

# AVEC NOS ÉLÈVES

## Comment "peser" Saturne ?

Jean-Yves Beauchot, Chalon/Saône

La troisième loi de Kepler est au programme de physique-chimie en classe de Terminale S. Son application à la mesure de la masse d'une planète à partir de l'observation du mouvement d'un de ses satellites est toujours étonnante pour les élèves. Je présente ici le cas de la masse de Saturne à partir de l'observation de Titan. Ce travail a été réalisé dans le cadre du club d'astronomie du lycée, en partenariat avec la Société d'astronomie de Saône et Loire.

### Introduction

On considère un satellite dont l'orbite est circulaire (les excentricités des principaux satellites de Saturne sont très faibles), de rayon  $r$  (en m), de période de révolution  $T$  (en s) autour d'un astre de masse  $M$  (en kg). La troisième loi de Kepler a pour expression :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

La masse de l'astre s'écrit alors :  $M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$ .

Le calcul de la masse nécessite par conséquent de mesurer le rayon de l'orbite d'un satellite ( $r$ ) ainsi que sa période de révolution ( $T$ ).

### Le protocole

Nous avons fait appel à la Société d'Astronomie de Saône et Loire (SASL) pour nous aider dans la réalisation des prises de vue. Il a été décidé de réaliser une succession de clichés de Saturne sur une période de quelques jours dans la période mi-février 2008. Le matériel utilisé était un télescope Maksutov 125/1 500 muni d'une webcam Philips ToUCam Pro III (spc900nc).

Pour avoir une série de clichés exploitables, il faut réaliser des prises de vue qui ne soient pas trop éloignées dans le temps, les périodes de révolution des satellites de Saturne étant relativement faibles (de 1 à 16 jours pour les satellites les plus visibles sauf Japet avec 79 jours).

La prise de vue avec une webcam a plusieurs intérêts : c'est un matériel peu coûteux et simple à adapter sur un télescope. Par rapport à un appareil photo numérique, la prise de vue à 5 ou 10 images par seconde a le grand intérêt de "figer" la turbulence. La résolution n'est pas bonne mais les traitements qu'on peut faire subir au film permettent d'améliorer énormément le résultat et, de toute façon, le but n'était pas de produire de

jolies images mais de suivre la révolution d'un satellite.

### Clichés

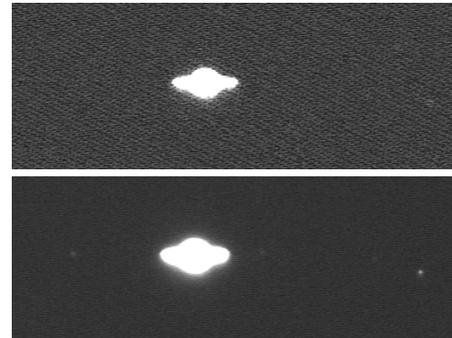


Image brute extraite du film obtenu.

Après traitement par le logiciel "IRIS".

Fig.1. Images de Saturne faite à la webcam.

Nous avons constaté qu'il n'était pas possible de paramétrer l'exposition de la webcam pour faire apparaître les satellites sans surexposer la planète. Pour obtenir une image satisfaisante il faut donc enregistrer 2 films avec des expositions différentes et les traiter séparément avant de fusionner les images obtenues : l'une montrant Saturne sans ses satellites (figure 2) et l'autre les satellites ainsi que la planète fortement surexposée. Après avoir retravaillé les films avec IRIS puis Photoshop, on arrive au résultat de la figure 3.

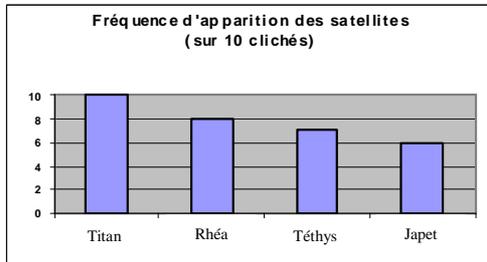


Fig.2. Saturne à la webcam, avec un temps d'exposition plus court et après traitement.



Fig.3. Image finale de Saturne et de ses satellites.

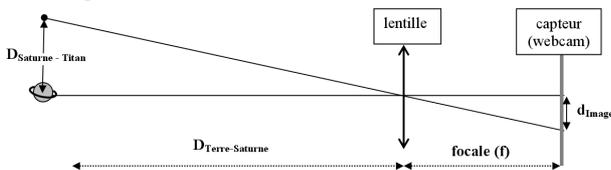
Sur nos clichés, il y avait toujours plusieurs satellites visibles (Titan, Rhéa, Dioné et Thétys), nous avons donc tenté de suivre la révolution de plusieurs d'entre eux mais les caprices de la météo nous ont empêché de suivre ceux dont la période de révolution était trop petite. Nous avons donc travaillé uniquement sur Titan (facile à repérer par son éclat plus important).



Finalement les clichés réalisés et exploitables correspondent aux dates suivantes : 12 janvier puis 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14 et 17 février 2008.

## Calcul de la distance Saturne - Titan

Pour simplifier le schéma nous avons considéré ici que les images étaient observées avec une lunette de focale  $f = 2700$  mm au lieu d'un télescope de même focale.



La propriété de Thalès s'écrit ici :

$$\frac{D_{\text{Saturne-Titan}}}{d_{\text{image}}} = \frac{D_{\text{Terre-Saturne}}}{f}$$

( $D_{\text{Saturne-Titan}}$  représente la distance apparente observée dans le plan perpendiculaire à la ligne de visée.)

$$D'_{\text{Saturne-Titan}} = \frac{d_{\text{image}} \times D_{\text{Terre-Saturne}}}{f}$$

Les valeurs de  $D_{\text{Terre-Saturne}}$  ont été obtenues avec le logiciel Stellarium.

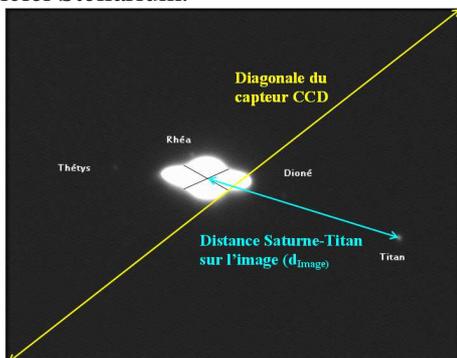


Fig.4. Calcul de  $d_{\text{image}}$ .

Le calcul de la distance  $d_{\text{image}}$  a été fait à partir de la taille du capteur CCD donnée par le fabricant (4,5 mm).

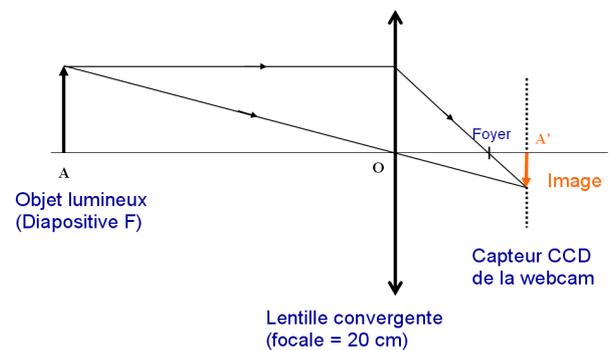
En mesurant sur l'écran de l'ordinateur la diagonale et la distance entre Saturne et Titan, une règle de 3 donne la valeur de  $d_{\text{Image}}$  très facilement.

## Une correction sur la taille utile du capteur

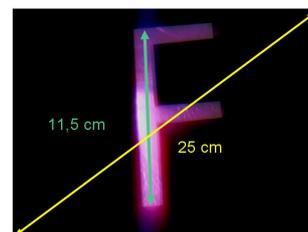
Lorsque nous sommes arrivés au bout de nos calculs le résultat obtenu pour la masse de Saturne n'était pas très bon. Nous avons voulu vérifier si la donnée de la diagonale du capteur était exacte.

Pour cela un montage optique comme celui schématisé ci-après a permis de former une image de taille connue sur le capteur CCD et de vérifier la mesure sur l'écran d'un ordinateur.

La distance OA étant connue ainsi que la taille de l'objet, on peut calculer (avec la relation de conjugaison de Descartes) la taille et la position exacte de l'image.



Avec un objet (lettre F) de 11 mm de haut placé à 137 cm de la lentille, on doit obtenir une image de 1,9 mm à 23,4 cm de la lentille (position du capteur).

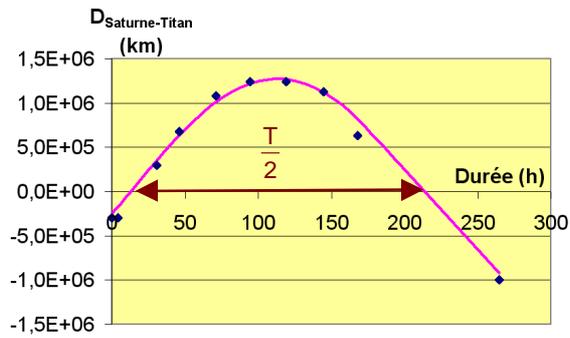


Sur écran du PC	Sur capteur CCD
11,5	0,19
25	$D_{\text{CCD}}$

Nous avons retenu la valeur de 4,2 mm pour la diagonale du capteur au lieu des 4,5 annoncés.

## Exploitation de la série de mesures

A l'aide des clichés réalisés, nous avons calculé les distances Saturne-Titan ainsi que la durée écoulée depuis la photo du 6 février puis tracé le graphique donnant la distance en fonction de la durée :



En recherchant à modéliser la série de points, nous sommes arrivés à :

$$D(t) = 1,27 \cdot 10^6 \times \sin\left(\frac{2\pi t}{400} - 0,2\right) \quad (D \text{ en km et } t \text{ en h})$$

## Conclusion - Résultats

La plus grande distance apparente entre Saturne et Titan, donc le demi grand axe de l'orbite de ce dernier vaut :  $r = 1,27 \cdot 10^6$  km et sa période de révolution vaut  $T = 400$  h, soit  $1,44 \cdot 10^6$  s.

L'application de la 3<sup>e</sup> loi de Kepler donne alors la masse de Saturne :

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \times (1,27 \cdot 10^9)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \times (1,44 \cdot 10^6)^2}$$

soit  $M = 5,85 \cdot 10^{26}$  kg au lieu de  $5,69 \cdot 10^{26}$  kg que l'on trouve dans la littérature, soit 3 % d'erreur. ■