

AVEC NOS ÉLÈVES

Le cadran analemmatique

Francis Berthomieu

Cadran solaire facile à utiliser, le cadran analemmatique est plus complexe à comprendre. Francis Berthomieu nous propose ici une explication sans calcul.

Qu'est-ce que c'est ?

Le cadran analemmatique est un cadran solaire particulièrement adapté à des espaces publics qui trouve une place privilégiée dans une cour de récréation. Il est plan, horizontal, sans danger (pas de style agressif et donc potentiellement dangereux) et propice à éveiller la curiosité. Il s'agit d'un tracé elliptique, souvent joliment décoré, portant une graduation horaire. Le petit axe de l'ellipse comporte une graduation qui indique des dates et souvent aussi une curieuse courbe en 8. Sa réalisation peut donner l'occasion de travaux pluridisciplinaires : de l'astronomie bien sûr, mais aussi de belles constructions géométriques, et évidemment de multiples travaux d'arts plastiques pour sa décoration (figure 1).



Fig.1. Une école dans l'île de Ré.

Enfin, son utilisation est ludique : l'utilisateur se place à l'endroit convenable sur la graduation des dates et c'est sa propre ombre qui donne l'heure solaire en se projetant sur la graduation horaire (figure 2). Passer de cette heure à celle de la montre implique alors diverses corrections, que nous n'évoquerons pas ici⁸.

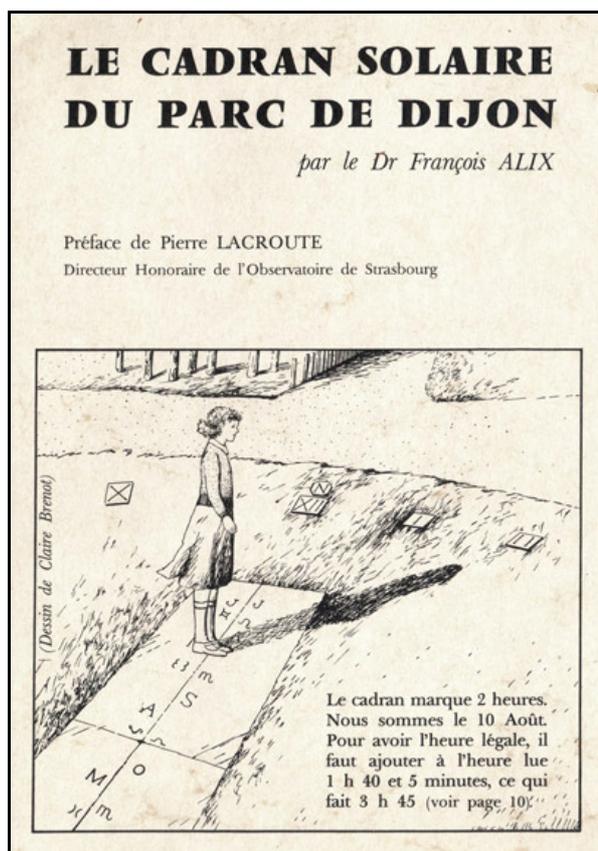


Fig.2. Lecture de l'heure sur un cadran analemmatique.

Comment le tracer ?

Il faut disposer d'une assez grande surface horizontale, bien exposée au Soleil. On doit connaître la latitude φ du lieu de construction (pour l'exemple traité ci-dessous, φ vaut 48°). Il faut choisir le centre O du cadran et tracer la ligne méridienne qui passe par O, orientée exactement selon l'axe nord-sud (voir encadré page 14). On trace en O la perpendiculaire à cette méridienne. C'est une ligne droite orientée ouest-est. On doit aussi décider de la dimension du cadran, qui s'étendra sur une distance R de part et d'autre de la méridienne.

⁸ Voir l'article sur les cadrans solaires, notions de base

Tracé d'un cadran analemmatique

- ✓ Tracer un cercle de centre O et de rayon R. Ce cercle coupe la ligne ouest-est en W à l'ouest et en E à l'est. Un rapporteur permet ensuite de tracer la demi-droite passant par O et faisant un angle φ avec l'axe WE. Elle coupe le cercle en P.
- ✓ Projeter P sur la méridienne : on obtient le point N.
- ✓ Projeter P sur le segment WE : on obtient le point F'.
- ✓ Placer le point F, symétrique de F' par rapport à O.
- ✓ Il n'y a plus qu'à tracer l'ellipse dont F et F' sont les foyers et qui passe par N (on pourra par exemple utiliser la méthode dite "des jardiniers"). Elle passe aussi par W et E. Soit S l'autre intersection de cette ellipse avec la méridienne.
- ✓ Graduer le cercle en 24 divisions égales, comme indiqué sur la figure 3 (angles au centre de 15°).
- ✓ À partir de chacun des points de cette graduation, tracer les parallèles à NS : elles coupent l'ellipse en 24 points, qu'il faut numéroter de 0 h à 23 h, à partir du point S, et dans le sens des aiguilles d'une montre. Sous nos latitudes, on pourra se limiter aux horaires diurnes, mais sous des latitudes supérieures, il pourra être indispensable d'aller au-delà.
- ✓ Il ne reste plus qu'à indiquer les positions qu'il faudra occuper sur l'axe NS (la ligne des dates) au cours de l'année pour que l'appareil soit opérationnel. La figure 5 indique la position correspondant aux équinoxes (pour les 20 mars et 23 septembre, jours d'équinoxes, c'est le point O), mais aussi les positions correspondant au 1^{er} jour de chaque mois de l'année construites ainsi : on trace à partir du foyer F des demi-droites faisant avec l'axe WE les angles indiqués sur la figure 4 (il s'agit de la déclinaison δ du Soleil à ces dates-là). Les points d'intersection avec l'axe NS indiquent les positions que doit occuper, à ces dates, l'observateur (ou un gnomon vertical) pour que son ombre, projetée sur la graduation horaire, donne l'heure solaire.

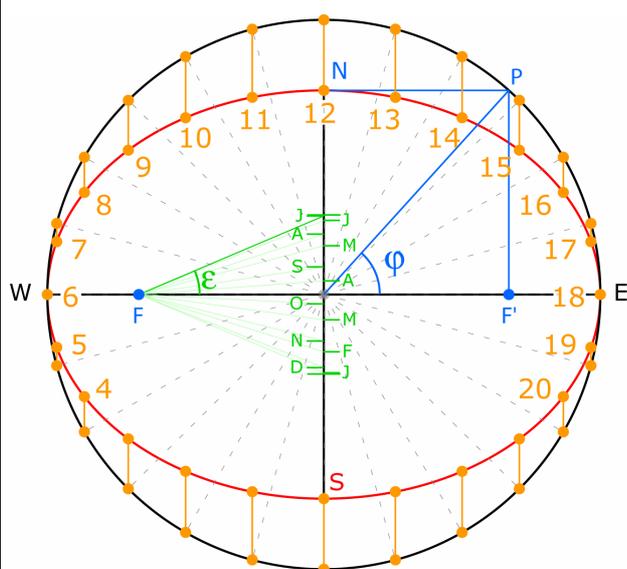


Fig.3. Construction des tracés

Le tableau ci-dessous donne la déclinaison δ du Soleil pour ces 12 dates ainsi que la valeur de "l'équation du temps" à ces dates, qui nous sera utile plus tard.

date	δ (°)	EdT. (min)
01/01/2011	-23,1	4
01/02/2011	-17,3	14
01/03/2011	-7,9	12
01/04/2011	4,3	4
01/05/2011	14,9	-3
01/06/2011	21,9	-2
01/07/2011	23,2	4
01/08/2011	18,2	6
01/09/2011	8,6	0
01/10/2011	-2,9	-10
01/11/2011	-14,2	-16
01/12/2011	-21,7	-11

Fig.4. Déclinaison du Soleil (δ) et équation du temps (EdT)

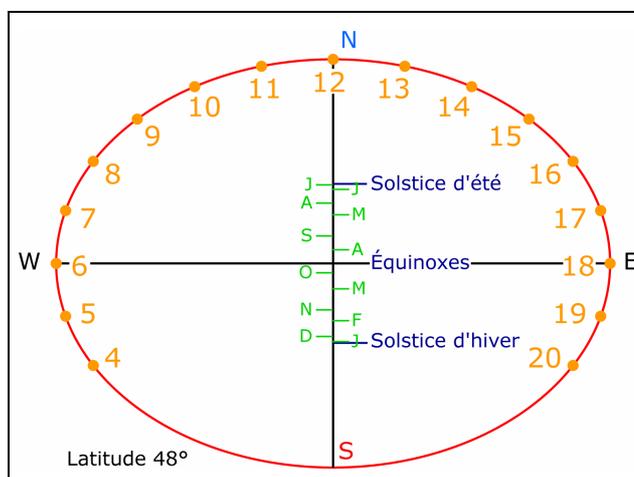


Fig.5. Le tracé terminé, avec les dates inscrites.

Comment ça marche ?

Si l'utilisation de ce cadran est simple et sa construction un peu plus délicate, comprendre son principe de fonctionnement est sensiblement plus difficile, puisqu'il faut avoir une bonne vision spatiale de la géométrie et donc bien visualiser en 3D ce qui se passe.

Le plus simple des cadrans solaires est le cadran équatorial. Nous en donnons ici une maquette facile à réaliser et qui nous sera utile pour étudier le principe du cadran analemmatique. C'est un disque de carton, gradué pour simplifier en 12 secteurs de 30°, représentant de deux en deux les 24 heures d'un jour solaire moyen. Son axe est matérialisé par une pique à brochette. Celle-ci est ajustée pour faire avec l'horizontale un angle égal à la latitude du lieu de l'expérience. On retrouve bien sûr ce même angle entre le plan du disque et la direction verticale.

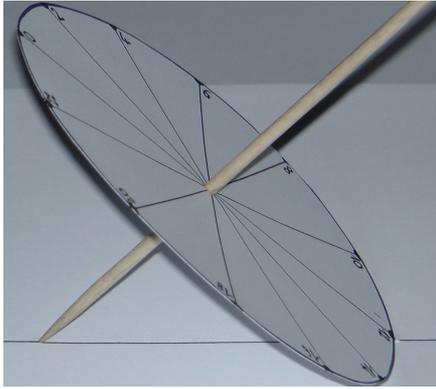


Fig.6. Le cadran équatorial.

Placé au soleil et orienté convenablement (l'axe doit être placé dans le plan méridien du lieu, dirigé vers la Polaire et la ligne 12 h en direction du nord), l'ombre de l'axe de ce cadran indique l'heure solaire locale.

Supposons qu'il est midi (heure solaire locale) le jour du solstice d'été (de juin). Le Soleil se trouve donc au-dessus du cadran et dans le plan méridien. Considérons le rayon de Soleil passant par le point du cercle gradué correspondant à la graduation 12 h (figure 7). Ce rayon passe aussi par le point **E** de l'axe. Il fait avec le plan équatorial du cadran un angle de $23,4^\circ$: c'est la déclinaison du Soleil en ce jour particulier du solstice d'été. Tout au long de cette journée, alors que le Soleil semble tourner d'est en ouest autour de l'axe du cadran, cet angle restera le même. Et à toute heure (solaire) h de la journée, le rayon de Soleil passant par le point du cercle gradué correspondant à la graduation associée à cette heure h passera aussi par le même point **E** de l'axe.

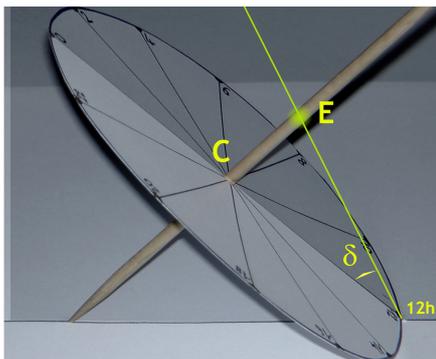


Fig.7. Rayon solaire du 21 juin à midi (δ est la déclinaison du Soleil).

De même, le jour du solstice d'hiver, le Soleil se trouve au dessous du cadran et ses rayons font tout au long de la journée avec le plan équatorial un angle de $-23,4^\circ$: c'est sa déclinaison, négative. Et à toute heure (solaire) h de la journée, le rayon de Soleil passant par le point du cercle gradué qui

correspond à la graduation h passe aussi par un même point **H** de l'axe.

Les figures 8a et 8b matérialisent cette propriété pour les jours du solstice d'été (à 6 h, 12 h et 16 h) et du solstice d'hiver (à 12 h et 16 h, à 6 h le Soleil n'est pas levé !), mais elle est valable pour chaque jour de l'année, avec cependant un nouveau point particulier du segment EH pour chaque date.

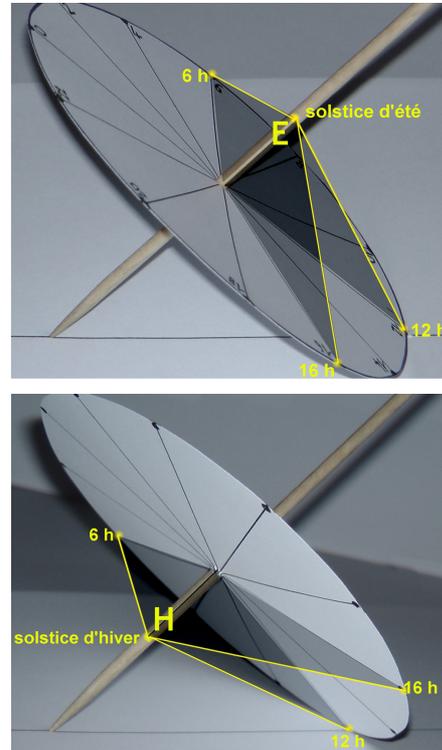


Fig.8. Rayons solaires du 21 juin et du 21 décembre à différentes heures.

La figure 9 montre le segment sur lequel se déplacera ce point très particulier de l'axe, en suivant les variations de déclinaison du Soleil tout au long de l'année. Du solstice d'été au solstice d'hiver, le point de l'axe particulier à chaque jour glissera de E vers H, occupant le centre C du cadran le jour de l'équinoxe d'automne (en septembre). Ensuite, il remontera de H vers E, passant à nouveau en C le jour de l'équinoxe de printemps (en mars).

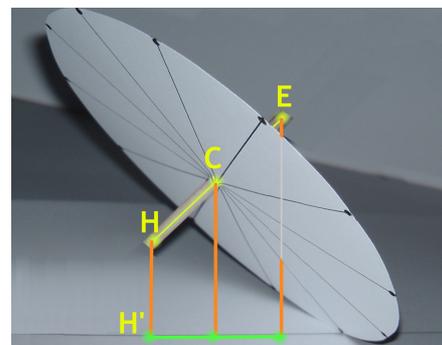


Fig.9. Projection des points H, C et E sur le plan horizontal.

Projetons maintenant les points H, C et E sur le plan horizontal, et imaginons que l'on plante verticalement trois stylets rectilignes aux points obtenus. On peut alors se poser diverses questions, comme : où serait l'ombre du stylet HH' à l'heure h du jour du solstice d'hiver ?

À l'heure solaire h , l'ombre du point H, nous l'avons vu plus haut, est portée exactement sur la graduation du cercle indiquant l'heure h . Or, puisque la zone d'ombre d'un stylet vertical est nécessairement dans le plan vertical qui contient ce stylet et le Soleil, cette ombre passera, sur le sol horizontal, par la projection sur ce plan du point du cercle indiquant l'heure h . La figure 10 illustre cette propriété pour le solstice d'hiver à 16 h (solaire).

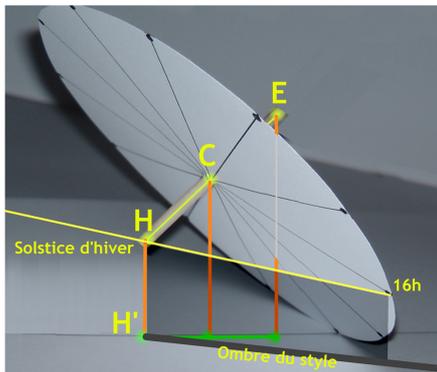


Fig.10. Position de l'ombre du stylet le 21 décembre à 16 h.

Nous pouvons alors énoncer une assertion vérifiée pour tous les jours de l'année et toute heure de la journée :

"Plantons un stylet vertical à la verticale du point particulier du segment HE correspondant à la déclinaison du Soleil pour ce jour. À une heure donnée, son ombre portée sur le sol passera par la projection verticale de la graduation du cadran équatorial circulaire qui indique cette même heure". Dès lors, la mystérieuse construction du cadran analemmatique devient plus compréhensible : l'ellipse graduée n'est autre que la projection du cercle gradué sur le sol horizontal. Les points de la méridienne indiquant des dates sont les projections au sol des points du segment HE correspondant à ces dates...

Le reste n'est que géométrie !

Et la "courbe en huit" ?

La compréhension de ce tracé présuppose la connaissance de la notion "d'équation du temps" : à midi "solaire", il n'est pas "midi de temps moyen". Pour chaque jour de l'année, il faut apporter une correction Δt pour passer de "l'heure solaire" à "l'heure de temps moyen" : cette correction est appelée "équation du temps". Le tableau de la figure 4 nous donne sa valeur (en minutes) pour le premier

jour des douze mois de l'année. Cette durée Δt correspond à un angle α de rotation du Soleil autour de l'axe du cadran, sachant qu'un degré d'angle correspond à 4 minutes de temps.

On peut alors corriger la position du style vertical sur le cadran analemmatique en faisant en sorte que son ombre se projette sur la graduation 12 h du cadran, non pas à midi "solaire" mais à "midi de temps moyen". Le schéma indique comment trouver la position du style correspondant au 1^{er} février.

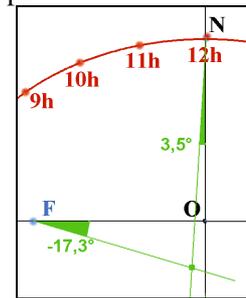


Fig.11. Comment modifier la position du style (ou de la personne qui fait ombre) pour corriger de l'équation du temps à midi.

En répétant cette construction pour tous les jours de l'année, on obtient la fameuse « courbe en huit », nommée, courbe de temps moyen et souvent, analemme. C'est cette courbe qui donne son nom au cadran. Une remarque pour finir : la correction de l'équation du temps par ce moyen n'est valable que pour midi !

On préfère souvent dessiner sur la partie centrale du cadran une courbe en 8 plus large, obtenue en traçant pour différentes dates en abscisse la valeur de l'équation du temps et en ordonnée la déclinaison du Soleil. On obtient la courbe suivante : on situe la date de lecture sur la courbe ; l'abscisse du point donne la valeur de l'équation du temps.

Fig.12. Courbe donnant l'équation du temps par simple lecture.

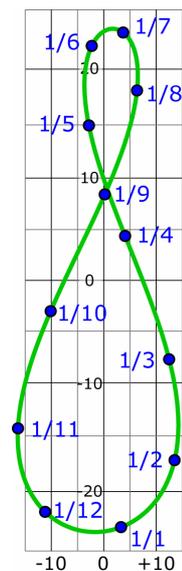


Fig.13. Le cadran du Cannet des Maures avec sa courbe de l'équation du temps.