 365,24 jours et l'année de douze lunaisons de 354,36 jours.

Sur une année la différence est, en nombre entier, de 11 jours. Ce qui signifie qu'il y a un décalage de 11 jours par an entre le calendrier solaire et le calendrier lunaire.

Si l'épacte est de 11 une année, elle sera de 22 l'année suivante, puis de 3 en comptant 30 jours pour un mois lunaire (33 - 30 = 3), ensuite de 14, etc.

Année	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Épacte	8	19	0	11	22	4

**Tab.1.** L'épacte augmente de 11 ou diminue de 19 (30 - 11) chaque année.

*"Le jour en plus des années bissextiles est comme chacun sait, en février. Le décalage ou non d'un jour entre années bissextiles et non bissextiles commence donc le 1<sup>er</sup> mars. C'est pourquoi on fait commencer les décomptes du nombre d'or comme de l'épacte au 1<sup>er</sup> mars" (Denoville).*

L'épacte d'une année commence, comme le nombre d'or, en mars jusqu'à fin février de l'année suivante. En 1582, il y avait un décalage de plusieurs jours entre la Lune astronomique et la Lune de comput. Le nouveau comput le rectifia puis, pour éviter une nouvelle dérive, apporta quelques corrections :

- à chaque année séculaire non bissextile, on retranche un jour à l'épacte (métemptose) ;
- tous les 300 ans, quand arrive une année séculaire, on ajoute un à l'épacte (proemptose).

Année	1600	1700	1800	1900	2000	2100
	bissextile				bissextile	
Métemptose		-1	-1	-1		-1
Proemptose			+1			+1
Décalage de l'épacte	0	-1			-2	

**Tab.2.** Correction de l'épacte au passage des années séculaires depuis 1582, année de la réforme.

Denoville définit le calcul pour trouver l'épacte à partir du nombre d'or puis énonce la règle à obser-

<sup>1</sup> La nouvelle Lune astronomique de décembre 2011 est le 24 à 18 h et la nouvelle Lune du comput le 25.

ver à travers les siècles passés et à venir :

*"Comment trouver l'épacte d'une année ?*

*On multiplie le nombre d'or de l'année par 11 et du produit, on ôte 11, si l'année est dans les siècles de 1700 et 1800, c'est-à-dire, suivant l'usage ordinaire de compter les siècles, si elle est entre 1700 et 1899. Le restant étant divisé par 30, ce qui restera de la division sera l'épacte demandée et s'il ne reste rien de la division, l'épacte alors sera de 30 ou de 0.*

*Faut-il toujours ôter 11 du produit de la multiplication du nombre d'or par 11 ? Non, dans les siècles de 1600, on n'ôtait que 10. Dans les siècles 1700 et 1800, il faut ôter 11, comme il a été dit, après 1900, 2000, 2100 on ôtera 12.*

*Ce qui vient de la réforme du calendrier qui se fit en l'an 1582".*

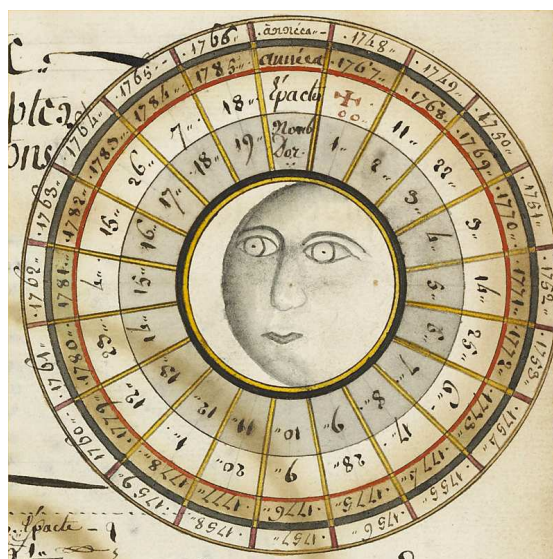
Le tableau 3 donne les formules du comput grégorien pour calculer l'épacte  $e$  avec les notations modernes.

Siècle	Épacte ( $n$ est le nombre d'or)
De l'application de la réforme au XVII <sup>e</sup> s.	$n \times 11 - 10 \equiv e [30]$ , $e$ est le reste de la division de $11n - 10$ par 30
De 1700 à 1899	$n \times 11 - 11 \equiv e [30]$ , $e$ est le reste de la division de $11n - 11$ par 30
Depuis 1900 jusqu'à 2199.	$n \times 11 - 12 \equiv e [30]$ , $e$ est le reste de la division de $11n - 12$ par 30

**Tab.3.** Calcul de l'épacte à partir du nombre d'or en notations actuelles.

Exemple : Quel est l'épacte en 2012, par le calcul ? Comme le nombre d'or est de 18, le reste de la division de  $18 \times 11 - 12$  par 30 donne 6, c'est l'épacte de 2012.

La volvelle "table circulaire du nombre d'or et de l'épacte" du livre de Denoville donne directement l'épacte de 1748 à 1785 (fig 2). La correspondance nombre d'or épacte est valable de 1700 à 1899.



**Fig.2.** Volvelle de Denoville "nombre d'or et épacte de 1748 à 1785".

Pour obtenir une volvelle qui fonctionne actuellement, il suffit de changer les années et de retrancher 1 à l'épacte (figure 3).

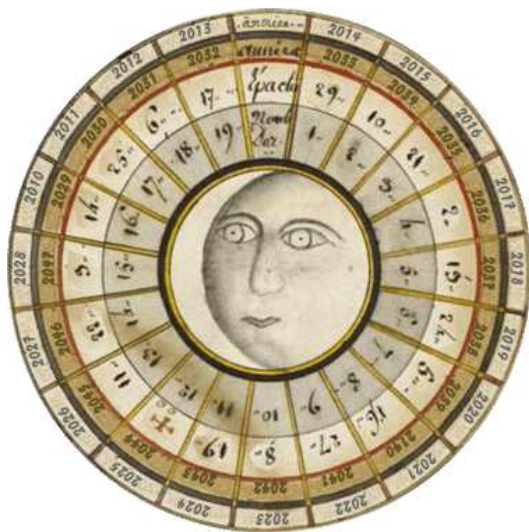


Fig.3. Volvelle de Denoville "nombre d'or et épacte" réactualisée par Philippe Merlin en changeant les années (de 2010 à 2047) et l'épacte.

Denoville propose aussi une méthode pour trouver l'épacte avec son pouce (figure 4) :

"Il n'y a qu'à compter le nombre d'or successivement sur le pouce en commençant le compte à la racine, et observer d'ôter un à l'épacte quand le compte du nombre d'or s'y rencontrera, d'ajouter 9 quand il tombera sur la jointure et d'ajouter 19 quand il tombera au bout. Si la somme est moins que 30 ce sera l'Épacte, mais si elle est plus que 30, l'excès de ce nombre sera l'épacte demandée".



Fig.4. Méthode avec le pouce pour trouver l'épacte, le nombre d'or étant connu.

#### Exemple pour l'année 1760

- Sur la volvelle, la lecture est immédiate ; le nombre d'or est 13 et l'épacte 12.
- Avec le pouce, sachant que 13 est le nombre d'or de 1760 : on compte jusqu'à 13, 1 sur la racine du pouce, 2 sur la jointure, 3 au bout, puis 4 sur la racine et ainsi de suite jusqu'à 13. D'après la règle, 13 étant à la racine du pouce, on retranche 1, l'épacte est 12.

Nombre d'or	1	2	3	4	5	6	...	19
On arrive à	R	J	B	R	J	B	...	R
Faire	-1	+9	+19	-1	+9	+19	...	+1
Résultat	0	11	22	3	14	25	...	18

Tab.4. Vérification de la méthode du pouce (R pour racine, J pour jointure et B pour bout). Quand on observe les résultats, le décalage est bien de 11 jours d'une case à l'autre, comme dans le tableau 1.

#### Justification mathématique

Cela revient à un problème d'arithmétique :

$$n \times 11 - 11 \equiv e [30] \quad (n \text{ est l'épacte})$$

$$n \times 10 + n - 10 - 1 \equiv e [30]$$

$$n + 10(n - 1) - 1 \equiv e [30]$$

Si on tombe sur la racine du pouce,  $n$  vaut 1 plus un multiple de 3 donc  $n = 3p + 1$

$$3p + 1 + 10(3p) - 1 \equiv e [30] \quad \text{d'où } n - 1 \equiv e [30]$$

Si on tombe sur la jointure du pouce,  $n$  vaut 2 plus un multiple de 3 donc  $n = 3p + 2$

$$3p + 2 + 10(3p + 1) - 1 \equiv e [30] \quad \text{d'où } n + 9 \equiv e [30]$$

Si on tombe sur le bout du pouce,  $n$  est un multiple de 3 donc  $n = 3p$

$$3p + 10(3p - 1) - 1 \equiv e [30]$$

$$\text{d'où } n - 11 \equiv e [30] \quad \text{ou } n + 19 \equiv e [30]$$

On peut réactualiser cette formule pour qu'elle fonctionne à notre siècle. Le principe reste le même : compter sur le pouce jusqu'au nombre d'or, d'abord à la racine, ensuite à la jointure et au bout puis recommencer autant de fois que nécessaire.

Pour obtenir l'épacte à partir du nombre d'or :

- si on tombe à la racine, retirer 2 (si le nombre d'or est 1, on ajoute 28 et l'épacte est 29) ;
- si on tombe à la jointure, ajouter 8 ;
- si on tombe au bout, ajouter 18.

Si la somme est moins que 30 ce sera l'épacte, mais si elle est plus que 30, l'excès de ce nombre sera l'épacte demandée.

Vous pouvez retrouver, avec cette méthode, l'épacte de l'année 2012 de nombre d'or 18<sup>1</sup>.

#### Nouvelles Lunes

Si on connaît l'épacte d'une année, la volvelle de la figure 5 permet une lecture directe de toutes les dates de nouvelles lunes du comput, de mars à décembre de l'année ainsi que de janvier et février de l'année suivante.

La correspondance entre nombre d'or et épacte est différente actuellement mais en prenant l'épacte d'une année, cette volvelle, conçue pour 1700 à 1899, est utilisable quelle que soit l'année. Si l'épacte d'une année n'est pas écrite (il n'y a que 19 nombres sur les 30 possibles), il suffit de prendre

<sup>1</sup> En comptant jusqu'à 18, on arrive au bout du pouce. Il faut donc ajouter 18, on trouve 36. Comme on dépasse 30, l'épacte est l'excès de 36 sur 30, c'est 6.



épacte + 1 (ou +2...) et d'ajouter 1 (ou +2...) à toutes les dates.

Par exemple, en 2012, l'épacte est 6. On tourne l'alidade pour la régler sur l'épacte de 6. On lit les dates des nouvelles lunes de mars à décembre 2012 et de janvier et février 2013. On peut vérifier les résultats avec l'almanach du facteur.

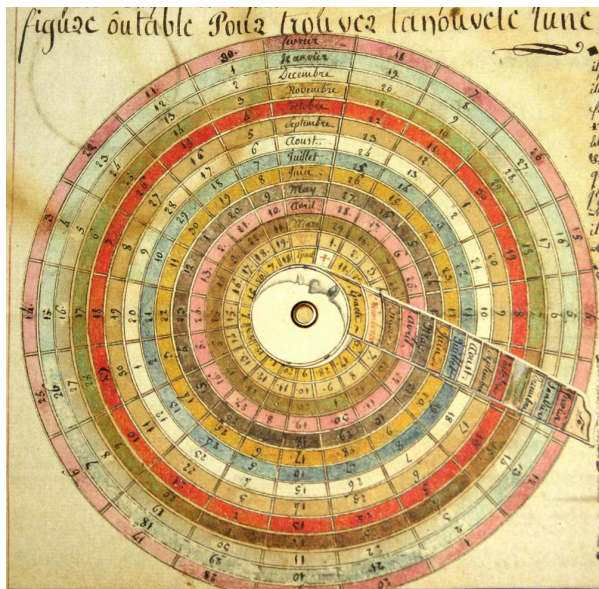


Fig.5. Figure ou table pour donner la nouvelle Lune par la table circulaire. L'alidade est placée pour une épacte de 6 (graduation orangée la plus proche du centre). On peut lire par exemple que la nouvelle Lune d'avril (en rose) aura lieu le 22.

Remarque : pour les mois de janvier et février de l'année choisie, il suffit de retirer 11 jours aux dates lues sur la volvelle pour janvier et février ou d'ôter l'épacte à 30 pour obtenir la date en janvier de la nouvelle Lune et en déduire celle de février, si elle existe.

Pour trouver la nouvelle Lune par le calcul :

"On ajoute à l'épacte les mois passés, depuis mars y compris, & on ôte la somme de 30, si elle est moindre, ou de 60, si elle est plus de 30, le restant fait connaître le quantième du mois auquel tombe la nouvelle lune".

Le calcul est évidemment approximatif. La date de la nouvelle Lune avance de 11 jours par an donc en gros de 1 jour par mois.

Un exemple (figure 6) :

"Pour une année où l'on aura 22 d'épacte, on demande le quantième du mois de juin auquel tombera la nouvelle lune.

Epacte proposée...	22
Mois écoulés depuis mars y compris	4
<b>Somme</b>	<b>26</b>
Oter de	30
Nouvelle lune le	4"

La nouvelle Lune tombera le 4 juin. Pour obtenir la pleine Lune du mois de juin, il suffit d'ajouter 15. La pleine Lune tombera le 19 juin.

Vous pouvez trouver, avec ce calcul, l'âge de la Lune le 4 juin 2012 et le comparer à celui obtenu à l'aide de l'almanach du facteur.

## Conclusion

Le comput grégorien utilise l'épacte pour les calculs des dates des nouvelles lunes. Ce sont ces calculs qu'on retrouve dans les traités de navigation du XVIII<sup>e</sup>. En plus de leur simplicité et de leur rapidité, ils gardent un intérêt historique.

Les résultats comparés aux réelles mesures précises obtenues avec des calculs complexes montrent leur limite. Actuellement, on utilise les Éphémérides astronomiques de l'annuaire du Bureau des longitudes, publiées chaque année.

Laissons parler Marguet, l'auteur d'une histoire de la navigation, sur l'approximation de ces nombres et l'imprécision des méthodes pour les déterminer :

"Depuis Medina et Cortes d'ailleurs, on déterminait grossièrement les heures des pleines mers en ajoutant l'établissement ou « situation », à l'heure du passage à la Lune au méridien et on cherchait cette dernière au moyen de l'âge de la Lune et des épactes. Les résultats devaient être singulièrement erronés à cause des inégalités lunaires et parce que jusqu'à Pierre Bouguer, en 1753, on se servait de l'épacte vulgaire qui augmente de 11 jours par an et non de l'épacte astronomique qui n'augmente que de 10 jours 15 heures 10 minutes".

Néanmoins, cette méthode simple donnait des résultats satisfaisants pour la navigation de l'époque.

Sitographie : <http://assprouen.free.fr/denoville/>

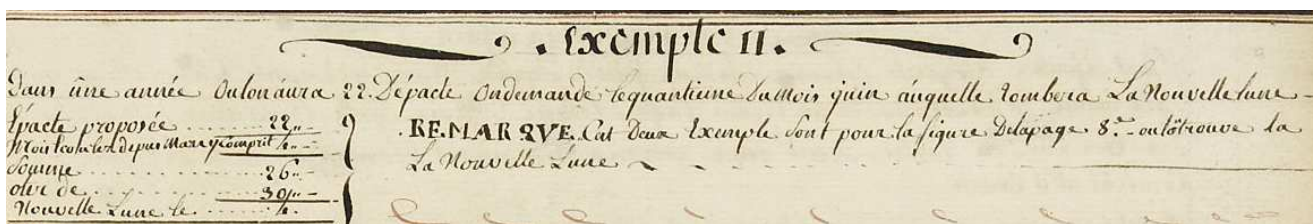


Fig.6. Exemple de calcul de la date de la nouvelle Lune extrait du manuscrit de Denoville.