ARTICLE DE FOND

La chute dans un puits

Georges Paturel, Observatoire de Lyon

Quand la chute des corps sur la Terre est étudiée en prenant en compte la rotation de la Terre, une nouvelle accélération apparaît : l'accélération de Coriolis. On peut ainsi interpréter les expériences historiques de Reich faites en 1833 dans un puits de mine.

Introduction

On peut facilement imaginer une expérience de la chute d'une masse *m*, par exemple une boule en plomb, dans un puits très profond. La boule va-t-elle arriver exactement à la verticale du point de lâcher ? L'expérience a été faite en 1833, par Ferdinand Reich à Freiberg. Pour une chute dans un puits de mine de 158 m de profondeur, la déviation entre le point de chute observé et le point attendu (donné par un fil à plomb) est de 28 mm. La déviation est toujours dans le sens de la rotation, c'est-à-dire vers l'est. Peut-on comprendre qualitativement et quantitativement ce phénomène ?
C'est ce que nous nous proposons de faire dans cet article.

Analyse de la chute

Pour l'instant nous supposerons que le puits est situé à l'équateur. La figure 1 schématise l'expérience.

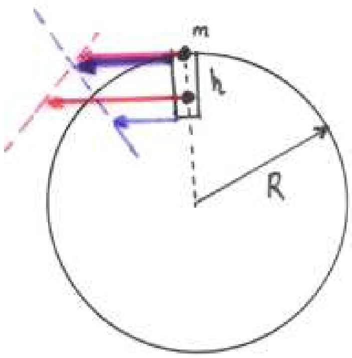

Fig.1. *Chute dans un puit à l'équateur en vue du nord.*

Quand la boule est maintenue au sommet du puits, sa vitesse horizontale est évidemment égale à celle des bords du puits. Mais le fond du puits a une vitesse horizontale moindre. En effet, le puits fait un tour en 24 heures, entraîné par la rotation de la Terre. Mais les points au sommet parcourent une circonférence plus longue : $2\pi R$, alors que les points du fond du puits parcourent une circonférence plus petite : $2\pi(R-h)$. Donc le fond du puits a une vitesse horizontale plus petite.

On conclut que, si après le lâcher, la vitesse horizontale de la boule restait constante, la boule prendrait de l'avance et tomberait à l'est de la verticale. Il peut sembler que nous ayons compris qualitativement le résultat. Je dis "sembler", car ce n'est pas encore correct.
En effet, quand la boule tombe en chute libre et se rapproche de l'axe de rotation, elle doit conserver le moment angulaire initial qu'elle avait par rapport au centre de la Terre. C'est cette loi qu'utilise le patineur pour tourner plus vite sur lui-même quand il rapproche ses bras de son axe de rotation. La vitesse horizontale de la boule va croître quand elle se rapproche du fond du puits, afin que soit conservée la quantité *m.v.r*. (r est le rayon auquel se trouve la boule et v est sa vitesse horizontale au même point). Si *r* diminue, *v* doit augmenter. Donc, pour reprendre une expression maladroite que j'avais eue en expliquant le phénomène : "non seulement la vitesse horizontale de la boule est constante, mais elle augmente".

Accélération de Coriolis

Sur la base de notre analyse, nous allons calculer l'accélération horizontale (en direction de l'est) que prend la boule par rapport au puits (i.e., par rapport au système tournant). C'est l'accélération de Coriolis. Nous supposerons que la boule est lâchée depuis un rayon *r*, quelconque et qu'elle tombe d'une hauteur infinitésimale *dh*. La vitesse horizontale au moment du lâcher, est *w*. La vitesse horizontale à la position *r-dh*, causée par la rotation de la Terre est[1] :

$$v = w\frac{2\pi(r-dh)}{2\pi r} = \frac{w(r-dh)}{r}$$

[1] Notez que l'angle entre $\vec{\omega}$ et $\vec{v}_{chute}$ est $\frac{\pi}{2}+\lambda$.

La vitesse horizontale de la boule après la chute sur une hauteur dh est (en vertu de la conservation du moment angulaire) :

$$v' = w\frac{r}{(r-dh)}.$$

De sorte que l'excès infinitésimal de vitesse, dv de la boule par rapport au bord du puits est :

$$dv = v' - v = w\left[\frac{r}{r-dh} - \frac{r-dh}{r}\right].$$

En développant et en simplifiant, compte tenu du fait que dh est très petit devant r on trouve :

$$dv = 2w\frac{dh}{r}.$$

Si on divise par l'intervalle de temps $d\tau$, infinitésimal, que la boule met pour tomber d'une hauteur infinitésimale dh, on obtient l'accélération cherchée a.

$$a = \frac{dv}{d\tau} = 2\frac{w}{r}\frac{dh}{d\tau}.$$

Notons que $dh/d\tau$ est la vitesse de chute instantanée de la boule, v_{chute}, à la distance r du centre et que w/r est la vitesse angulaire ω (constante pour une rotation d'un corps solide : $\omega = w/r = V/R$). On retrouve ainsi la forme classique de l'accélération de Coriolis :

$$a = 2\,\omega \cdot v_{chute}.$$

Si la vitesse de chute n'est pas perpendiculaire à l'axe de rotation (ce qui arrive quand l'expérience n'est plus faite à l'équateur - voir la figure 2), il faut considérer uniquement la composante de chute le long de la perpendiculaire à l'axe de rotation.

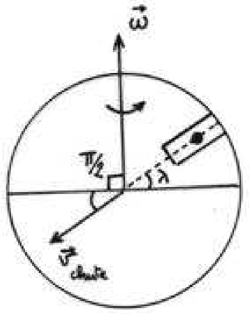

Fig.2.

L'équation devient (λ étant la latitude du lieu) :

$$a = 2\,\omega \cdot v_{chute}\cos\lambda,$$

ce qui se résume par la formule vectorielle[2] :

$$\vec a = 2\vec\omega \wedge \vec v_{chute}$$

Calcul de la déviation

Nous allons calculer maintenant la déviation du point de chute de la boule par rapport à la verticale quand la boule arrive au fond du puits. Nous pourrons comparer avec les résultats expérimentaux de Reich. Le calcul (inspiré du livre de mécanique de Bruhat) est un peu plus complexe car il fait intervenir une équation différentielle, heureusement facile à résoudre.

L'accélération horizontale s'écrit (x étant la déviation cherchée) :

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 2\omega \cdot v_{chute}\cos\lambda.$$

La dynamique de la chute donne la valeur de v_{chute}

$$v_{chute} = g \cdot t,$$

où g est l'accélération de la pesanteur. On trouve donc que :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \cdot g \cdot t\cos\lambda.$$

En intégrant une première fois, on en tire la vitesse :

$$\frac{dx}{dt} = 2\omega \cdot g\cos\lambda \cdot \left(\frac{t^2}{2}\right) = \omega \cdot g\cos\lambda \cdot t^2.$$

En intégrant à nouveau, on obtient la déviation en fonction du temps de chute :

$$x = \omega \cdot g\cos\lambda \cdot \frac{t^3}{3}.$$

Quant au temps de chute t, il est relié à la hauteur totale de chute h par la dynamique usuelle :

$$h = \frac{1}{2}g \cdot t^2.$$

En combinant ces deux dernières équations on obtient la déviation totale pour la hauteur h :

$$x = \frac{1}{3}\omega \cdot g\cos\lambda \cdot \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Application numérique

Sachant que la latitude de Freiberg est de 50°55' et reprenant les données de Reich on trouve :

$$x = \frac{1}{3} \times \frac{2\pi}{24 \times 3600} \times 9{,}81 \times \cos(51°) \times \left(\frac{2 \times 158}{9{,}81}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Le résultat du calcul donne $x = 0{,}0274$ m (27,4 mm) en excellent accord avec l'observation de Reich.

Ce résultat m'a conduit à penser qu'on devrait pouvoir refaire l'expérience avec une hauteur plus faible… J'espère que ce petit calcul suscitera des vocations pour l'expérimentation. ■

Dans le n°126 sur la rotation de la Terre, j'avais abordé rapidement le problème de la déviation vers l'est mais de manière incomplète et de ce fait erronée, comme Newton. Georges Paturel m'avait signalé cette erreur et a bien voulu apporter ces quelques précisions importantes.

Pierre Causeret

[2] Notez que l'angle entre $\vec\omega$ et $\vec v_{chute}$ est $\frac{\pi}{2} + \lambda$.